

# ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

43. Band, Heft 6/10

1. Juli 1952.

S. 241—476

## Geschichte.

• **Becker, Oskar und Jos. E. Hofmann: Geschichte der Mathematik.** (Geschichte der Wissenschaften II. Naturwissenschaften.) Bonn: Athenäum-Verlag 1951. 340 S.

Während in den letzten 20 Jahren auf englischem, französischem und italienischem Sprachgebiet kürzere Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik veröffentlicht wurden, ist seit 1928 kein derartiges Werk in deutscher Sprache erschienen. Das vorliegende Buch, das den 2. Band der von E. Rothacker herausgegebenen Geschichte der Wissenschaften bildet, entspricht deshalb einem wirklichen Bedürfnis. Die beiden Verff. haben sich den Stoff in der Weise aufgeteilt, daß O. Becker die Geschichte der antiken Mathematik (Ägypter, Sumerer und Babylonier, Inder im Altertum und Griechen) darstellt (S. 13—96), während Jos. E. Hofmann auf S. 115—141 die Geschichte der morgenländischen Mathematik (Inder, Muslime, Chinesen und Japaner) und auf Seite 142—261 die der abendländischen Mathematik behandelt. Der erstere gibt auf S. 97—113 ein Verzeichnis der Literatur zur antiken Mathematik, das sowohl die Quellschriften als auch die auf Geschichte und Interpretation bezüglichen wichtigsten Arbeiten aufführt. Der zweite Verf. hat ein umfangreiches alphabetisches Namen- und Schriftenverzeichnis (S. 263—340) beigezeichnet, das sich auf das ganze Buch bezieht. — Im Vorwort (S. 9—12) legen Verff. die Grundsätze dar, von denen sie sich bei der Bearbeitung leiten ließen. Sie betrachten die wissenschaftliche Geschichte der Mathematik als einen Teil der Geschichte des menschlichen Geistes. Bei ihrer Darstellung verwenden sie, je nach der Eigenart der behandelten Probleme, sowohl das pragmatische (genetisch und chronologisch beschreibende) Verfahren wie auch die morphologische (d. h. gestaltenthüllende) Betrachtungsweise mit ihrem stilgeschichtlichen Blickpunkt. Durch diese Art der Darstellung gelingt es, den Anteil der einzelnen Völker an der Entwicklung der Mathematik aufzuzeigen, die Entwicklungsgeschichte der leitenden Ideen, Probleme und Methoden dieser Wissenschaft und ihren Zusammenhang mit anderen Gebieten der menschlichen Forschung herauszuarbeiten und eine lebendige, manchmal geradezu spannende Gesamtgeschichte der mathematischen Wissenschaften von den Anfängen bis zum Beginn des 20. Jahrhunderts zu zeichnen. Besonders hingewiesen sei auf den kurzen Überblick über die Entwicklung der Mathematikgeschichte (S. 254—261). — Der geringe Raum zwang zur Beschränkung auf das Wesentliche, zu knappsten Formulierungen, die zuweilen nur Andeutungen sind. Dabei ist, besonders in der Behandlung des 19. Jahrhunderts, die naheliegende Gefahr einer bloßen Aufzählung von Namen nicht immer gebannt worden. Trotz dieser Kürze enthält das Werk eine Fülle neuer Gesichtspunkte und neuer Tatsachen, die gegründet sind auf die gewissenhafte Verwertung der Ergebnisse eigener und fremder Forschung bis auf den heutigen Tag. Oft ist es nur ein Wort oder eine bestimmte Wendung, die dem Kenner den Fortschritt über frühere mathematikgeschichtliche Darstellungen hinaus verrät. Daß dabei deutlich unterschieden wird zwischen einwandfrei feststehenden Tatsachen und bloßen, auf Analogie oder Wahrscheinlichkeit beruhenden Vermutungen, verdient besondere Hervorhebung. — Es ist klar, daß ein solches Buch beim Leser eine gewisse Kenntnis der wichtigsten mathematischen Probleme und Methoden sowie der Hauptlinien der allgemeinen Kulturgeschichte und eine erste Schulung in wissenschaftlichem Denken und Forschen voraussetzt. Wer so ausgerüstet das Werk studiert, wird nicht nur eine klare Vorstellung von der über 4 Jahrtausende sich erstreckenden Entwicklung einer der glänzendsten Leistungen des menschlichen Geistes gewinnen, sondern auch die Grundlage zu eigener Forschung auf dem Gebiete der Wissenschaftsgeschichte legen, wobei die sorgfältig bearbeiteten Register wesentliche Dienste leisten können.

*Eugen Löffler.*

**Fraiese, Attilio: La geometria greca e la continuità.** Archimede 3, 98—104 (1951).

Während die moderne Elementargeometrie zu ihren Existenzbeweisen das Prinzip der Stetigkeit heranzieht, führten die Griechen — nach Ansicht Zeuthens — einen solchen durch den Nachweis der Konstruktionsmöglichkeit des betreffenden geometrischen Gebildes. Verf. führt aus, daß diese Ansicht keine absolute Gültigkeit hat. Auf der einen Seite zeigt sich das Fehlen des Stetigkeitsgedankens, wie z. B. beim Parallelogramm: Quadrat und Rechteck sind schon für die Pythagoreer vollständig gegensätzliche Begriffe (wie grad — ungrad; begrenzt — unbegrenzt



usw.). Anders ist es aber bei allgemeinen Größen (Buch V und X der Elemente), die ja gar nicht konstruiert werden können, beim Archimedischen Axiom (Buch V) oder bei der Exhaustion (Buch XII). Der Trennungsstrich, der „Wendepunkt“ in den beiden Auffassungen, liegt zwischen dem IV. und V. Buch. *Kurt Vogel.*

**Santillana, George de and Walter Pitts: Philolaos in Limbo, or: What happened to the Pythagoreans?** *Isis* 42, 112—120 (1951).

Gli A. riprendono, con stile vivace e garbatamente polemico, le discussioni sulla nota opera di Erich Frank: „Plato und die sogenannten Pythagoreer“. Essi portano argomenti ampi e notevoli contro le affermazioni del Frank: in particolare contro quelle riguardanti l'importanza dell'opera matematica di Anassagora (eccessivamente valutata, secondo gli A.) e circa l'inconsistenza dell'opera di Filolao. Assai interessante, a proposito del titolo dell'opera del Frank, è la notizia, riportata dal Cherniss, che Aristotele parla anche dei „considdetti agricoltori“ („so-called farmers“): la qual cosa non significa che egli dubitasse dell'esistenza di tale categoria di persone. *Attilio Frajese.*

**Waerden, B. L. van der: Die Astronomie der Pythagoreer.** *Verhdl. Nederl. Akad. Wet., Afd. Natuurk., Sect. I.* 20, Nr. 1, 80 S. (1951).

Verf. gibt hier eine umfassende und kritische Darstellung der pythagoreischen astronomischen Theorien, für die eine geradlinige Entwicklung bis zum heliozentrischen System des Aristarch festgestellt wird. Mit der mechanistischen Auffassung von Anaxagoras und Demokrit, in der die unbeselten Himmelskörper glühende, durch Wirbelbewegung des Äthers von der Erde weggeschleuderte Steine sind, können die unregelmäßigen Bewegungen der Planeten ebenso wenig wie die Eigenbewegung von Sonne und Mond erklärt werden. Ganz anders stellten es sich die Pythagoreer und Platon vor, für die Harmonie und mathematisches Gesetz in der Natur oberster Grundsatz war: Neben der Kreisbewegung des Himmels um die Erde als Mittelpunkt folgen Sonne, Mond und die 5 Planeten noch einer zweiten, entgegengesetzten in einer zum Äquator geneigten Bahn. Dabei bringen die 7 Himmelskörper je nach Entfernung bzw. Geschwindigkeit verschiedene Töne einer musikalischen Harmonie hervor, deren Tonleiter sich nicht eindeutig klären läßt (auf die Tonleiter im Timaios geht Verf. nicht ein). Die Hauptschwierigkeit liegt in der Erklärung der unregelmäßigen Planetenbewegungen. Hierzu stellt Verf. auf Grund von Stellen bei Platon (Timaios 38: „Kreise, die einen Kreis gehen“) und anderer Quellen (Theon von Smyrna, Chalcidius u. a.) die neue These auf, daß schon die Pythagoreer — und nicht erst Apollonios — die Epizyklen und Exzenter eingeführt haben. Der Einwand, daß dann Platons Forderung nach einer einfachen Lösung (die Eudoxos mit der Theorie der homozentrischen Sphären leistete) unverständlich sei, wird gegenstandslos, wenn man mit dem Verf. annimmt, daß die die Erscheinungen rettende Epizykeltheorie zuerst nur für Merkur, Venus und Sonne aufgestellt war, während sie für die übrigen Planeten noch fehlte. — Einen Schritt vorwärts führt das System des Philolaos (bzw. Hiketas), das der Verf. nicht als „primitive Phantasie“, sondern als ernsthaften Verbesserungsversuch ansieht. Hier hat die Erde nicht mehr ihre bisherige zentrale Stellung. Sie rotiert mit den andern Körpern und dem Fixsternhimmel (einschließlich der Gegenerde, die eingeführt wurde, um die 10-Zahl vollständig zu machen) um ein Zentralfeuer, dem sie bei ihrem täglichen Umlauf stets die gleiche Seite zuwendet. So ist der Wechsel von Tag und Nacht erklärt und jeder Planet beschreibt nur eine einzige Kreisbewegung. Wegen der mathematischen Einfachheit dieser Theorie scheint sie auch Platon im Alter („Gesetze“) angenommen zu haben unter Abasge an die an sich besseren Systeme der Epizykeln und homozentrischen Sphären. — Aber noch nicht konnten die Entfernungen und Umlaufzeiten so gewählt werden, daß die Theorie mit der Beobachtung im Einklang stand. Dies leistete Herakleides von Pontos, der auch die Achsendrehung der Erde (wie Ekphantos u. a.) lehrte. Sein System war bisher als geozentrisch gedeutet worden. Demgegenüber weist Verf. — besonders nach eingehender Diskussion der Chalcidiusfragmente — nach, daß Herakleides die Himmelskörper in der Reihenfolge Sonne, Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn um ein gemeinsames Zentrum rotieren läßt. Von hier aus war nur noch ein kleiner Schritt zu tun zum heliozentrischen System des Aristarch, nämlich der, daß man den Radius des innersten Körpers, der Sonne, gleich Null setzte. — Daß die Ansicht des Aristarch von den Mathematikern und Astronomen (Archimedes, Apollonios, Hipparch, Ptolemaios) nicht angenommen wurde, hat seinen Grund darin, daß man die bei einer Erdrevolution erwartete Parallaxe nicht beobachten konnte und das Trägheitsgesetz nicht kannte, um dem Einwand zu begegnen, daß bei der ungeheuer schnellen Erdbewegung alle nicht auf der Erde befestigten Gegenstände fortgeschleudert werden müßten. — Die Bedeutung der vorliegenden Arbeit wird dadurch unterstrichen, daß Verf. 100 Belegstellen (sie umfassen etwa 35 Seiten!) vollständig wiedergibt und so die Nachprüfung der zahlreichen neuen Urteile ermöglicht. *Kurt Vogel.*



**Prasad, B. N. and R. Shukla: Aryabhata of Kusumpura.** Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc. 15, 24—32 (1951).

Verf. weist zuerst nach, daß es vor Aryabhata I aus Kusumpura einen indischen Mathematiker gleichen Namens nicht gegebenen hat. Weiterhin gibt er eine kurze Übersicht über die Leistungen Aryabhatas auf dem Gebiet der Astronomie und Mathematik. Bezüglich der Astronomie wird eine griechische Beeinflussung abgelehnt. Warum aber sollte griechische Wissenschaft — wie früher babylonische — nicht ihren Weg nach Indien gefunden haben? Aus einer recht unklaren Stelle der Ganipada möchte Verf. das Vorliegen eines Grenzprozesses zur Bestimmung des Kreisinhaltcs herauslesen.

*Kurt Vogel.*

**Sinha, Sri Rama: Bhaskara's Lilavati.** Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc. 15, 9—16 (1951).

Neben einer astronomischen Abhandlung (Siddhanta Siromani) und einer Algebra (Bijaganita) hat Bhaskara, der i. J. 1114 geborene letzte große indische Mathematiker, ein umfangreiches arithmetisch-geometrisches Werk (Lilavati) hinterlassen. Verf. gibt hier neben der Schilderung der Lebensumstände des vielseitigen Gelehrten, der sich auch als Dichter auszeichnete, eine allgemeine Übersicht über seine „Lilavati“. Bemerkenswert ist das Problem der Berechnung der Summe aller Zahlen, die aus den Permutationen der 8 Elemente 2 bis 9 gebildet sind. — Zu der Behauptung, daß Bhaskara 400 Jahre vor Leibniz und Newton vollständig vertraut mit dem Prinzip der Differentialrechnung gewesen ist, vergleiche: P. C. Sengupta, dies. Zbl. 2, 325, und C. H. Müller, dies. Zbl. 2, 379, der feststellt, daß von einem Grenzübergang keinerlei Rede sein kann.

*Kurt Vogel.*

**Agostini, Amedeo: Un codice di aritmetica anonimo del sec. XV.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 231—240 (1951).

Verf. gibt eine ausführliche Inhaltsangabe eines handschriftlichen anonymen Rechenbuchs (mit 23 Kapiteln auf 209 Blättern) aus Florenz vom Jahre 1475. Behandelt werden die Grundoperationen mit ganzen Zahlen und Brüchen und die Regel de tri besonders in ihrer Verwendung bei den damals gebräuchlichen kaufmännischen Aufgabengruppen wie: Kauf und Verkauf, Münz- und Gewichtsumrechnungen, Tausch („barattare“), Münzlegierungen („consolare“), Gesellschafts- und Terminrechnungen usw. Zwischen die einzelnen Kapitel werden, um den Leser nicht mit lauter Fragen der kaufmännischen Praxis zu langweilen (die alle — wie der Anonymus sagt — ohne Reiz sind) Unterhaltungsaufgaben eingeschaltet, wie wir sie aus vielen mittelalterlichen Texten kennen. Hierher gehören u. a.: arithmetische Reihen, Zahlenerraten, falscher Ansatz, die „gefundene Börse“, das Josephsspiel und lineare Gleichungen, die mit „Argibra“ gelöst werden (in einer italienischen Hs. der Plimpton Library a. d. J. 1473 ist übrigens auch von den „Regole de la Arcibra“ die Rede). Den Abschluß bilden, „da das Werk ohne Geometrie unvollständig wäre“, geometrische Definitionen und Berechnungen von Flächen und Körpern nebst Anwendungen des Pythagoreischen Lehrsatzes, z. B. die seit der babylonischen Mathematik bekannte „angelehnte Leiter“, der „abgebrochene Baumstamm“ u. a. — Man erkennt deutlich die Abhängigkeit von Leonardo von Pisa, der sogar im 15. Kap. zitiert wird. Eine Beschreibung des 19. Kap. ist unterblieben, bei dem es sich nach der kurzen Inhaltsangabe auf fol. 13 um Diskontrechnung („schontare“) handelt.

*Kurt Vogel.*

**Agostini, Amedeo: Il „De tactonibus“ di Evangelista Torricelli.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 319—321 (1951).

**Kropp, Gerhard: Lalouvéres Quadratura circuli.** J. reine angew. Math. 189, 1—76 (1951).

Antoine de Lalouvére (1600—1664) oder Antonius Lalovera, französischer Mathematiker, Angehöriger des Jesuitenordens und Professor in Toulouse hat sich an dem durch Pascal 1658 veranstalteten Preisausschreiben über die Zykloide beteiligt, war zu Lebzeiten ein bekannter und angesehener Gelehrter, stand im Briefwechsel mit zahlreichen zeitgenössischen Mathematikern und ist von vielen in ihren Schriften erwähnt worden. Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist sein umfangreichstes, im Jahre 1651 erschienenes Werk (etwa 700 Seiten): „Quadratura circuli et hyperbolae segmentorum ex dato eorum centro gravitatis“, das M. Cantor zwar erwähnt, aber offenbar nicht gelesen hat und das bisher fast ganz unbekannt geblieben war. Verf. hat es in seiner Berliner Dissertation (1944/45), die die Grundlage für die Abhandlung bildet, zum erstenmal genauer behandelt und im Anhang zu seinem Buch: „Beiträge zur Philosophie, Pädagogik und Geschichte der Mathematik“ (Berlin 1948) eine erste Orientierung darüber veröffentlicht. In § 1 gibt er einen Überblick über Lalouvéres Leben und Wirken. Der § 2 behandelt vor allem



die Widmung an Ludwig XIV., das Vorwort an den Leser und 2 Anhänge, von denen der zweite erst später angefügt wurde und sich mit gewissen Arbeiten Cavalieris und Torricellis beschäftigt. In § 3 wird der Inhalt der 74 Seiten umfassenden Einleitung des Werkes (Prolegomena ad circuli tetragonismum) besprochen, in der Lalouvière u. a. seine Methoden darlegt und sich mit älteren und zeitgenössischen „Quadratoren“ auseinandersetzt. Die §§ 4–8 bringen ausführliche, kommentierende und kritische Inhaltsangaben der 5 Bücher des Werkes in moderner Bezeichnung und unter Verwertung der zahlreichen Abbildungen des Originals. Am Schluß jedes dieser Paragraphen stellt Verf. den wesentlichen Inhalt und das Neue und Originale der einzelnen Bücher heraus. Der § 9 enthält eine Zusammenfassung und Würdigung des gesamten Werkes, das sich für die mathematikgeschichtliche Forschung als sehr bedeutsam herausgestellt hat. Lalouvière hat als erster den Rauminhalt und den Schwerpunkt eines einschaligen Drehungs-hyperboloids ermittelt, eine Reihe weiterer entsprechender Berechnungen an Körpern und krummlinig begrenzten Flächen durchgeführt und sich dabei als vorzüglicher Kenner der griechischen Mathematik, der Aristotelisch-scholastischen Überlieferung und der neueren Kommentatoren des Euklid, Archimedes und Apollonius sowie der großen zeitgenössischen Mathematiker erwiesen. Im Gegensatz zu manchen dieser Zeitgenossen bedient er sich des dem Archimedes entlehnten strengen Exhaustionsverfahrens und benützt unter Zuhilfenahme der Schwerpunktsätze das Hebelgesetz zur Quadratur krummlinig begrenzter Flächen. Daneben verwendet er einen Satz, der dem Cavalierischen Prinzip gleichwertig ist und benützt mit besonderer Vorliebe die damals als Quadratrixen bezeichneten Kurven. Er ist in gewissem Sinne Vollender des Archimedes, dessen heuristische Methode und Beweisverfahren er mit sicherem Gefühl für mathematische Strenge anwendet und ohne Benutzung analytischer Hilfsmittel weiterentwickelt. Er gehört hiernach zu den großen Vorläufern der Integralrechnung und verdient einen angesehenen Platz in der Mathematikgeschichte. Vielleicht findet sich auch noch sein handschriftlicher Nachlaß, den Collins 1671 erwähnt hat und der von der Royal Society gedruckt werden sollte, aber heute verschollen ist. Die vorliegende Arbeit, die eine Fülle interessanter Einzelheiten und Sätze enthält und mit einem Literaturverzeichnis, einem Namenregister und einer Liste der Fachausdrücke abschließt, ist eine wertvolle Bereicherung unserer Kenntnis der Vorgeschichte der Integralrechnung. Ihr Verfasser, der von Jos. E. Hofmann zu dieser Untersuchung angeregt wurde, stellt sich damit als ein sachlich, literarisch und methodisch gründlich geschulter Mathematikhistoriker vor.

*Eugen Löffler.*

● **Taton, R.:** *L'oeuvre mathématique de G. Desargues.* Paris: Presses universitaires de France 1951. 232 p. 800 fr.

Im 1. Teil dieser sehr sorgfältig gearbeiteten Studie gibt Verf. eine Übersicht über Leben und Werk von Desargues (hierzu vgl. auch des Verf. Documents nouveaux concernant Desargues, dies. Zbl. 43, 4). Dann geht er näher ein auf die 12 Jahre der wissenschaftlichen Produktivität mit ihren heftigen Kontroversen und berichtet über die Tätigkeit als Ingenieur (Pumpen, Zykloidenräder) und Konstrukteur von kunstvollen Treppen, Gewölben und Scheinperspektiven. Er schließt mit der bibliographischen Aufzählung der 19 Schriften, von denen die umfangreicheren *Leçons de ténèbres*, Paris 1640? noch immer verschollen sind; dazu treten 3 Werke des Kupferstechers A. de Bosse mit Wiedergabe Desarguesscher Methoden und einige Briefe von 1638/39. Der 2. Teil bezieht sich zunächst auf das Gutachten vom 4. 4. 1638 im Tangentenstreit zwischen Fermat und Descartes. Dann folgt der Text des von P. Moisy im Sammelband Vp 1209 der Pariser BN wiederentdeckten Originaldrucks des berühmten Brouillon project von 1639, der bisher nur nach einer Abschrift von Ph. de la Hire (1679) bekannt war. Ihm ist eine bisher unbekannte Note über die Einwirkung von Kräften auf Räder und die Wechselwirkung von Kräften beigegeben. Als letztes Stück erscheint die Erstfassung des Satzes über perspektive Dreiecke in der Ebene und im Raum nebst zugehörigem Beweis (1648). Alle wissenschaftlichen Einzelheiten der Texte sind sorgfältig erläutert; auch die Vorgeschichte und das Nachwirken der auftretenden Probleme wird ausreichend mitberücksichtigt. Den Abschluß bildet eine umfangreiche Bibliographie und ein Namenregister (mit belanglosen Druckfehlern bei Fremdtexten).

*Joseph Ehrenfried Hofmann.*

**Conte, Luigi:** *Huygens e la formula di Erone.* Periodico Mat., IV. Ser. 29, 281–282 (1951).

● **Wawilow, S. I.:** *Isaac Newton.* Berlin: Akademie-Verlag GmbH. 1951. VIII, 216 S. mit 32 Abb. im Text und auf Tafeln. DM 8,90.



● **Taton, R.:** *L'oeuvre scientifique de Monge*. Paris: Presses universitaires de France 1951, 441 p. 1000 fr.

In dieser groß angelegten Arbeit gibt Verf. eine auf sorgfältigem Studium der Originale beruhende vortreffliche Übersicht über das reichbewegte Leben und die vielseitige wissenschaftliche Wirksamkeit Monges. In 5 Kapiteln, die voll von historischen Neuigkeiten sind, behandelt er die Vorgeschichte und den Inhalt der Beiträge zur darstellenden Geometrie (Hauptwerk 1799), zur analytischen Geometrie (Hauptwerke 1795 u. 1802), zur Differentialgeometrie (Hauptwerk 1795), zur reinen und neueren Geometrie und Transformationstheorie (kleinere Beiträge seit 1808) und zur geometrischen Auflösung partieller Differentialgleichungen (seit 1768). Die wichtigsten Einzelheiten sind bereits in früheren Aufsätzen des Verf. (dies. Zbl. 30, 2, 34, 146, 42, 3) enthalten. Den Abschluß bildet eine Übersicht über die wissenschaftlichen Schriften, die Briefe und den Nachlaß, eine eingehende Bibliographie und ein genau führender Namenweiser. *Joseph Ehrenfried Hofmann.*

● **Ricci, Giovanni:** *La scuola matematica pisana dal 1848 al 1948*. Rivista Mat. Univ. Parma 2, 155—174 (1951).

● **Whittaker, Edmund:** *A history of the theories of aether and electricity. The classical theories. — Revised and enlarged edition*. London and Edinburgh: Thomas Nelson and Sons, Ltd., 1951. XIV, 434 p. 32 s. 6 d.

● **Kramer, Edna E.:** *The main stream of mathematics*. New York: Oxford University Press 1951. 321 p.

Das Buch enthält eine fast lückenlose Wiedergabe der wichtigsten Anekdoten über Mathematiker, wie man sie bei mathematisch Ungebildeten brauchen kann. In geistreicher Form sind Elemente der höheren Mathematik eingestreut, ferner werden die neueren physikalischen Theorien in anregender Weise angedeutet. Das Buch ist auch für Mathematiker angenehm zu lesen. *Andreas Speiser.*

● **Turnbull, H. W.:** *The great mathematicians*. — 4th ed. London: Methuen and Co., Ltd., 1951. XII, 128 p. 4s. net.

● **Sommerfeld, Arnold und Franz Krauss:** *Otto Blumenthal zum Gedächtnis*. Jahrbuch T. H. Aachen 1950, 21—26 (1951).

● **Ullrich, Egon:** *Friedrich Engel. Ein Nachruf*. Nachr. Gießener Hochschulgesellschaft 20, 139—154 (1951).

● **Gnedenko, B. V.:** *Michail Vasil'evič Ostrogradskij*. Uspechi math. Nauk 6, Nr. 5 (45), 3—25 (1951) [Russisch].

● **Crespo, Ramón:** *Ernst Schröder*. Gac. mat., Madrid 3, 211—214 (1951) [Spanisch].

● **Morgenstern, Oskar:** *Abraham Wald, 1902—1950*. Econometrica 19, 361—367 (1951).

## Grundlagen. Philosophie. Logik.

● **Ullrich, Egon:** *Weltall und Leben*. Nachr. Gießener Hochschulgesellschaft 20, 7—31 (1951).

● **Suetuna, Zyoiti:** *Über die Grundlagen der Mathematik*. J. math. Soc. Japan 3, 59—68 (1951).

Philosophische Reflexionen zur formalistischen und zur intuitionistischen Auffassung der Mathematik. *Heinrich Scholz.*

● **Bocheński, I. M.:** *Ancient formal logic*. (Studies in logic and the foundations of mathematics.) Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1951. VI, 122 p.

Dieser Abriß ist das erste Heft einer Folge von „Studies in logic and the foundations of mathematics“, für die L. E. J. Brouwer, E. W. Beth, A. Heyting als Herausgeber zeichnen. Von den für diese Folge angekündigten Studien sind inzwischen erschienen K. Dürr, *The propositional logic of Boethius* (dies. Zbl. 43, 5; ein wertvolles Komplement zu dem vorliegenden Abriß), G. H. von Wright, *An essay on modal logic* (dies. Zbl. 43, 7), und A. Robinson,



On the metamathematics of Algebra, eine Studie von ganz besonderem Interesse mit der Fragestellung: Was kann die Algebra mit Hilfe der mathematischen Logik an neuen Resultaten gewinnen? Der Abriß, über den hier kurz zu berichten ist, gehört also einer Sammlung an, die den Anteil aller Beteiligten verdient. Und er eröffnet sie mit einer höchst respektablen Leistung. — Der Verf., Schüler von J. Łukasiewicz, hat alles geleistet, was mit Bezug auf den gegenwärtigen Stand der Forschung von einem wohl unterrichteten Autor mit eigenen gründlichen Quellenstudien und einer mannigfaltig erprobten Darstellungskunst im Rahmen eines Abrisses geleistet werden kann: Konzentration auf das Wesentliche [Aristoteles, Theophrast, die megarisch-stoische Logik, Galen („Institutio logica“), Boethius] mit Benutzung des Symbolismus der mathematischen Logik als einer unübertrefflichen exakten Stenographie. Die Singularität des Aristoteles kommt sehr eindringlich heraus. Der von A. Becker entdeckte bilaterale Charakter der Möglichkeit (es ist möglich, daß  $p$ , genau dann, wenn es möglich ist, daß  $p$  nicht) beherrscht die mustermäßige Skizze der Aristotelischen Theorie der modalisierten Syllogismen. Aus der Topik ist eine beträchtliche Anzahl von Sätzen der einstelligen Prädikaten- und der Relationenlogik herausgezogen, die Aristoteles durch den Gebrauch, den er von ihnen macht, effektiv anerkennt, ohne sie zu einer Theorie zu verarbeiten. Für die Theophrastische Theorie der modalisierten Syllogismen hat Verf. in einer eigenen, sehr verdienstlichen Monographie zu zeigen vermocht, daß sie, ohne es deutlich zu sagen, den unilateralen Möglichkeitsbegriff zur Voraussetzung hat (Es ist möglich, daß  $p$ , genau dann, wenn es nicht notwendig ist, daß  $p$  nicht). Für den Bericht über die megarisch-stoische Logik hat Verf. außer einer bahnbrechenden Studie von J. Łukasiewicz das Manuskript einer demnächst erscheinenden Monographie von B. Mates, ihres genauesten gegenwärtigen Kenners, verwerten können, für Galen eine Studie von Fr. Stakelum, für Boethius Studien von K. Dürr. Es ist also wirklich das Mögliche geleistet, und in einer ungewöhnlich ansprechenden Form. Für die Forschung sind die modalitätenlogischen Abschnitte besonders hervorzuheben, da die Bemühungen um eine möglichst überzeugende Formalisierung der Modalitätenlogik z. Z. noch mitten im Flusse sind. — Im Anhang eine wohl-durchdachte Biographie der Quellen und der wichtigsten neueren Forschungen. — Addenda: p. 65 muß der Sinn von  $A \bar{x}$  bzw.  $\bar{A} x$  in 11.22–11.25 aus dem Zusammenhang erschlossen werden. p. 90 ist Ref. nicht klar geworden, inwiefern die Diodorische Implikation 15.2 stärker ist als die von einem Anonymus der megarischen Schule geforderte „strict implication“ 15.3. Zu a. 97: Es scheint Ref., daß der für die „bündigen“ Schlussfiguren vorausgesetzte stoische Konsequenzbegriff als der semantische Folgerungsbegriff charakterisiert werden sollte:  $H_2$  folgt aus  $H_1$  genau dann, wenn jedes Modell von  $H_1$  ein Modell von  $H_2$  ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn jedes Modell der leeren Prämissenmenge ein Modell ist von  $H_1 \rightarrow H_2$ , also genau dann, wenn  $H_1 \rightarrow H_2$  allgemeingültig ist.

Heinrich Scholz.

• Łukasiewicz, J.: Aristotle's syllogistic from the standpoint of modern formal logic. Oxford: Clarendon Press 1951. XI, 141 p.

Diese Aristoteles-Studie ist nicht nur ein Probestück einer mustermäßigen, von keinem Vorläufer erreichten Interpretationskunst, sondern zugleich eine ungewöhnlich anregende, originelle Einführung in die mathematische Logik und ihre nicht-trivialen Fragestellungen. Hierfür sind entscheidend die beiden letzten Kapitel; ch. IV. Aristoteles's system in symbolic form, ch. V. The problem of decision. Zur Formalisierung ist zu bemerken, daß die Aristotelische Syllogistik hier zum erstenmal weder als eine modifizierte Klassenlogik (Boolesche Algebra) noch als ein Stück einer modifizierten einstelligen Prädikatenlogik entwickelt ist, sondern — und mit Recht, wie es Ref. scheint — als eine Schöpfung sui generis, und zwar als Satz-, nicht als Regellogik; denn — und auch dies ist hier zum erstenmal klargestellt — die Aristotelischen Syllogismen sind Aussageformen, die gültigen allgemeingültige Aussageformen. — Vorausgesetzt ist die klammerfreie Symbolik des Verf. mit den Aussagevariablen  $p, q, r, \dots$ , den Termvariablen  $a, b, c, \dots$ , den aussagenlogischen Konstanten  $N$  (für „Es-ist-nicht-wahr-daß“),  $C$  (für „Wenn... so“) — die übrigen Konstanten werden in bekannter Weise definitorisch eingeführt — und den vier syllogistischen Konstanten  $A$  (für „jedes“),  $E$  (für „kein“),  $I$  (für „einige“),  $O$  (für „einige... nicht“). Die syllogistische Ausdrucksmenge ist charakterisiert als die kleinste Menge, die (1) die Aussagevariablen enthält, (2) unter der Voraussetzung, daß  $\alpha, \beta$  Termvariablen sind, die Zeichenreihen vom Typus „ $A \alpha \beta$ “ („Jedes  $\alpha$  ist ein  $\beta$ “), „ $E \alpha \beta$ “ („Kein  $\alpha$  ist ein  $\beta$ “), „ $I \alpha \beta$ “ („Einige  $\alpha$  sind  $\beta$ “), „ $O \alpha \beta$ “ („Einige  $\alpha$  sind nicht  $\beta$ “), sodann, unter der Voraussetzung, daß  $Z, Z_1, Z_2$  Ausdrücke sind, (3) mit  $Z$  auch  $NZ$ , (4) mit  $Z_1$  und  $Z_2$  auch  $CZ_1 Z_2$ . Ausdrücke seien unbestimmt angedeutet durch „ $H$ “, „ $H_1$ “, „... Die Ausdrücke vom Typus (2) sollen einfache Ausdrücke heißen, die Ausdrücke vom Typus „ $CH_1 CH_2 CH_3 \dots CH_{n-1} H_n$ “ Elementarausdrücke, unter der Voraussetzung, daß  $H_1, \dots, H_n$  einfache Ausdrücke sind. Die Ausdrücke vom Typus „ $E \alpha \beta$ “ oder „ $O \alpha \beta$ “ sollen negative einfache Ausdrücke heißen. — Es werden nun zunächst in einem axiomatisierten Aussagenkalkül mit den drei Axiomen des Verf. in  $C$  und  $N$  die aussagenlogischen Hilfssätze abgeleitet, von denen Aristoteles im axiomatisch-deduktiven Aufbau seiner Syllogistik einen intuitiven Gebrauch macht, sodann aus den vier syllogistischen Axiomen: 1.  $A a a$ , 2.  $I a a$ , 3.  $C K A b c A a b A a c$ , 4.  $C K A b c I b a I a c$ , wo  $K$  das mit Hilfe von  $C$  und  $N$  definierte Konjunktionssymbol, die 24 gültigen von den 256 möglichen Syllogismen. Es folgt, im Anschluß an Aristotelische Andeutungen, eine neue, originelle, innerlogische



Beweismethode für die Nicht-Gültigkeit der übrigen Syllogismen. Es werden in zwei Axiomen der Verwerfung zwei mögliche Syllogismen für nicht-gültig erklärt (Verf.: „verworfen“) mit einer zusätzlichen Abtrennungsregel: „Wenn  $CH_1 H_2$  beweisbar ist, und  $H_2$  zu verwerfen ist, so ist auch  $H_1$  zu verwerfen“ und einer Einsetzungsregel, die besagt, daß ein aus einem verworfenen Ausdruck durch eine Einsetzung hervorgehender Ausdruck gleichfalls zu verwerfen ist. — Geht man von den Aristotelischen Syllogismen über zur Gesamtheit der syllogistischen Ausdrücke, so stößt man auf die in ch. V diskutierte Frage: Gibt es ein allgemeines Verfahren, durch dessen Anwendung für jeden syllogistischen Ausdruck effektiv entschieden werden kann, ob er allgemeingültig und in diesem Sinne anzuerkennen oder nicht-allgemeingültig und in diesem Sinne zu verwerfen ist? Die Fragestellung stammt vom Verf. (1938), die vollständige Lösung von seinem Schüler, dem gegenwärtigen Professor der mathematischen Logik an der Universität Breslau, J. Slupecki [Travaux Soc. Sci. Lett. Wrocław, Ser. B, Nr. 9 (1948)]. Slupecki hat folgendes zeigen können: 1. Es gibt in bezug auf das vorgegebene formalisierte System der Aristotelischen Logik unendlich viele unentscheidbare syllogistische Ausdrücke. 2. Die Menge der syllogistischen Ausdrücke wird entscheidbar durch Adjungierung einer einzigen Regel der Verwerfung: Wenn  $H_1$  und  $H_2$  einfache negative Ausdrücke sind,  $H_3$  ein Elementarausdruck (zur Terminologie s. oben), so: Wenn  $CH_1 H_2$  und  $CH_2 H_3$  zu verwerfen sind, so auch  $CH_1 CH_2 H_3$ . — 2. ist eine Verschärfung von „Ex mere negativis nihil sequitur“. — Der Beweis des Entscheidbarkeitstheorems fußt auf einem Reduktionstheorem, das besagt, daß jeder syllogistische Ausdruck in einem etwas umständlich zu beschreibenden, aber wohlbestimmten Sinne deduktiv äquivalent ist mit einer Menge von Elementarausdrücken. 3. Eine zahlen-theoretische Interpretation der Aristotelischen Syllogistik von Leibniz (1679) ist ein Modell der vier syllogistischen Axiome, der beiden Axiome der Verwerfung (von denen jetzt eines beweisbar ist) und der Regel von Slupecki.

Heinrich Scholz.

Alves, Maria Teodora: Ein Satz der Metamathematik. Gaz. Mat., Lisboa 12, Nr. 49, 6—8 (1951) [Portugiesisch].

Le „théorème“ en question n'est autre que l'équivalence des deux formules:  $H_1 \cap H_2 \subset T$  et  $H_1 \cap T' \subset H_2'$  dans une algèbre de Boole. Suivent des „applications“ parfaitement triviales, même du point de vue pédagogique. Jacques Riguet.

● Robinson, Abraham: On the metamathematics of algebra. (Studies in logic and the foundations of mathematics). Amsterdam: North-Holland Publishing Company 1951. CX. 194 p. fl 18.—.

This book is concerned with the analysis and development of abstract algebra by the methods of symbolic logic, and in the reviewer's opinion should do much to convince mathematicians that symbolic logic has reached a stage where it can make a significant contribution to classical mathematics. The work on which the book is based was undertaken between September 1947 and April 1949. The present book is almost identical with a thesis submitted to London University in May 1949. — The logical system used throughout the book is a form of Hilbert's „restricted calculus of predicates“. The relevant properties of this system are developed ab initio in the first few chapters of the book. They include a generalisation and new proof of Gödel's completeness theorem — a proof that is similar to that given independently by Henkin (this Zbl. 34, 6). — The author's original contributions fall into two main classes. The first consists largely of results concerning the relationship between various types of algebraic fields. Here the principal results are: (1) Every theorem of the restricted calculus of predicates (formulated in terms of equality, addition, and multiplication) which holds for all commutative fields of characteristic 0 also holds for all other commutative fields of sufficiently high characteristic  $p$  (i. e. for  $p > p_0$ , where  $p_0$  depends on the theorem). (2) If a theorem formulated in the restricted calculus of predicates in terms of the relations of equality, order, addition, and multiplication, holds for all non-archimedean ordered fields, then it holds for all archimedean fields. (3) Any theorem formulated within the restricted calculus of predicates in terms of equality, addition and multiplication, which is true in any algebraically closed commutative field, is true in all algebraically closed commutative fields of the same characteristic. (In the case of characteristic 0 this result also follows from work of Tarski. See e. g. A decision method for elementary algebra and geometry. U. S. Air Force Project Rand R-109.) — The principal logical tool which is used in the proof of these results is the fact that if a set of formulae of the restricted calculus of predicates is contradictory then some finite subset of it is contradictory. — The contributions of the second class deal with the extension to general algebras of concepts already familiar in the well known algebraic systems such as groups, rings, and fields. These „general algebras“ considered by the author are much more general than the abstract algebras discussed by Hall and by Birkhoff. These authors consider only single valued operations whereas Robinson is concerned with arbitrary relations. In fact any set of statements of the restricted predicate calculus is called an „algebra of axioms“, provided only that it contains a relation (or strictly speaking, a relative symbol) which plays the part of a relation of equality. The concepts which are extended to general algebras include „polynomials“, „algebraic numbers“ and „ideals“. It is proved that



for general algebras these concepts have certain properties analogous to those possessed by the particular concepts of which they are generalisations, and coincide with these original concepts when the general algebra is of the original form. — The author develops his thesis clearly and fully, making it as easy to follow as the subject matter allows. The printing and lay-out are excellent and misprints are remarkably few, although because of the nature of the material one or two of these are rather confusing. e. g. p. 4, l. 21, the signs „ $\leq$ “ and „ $\geq$ “ should be interchanged. p. 41, 4. l. 10 should be strengthened by the addition of „ $(x)(y)(\exists z)[S(z, x, y)]$ “ if the statement on p. 42 that „axioms . . . constitute the axiomatic system of a group“ is to be true, and 4. l. 11 should be similarly strengthened to cover its use as part of the definition of a skew field. — p. 110 l. 23 for „ $M_v$ “ read „ $M_v$ “, l. 27 for „ $D_v$ “ read „ $D_v$ “, p. 121 l. 15 for „ $f(M')$ “ read „ $f(M'')$ “.  
Shepherdson.

**Horn, Alfred:** On sentences which are true of direct unions of algebras. J. symbolic Logic 16, 14—21 (1951).

Verf. untersucht, welche mit den Mitteln des Prädikatenkalküls der ersten Stufe ausdrückbaren Eigenschaften von Algebren sich von den Faktoralgebren auf das direkte Produkt (und umgekehrt) übertragen. Die Hauptresultate sind enthalten in Theorem 1: Gilt eine abgeschlossene pränexe Formel  $\mathfrak{A}$ , deren (aus-sagenlogischer) Kern aus Gleichungen nur mit Hilfe von Konjunktion und Alternative (ohne Negation) aufgebaut ist, für ein direktes Produkt von Algebren, so gilt  $\mathfrak{A}$  für jeden Faktor. Theorem 4: Gilt eine abgeschlossene pränexe Formel  $\mathfrak{A}$ , deren Kern eine Konjunktion von Implikationen der Form  $p_1 \wedge \dots \wedge p_n \rightarrow p$  ( $p$  kann auch „das Falsche“ sein) ist, für alle Faktoren, so gilt  $\mathfrak{A}$  auch für das direkte Produkt. Theorem 8: Eine abgeschlossene pränexe Formel  $\mathfrak{A}$ , in deren Präfix kein All-quantor vorkommt, gilt für ein Produkt aus gleichen Faktoren  $\Gamma$ , wenn  $\mathfrak{A}$  für  $\Gamma$  gilt. Ferner wird gezeigt, daß diese Kriterien in gewissem Sinne optimal sind. — Von selbständigem Interesse ist ein Lemma über Normalformen im Aussagenkalkül: Eine Formel  $P$  des Aussagenkalküls besitzt genau dann eine alternative Normalform, in der jede Konjunktion höchstens ein negiertes Glied hat, wenn die ausgezeichnete alternative Normalform  $N(P)$  (jede Konjunktion enthält alle Variablen von  $P$  genau einmal) die folgende Bedingung erfüllt: Mit je zwei möglichen Konjunktionen  $K_1$  und  $K_2$ , die in  $N(P)$  nicht vorkommen, kommt auch diejenige in  $N(P)$  nicht vor, in der genau diejenigen Variablen negiert sind, die in  $K_1$  oder in  $K_2$  negiert vorkommen.  
Gisbert Hasenjaeger.

● **Péter, Rózsa:** Rekursive Funktionen. Budapest: Akadémiai Kiadó Akademischer Verlag 1951. 206 S.

Verf. gibt eine ausführliche Darstellung der Theorie der primitiv-rekursiven und mehrfach-rekursiven Funktionen (an deren Entwicklung sie wesentlich beteiligt ist), sowie das Wichtigste zur Einführung in die Theorie der berechenbaren (allgemein-rekursiven) Funktionen. Angeschlossen sind: Ein Überblick über die Geschichte dieser Gebiete, einige Anwendungen, und eine Tabelle der gebräuchlichsten primitiv-rekursiven Funktionen. — Das als Einführung gedachte Buch darf auch als nützliches Nachschlagewerk gelten. Die Behandlung des Stoffes ist völlig elementar und nicht formalistisch, so daß die Lektüre auch nicht logistisch Vorgebildeten keine Schwierigkeiten bereitet. Die entwickelten Methoden werden durch Beispiele anschaulich gemacht. — Die ersten Paragraphen bringen die übliche Definition der primitiven Rekursion im Anschluß an Beispiele rekurrerender Berechnungen aus der Zahlentheorie, sowie die Zurückführung weiterer Rekursionstypen (Wertverlaufsrekursion, simultane Rekursion, Rekursion mit Einsetzungen in die Parameter, Rekursion über mehrere Variablen) auf das primitive Schema. — Verf. erläutert dann verschiedene Arten, die Klasse der primitiv-rekursiven Funktionen, ausgehend von geeigneten Grundfunktionen, durch Substitutionen und besonders einfache Rekursionen induktiv aufzubauen (nach R. M. Robinson, dies. Zbl. 34, 291). — Es folgt die Angabe und Diskussion berechenbarer, nicht primitiv-rekursiver Funktionen nach Ackermann und Péter. Ausführlich behandelt Verf. die Theorie der mehrfach-rekursiven (der rekursiven) Funktionen. Eine  $k$ -rekursive Funktion ist durch eine Rekursion über  $k$  Variable definiert, wobei „Einschachtelungen“ in diesen Variablen zugelassen sind. Diese Funktionen sind berechenbar, aber im allgemeinen nicht primitiv-rekursiv; sie können auch durch „transfinite“ Rekursionen erklärt und berechnet werden. — An einem Beispiel wird vorgeführt, wie Rekursionen „höherer Stufe“, in denen Funktionsfunktionen vorkommen, durch eine Gödel-Arithmetisierung auf gewöhnliche Rekursionen zurückgeführt werden können. — Die allgemein-rekursiven Funktionen führt Verf. im Anschluß an Kleene [Math. Ann. 112, 727—742 (1936), dies. Zbl. 14, 194, Trans. Amer. math. Soc. 53, 41—73 (1943)] ein und leitet verschiedene der bekannten Normaldarstellungen



(Kleene, Markov) her. Die durch Turing-Maschinen berechenbaren Funktionen werden an Hand von Beispielen diskutiert. Für eine spezielle derartige Funktion wird die Rekursivität gezeigt. — Die Anwendungen der rekursiven Funktionen und Relationen (Beziehungen zur Arithmetik, Entscheidungsprobleme, Aufzählungs- und Definierbarkeitsprobleme usw.) werden nur in Ausschnitten und referierend behandelt, entsprechend dem Rahmen, den Verf. sich gesteckt hat. Es wird die Nicht-Aufzählbarkeit der Menge der allgemein-rekursiven Schemata (genauer: der Zahlen, die über eine Arithmetisierung allgemein-rekursive Funktionen definieren) bewiesen. Im letzten Abschnitt bespricht Verf. einige Anwendungen in der Analysis und bringt u. a. den Speckerschen Beweis des Satzes von der Existenz einer rekursiv-aufzählbaren, nicht fallenden, beschränkten Folge rationaler Zahlen, die nicht rekursiv konvergiert. — Nach Meinung des Ref. ist das Buch vorzüglich geschrieben und von einer Durchsichtigkeit, die besonders die Lektüre verwickelter Partien, wie etwa der Arithmetisierungen, beträchtlich erleichtert. — Errata: S. 178, Z. 6 und S. 179, Z. 13 sollte beide Male „allgemein“ statt „primitiv“ stehen.

Werner Markwald.

Singh, R. K. P. and R. Shukla: A note on Götlind's axiom system for the calculus of propositions. Math. Student 18, 108—110 (1951).

„Unabhängigkeitsbeweis“ durch Matrizen für das Axiomensystem von Götlind (dies. Zbl. 30, 193). — Verff., denen Götlinds Arbeit allerdings nur durch ein Mathematical Review (Vol. 9, Nr. 1, (1948)) bekannt ist, haben übersehen, daß (1) in einem solchen Beweis die Matrizen auch die Grundregeln (hier: Abtrennung) „erfüllen“ müssen, (2) in Götlinds System — wie bei Hilbert-Ackermann — nicht Implikation und Alternative, sondern Negation und Alternative die Grundverknüpfungen sind, (3) von H. Rasiowa inzwischen (dies. Zbl. 40, 146) das dritte aus den übrigen Axiomen abgeleitet wurde.

Gisbert Hasenjaeger.

Götlind, Erik: A Łesniewski-Mihailescu-theorem for  $m$ -valued propositional calculi. Portugaliae Math. 10, 97—102 (1951).

The Łesniewski-Mihailescu theorem states that in the 2-valued Propositional Calculus every truth-function which contains equivalence and negation as the only connectives is a theorem if and only if the negation symbol occurs, if at all, an even number of times and every propositional variable which occurs at all occurs an even number of times. The author considers equivalence and negation functions in the  $m$ -valued Propositional Calculus such that the truth-value of  $X \sim Y$  is designated if and only if the truth-values of  $X$  and  $Y$  are both designated or both undesignated and the truth-value of  $\bar{X}$  is designated if and only if the truth-value of  $X$  is undesignated. Thus, in the sense of Kalicki (this Zbl. 39, 6) these functions are only 2-valued. It is shown that if the 2-valued equivalence and negation functions are replaced by  $m$ -valued functions satisfying the above conditions the Łesniewski-Mihailescu theorem holds even if the equivalence and negation functions are not all the same. It is also shown that if there are  $r$  designated truth-values then there are  $r^{m-r}(m-r)^r$  negation functions and  $r^{r^2+(m-r)^2}(m-r)^{2r(m-r)}$  equivalence functions satisfying the above conditions. The author concludes by showing that when  $n > 2$  there is no analogue of his theorem for certain  $n$ th. degree functions which bear some resemblance to his equivalence functions.

Alan Rose.

Griss, G. F. C.: Logic of negationless intuitionistic mathematics. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 41—49, Indagationes math. 13, 41—49 (1951).

Da die übliche Interpretation der Formel  $p \rightarrow p \vee q$  in der Logik der negationsfreien intuitionistischen Mathematik verworfen wird, erhält man diese Logik nicht etwa einfach durch Weglassen der Negation aus dem Heytingkalkül. Verf. schlägt für den Aussagenkalkül in Implikation und Konjunktion (die Alternative wird erst im Rahmen der Klassenlogik behandelt) in Anlehnung an A. Heyting (S. Ber. Preuss. Akad. Wiss., phys.-math. Kl. II, 1930, 1—17) das Axiomensystem

$$2.1. \quad p \rightarrow p \wedge q$$

$$2.11. \quad p \wedge q \rightarrow q \wedge p$$

$$2.12. \quad (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge r)$$

$$2.13. \quad (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$$

$$2.16. \quad p \wedge q \rightarrow p \quad [\text{statt Heytings } q \rightarrow (p \rightarrow q)]$$



mit den Regeln

1. 11.  $P, Q \vdash P \wedge Q$  1. 12.  $P, P \rightarrow Q \vdash Q$  1. 13.  $R, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q \wedge R$   
 vor. Die Notwendigkeit von 1. 13 wird nicht diskutiert. — Für den Klassenkalkül, der in Anlehnung an Heytings Aussagenkalkül mit Negation (das Komplement kann positiv formuliert werden) angesetzt wird, sind Prämissen, die das Auftreten von leeren Durchschnitten und Komplementen anschließen, charakteristisch. — Anwendung auf die verbandstheoretische projektive Geometrie und auf die Anfänge der negationslosen Zahlentheorie (dies. Zbl. 39, 244). *Gisbert Hasenjaeger.*

**Griss, G. F. C.: Negationless intuitionistic mathematics. III. IVa. IVb.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 193—199, 452—462, 463—471, Indagationes math. 13, 193—199, 452—462, 463—471 (1951).

(Teil II. s. dies. Zbl. 39, 244.) Diese Folge von Mitteilungen bringt des Verfs. Darstellung der negationslosen intuitionistischen Mathematik zum Abschluß. Teil III behandelt: die Unterscheidbarkeit für Mengen, Wahlfolgen und Spezies; eine positive Formulierung des zweiten Cantorschen Diagonalverfahrens für eine abzählbare Menge; reelle Zahlen als spezielle Folgen rationaler Intervalle; das Kontinuum. Teil IVa behandelt die analytische Geometrie der Ebene; Ableitung eines Systems von Sätzen, das als Basis für einen axiomatischen Aufbau dienen kann (im wesentlichen die Hilbertschen Axiome, aber mit „Bewegung“ anstatt „Kongruenz“ als Grundbegriff). Teil IVb behandelt Symmetrie und Spiegelung und gibt positive Formulierungen und Beweise für die Kontrapositionen der Kongruenzsätze.

*Gisbert Hasenjaeger.*

**Brouwer, L. E. J.: On order in the continuum, and the relation of truth to non-contradictority.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 357—358, Indagationes math. 13, 357—358 (1951).

Verf. zeigt, anknüpfend an seine Arbeit Nederl. Akad. Wet., Proc. 51, 1239—1243 (1948) die Absurdität des Prinzips der Umkehrbarkeit der Komplementbildung (d. h. aus  $A \leq C$ ,  $B \leq C$ ,  $B = C - A$  folgt  $A = C - B$ ) mit Hilfe von Beispielen aus der Theorie der (klassischen und intuitionistischen) Ordnung des Kontinuums.

*Gert H. Müller.*

**Destouches-Février, P.: Sur l'intuitionnisme et la conception strictement constructive.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 80—86, Indagationes math. 13, 80—86 (1951).

Enthält eine Skizze für einen Aufbau einer Logik vom streng konstruktiven Standpunkt aus. Die ganzen Zahlen werden noch nicht berücksichtigt; eine Negation wird nicht eingeführt. Verf. unterscheidet zwischen zu realisierenden Konstruktionen  $a, b, \dots$  und realisierten Konstruktionen.  $\vDash a$  bedeutet, daß  $a$  realisiert ist.  $a \supset b$  ist eine Konstruktion, die die Konstruktion von  $b$  auf die von  $a$  zurückführt. Ausgangspunkt sind die beiden Postulate: Wenn  $\vDash a$  und  $\vDash a \supset b$ , so  $\vDash b$ ; wenn  $\vDash a \supset b$  und  $\vDash b \supset c$ , so  $\vDash a \supset c$  und die Konvention  $\vDash a \supset a$ . Für die zu realisierenden Konstruktionen soll eine Konjunktion und eine Disjunktion erklärt sein, für die in Verbindung mit  $\vDash$  Postulate angegeben werden. Z. B. für  $\vee$ : Wenn  $\vDash a$ , so  $\vDash a \vee b$ . Wenn  $\vDash b$ , so  $\vDash a \vee b$ . Wenn  $\vDash a \supset c$  und  $\vDash b \supset c$ , so  $\vDash a \vee b \supset c$ . Hat man für eine Variable  $x$  einen Wertbereich bereits konstruiert, so kann man von einem Konstruktionstyp  $a(x)$  sprechen.  $Qx \cdot a(x)$  bedeutet die Konstruktion: Für ein beliebiges  $x$  den Konstruktionstyp  $a(x)$  durchführen. Hierfür, sowie für einen analogen Existenzquantifikator  $Px$  werden in Verbindung mit  $\vDash$  Postulate aufgestellt. Für die Aussagen über Konstruktionen (z. B.  $\vDash a$ ) werden logische Operatoren eingeführt durch Definitionen, wie

$$(\vDash a \rightarrow \vDash b) =_{df} (\vDash a \supset b), (\vDash a \& \vDash b) =_{df} \vDash (a \wedge b), \forall x \cdot \vDash a(x) =_{df} \vDash Qx \cdot a(x).$$

Es wird ein Problemenkalkül betrachtet; eine zu realisierende Konstruktion  $a$  liefert ein Problem  $Pb(a)$ , das man als gelöst betrachtet, symbolisch  $\mathfrak{P}b(a)$ , wenn  $\vDash a$ . Bedeutet  $C[a; p(x)]$ , daß man ein  $a$  konstruieren kann, für welches  $p(a)$  gilt, so läßt sich durch Real  $p(a) =_{df} \vDash C[a; p(x)]$  ein Begriff der Realisierbarkeit einführen. Der von der Variablen  $x$  abhängige Konstruktionstyp  $C[x; p(y)]$  definiert eine Art, der  $a$  genau dann angehören soll, wenn  $C[a; p(y)]$ . Für die Arten werden Verbandsoperationen erklärt.

*Hans Hermes.*

**Destouches, J. L.: Sur la mécanique classique et l'intuitionnisme.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 74—79, Indagationes math. 13, 74—79 (1951).



In der Interpretation der klassischen Punktmechanik von G. Birkhoff und J. v. Neumann (dies. Zbl. 15, 146) bilden die experimentellen Aussagen eine Boolesche Algebra. Wenn man dagegen die jeder solchen Aussage anhaftende experimentelle Ungenauigkeit berücksichtigt, so kommt man, wie im einzelnen ausgeführt wird, zur intuitionistischen Logik von Heyting. *Hans Hermes.*

## Algebra und Zahlentheorie.

### Allgemeines. Kombinatorik:

Castelnuovo, Emma: L'insegnamento delle frazioni. *Gaz. Mat.*, Lisboa 12, 49—56 (1951).

Armsen, Paul: Verallgemeinerungen von Sequenzen in Permutationen. *J. reine angew. Math.* 189, 77—99 (1951).

Ce mémoire généralise et simplifie des recherches sur les séquences dans les permutations, recherches communiquées par H. Rohrbach (ce Zbl. 29, 197) au Congrès mathématique de Tübingen 1946 (P. Armsen - H. Rohrbach, ce Zbl. 31, 147); il répond en outre à des questions posées en fin de la dite communication. — La permutation  $P(n) = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  des  $n$  éléments  $(1, 2, \dots, n)$  contient une séquence chaque fois que pour un indice  $\alpha$ ,  $1 \leq \alpha \leq n-1$ ,  $p_{\alpha+1} = p_\alpha + 1$ . L'A. généralise ce concept: le couple  $p_\alpha, p_\beta$  forme:

- (1) une séquence, si  $\beta = \alpha + 1$  et  $p_\beta = p_\alpha + 1$ , ( $1 \leq \alpha \leq n-1$ ),
- (2) une séquence cyclique, si  $\beta = \alpha + 1$  et  $p_\beta \equiv p_\alpha + 1 \pmod{n}$ ,  $1 \leq \alpha \leq n-1$ ,
- (3) une séquence circulaire, si  $\beta \equiv \alpha + 1 \pmod{n}$  et  $p_\beta = p_\alpha + 1$ ,  $1 \leq \alpha \leq n$ ,
- (4) une séquence totale, si  $\beta \equiv \alpha + 1 \pmod{n}$  et  $p_\beta \equiv p_\alpha + 1 \pmod{n}$ ,  $1 \leq \alpha \leq n$ .

Evidemment par ces définitions mêmes, chaque sorte de séquence appartient à la sorte suivante. — Lorsque  $p_\nu = \nu$ ,  $\nu$  est dit un élément propre (Eigenstelle) de  $P(n)$ . Soit maintenant pour un entier  $k \geq 0$ ,  $E_k(n)$ ,  $S_k(n)$ ,  $Z_k(n)$ ,  $K_k(n)$ ,  $T_k(n)$ , les nombres respectifs des permutations  $P(n)$  avec exactement  $k$ : éléments propres, séquences, séquences cycliques, séquences circulaires, séquences totales. Le nombre  $K_k(n)$  coïncide avec  $Z_k(n)$ , parce que à chaque séquence cyclique dans  $P(n)$  correspond une séquence circulaire dans la perm. inverse  $P^{-1}(n)$  et inversement. — Mais l'A. va plus loin. Si dans (1) on pose au lieu de  $p_{\alpha+1} = p_\alpha + 1$ ,  $p_{\alpha+1} = p_\alpha + d$ ,  $d$  entier, (6), le couple  $p_\alpha, p_{\alpha+1}$  est dit une progression  $d$ ; les séquences sont des progressions 1. Il note  ${}_dP_k(n)$  le nombre des perm. de  $n$  éléments avec exactement  $k$  progressions  $d$ . Il établit  ${}_dP_k(n) = |{}_d|P_k(n)$  pour  $d \geq 0$ , (7). Il s'ensuit qu'il suffit de considérer le cas  $d > 0$ ; mais il est utile d'y ajouter le cas  $d = 0$ , cas de l'élément propre, et le cas  $d = -1$ ,  $p_{\alpha+1} = p_\alpha - 1$ , ( $1 \leq \alpha \leq n-1$ ), (8), qui conduit encore aux nombres  $S_k(n)$ . Ainsi les six possibilités (1), (2), (3), (4), (6) avec  $d > 0$  et (8) se traitent en commun. Les questions posées en fin du communiqué de Tübingen se rapportent aux possibilités (2), (3), (4) et (8). L'A. établit pour les nombres  $E_k(n)$ ,  $S_k(n)$ ,  $Z_k(n) = K_k(n)$ ,  $T_k(n)$  et  ${}_dP_k(n)$  des expressions sous formes de sommes et de nombreuses formules de récursion, indiquant aussi leur dépendance avec les sommes approchées pour  $1/e$ . Les nombres  $E_k(n)$  sont naturellement connus depuis longtemps; ils n'interviennent dans l'exposé que comme éléments de comparaison. Les résultats sur les  $S_k(n)$  se trouvent dans le premier travail cité au début.

*S. Bays.*

Leemans, J.: Sur une méthode pour obtenir les relations entre polynômes  $s_n$  donnant la somme des  $n^e$  puissances des  $x$  premiers nombres entiers. *Mathesis* 60, 89—92 (1951).

Tomitch, Boško: Développement d'une puissance entière positive du monôme en polynôme des coefficients du binôme. *Bull. Soc. Math. Phys. Serbie* 3, 39—45 und *französ. Zusammenfassg.* 45 (1951) [Serbisch].

Dans ce travail il s'agit d'une représentation de n'importe quel degré entier positif du monôme comme somme ordonnée suivant les coefficients du binôme, le rang de ces coefficients étant égal au degré du monôme, d'après la formule  $x_n = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu+1}^n \binom{x+\nu}{n}$ . On exprime les coefficients de Stirling du second ordre au moyen des coefficients  $A_\nu^n$ . De même on obtient une expression générale pour les polynômes de Bernoulli:

$$B_n(x) = \sum_{\nu=0}^n A_{\nu+1}^n \binom{x+\nu}{n+1}.$$

A l'aide de cette forme on obtient la somme des  $n$ -ièmes puissances des nombres entiers positifs. *Autoreferat.*



# Lineare Algebra. Polynome. Invariantentheorie:

**Drazin, M. P., J. W. Dungey and K. W. Gruenberg:** Some theorems on commutative matrices. J. London math. Soc. 26, 221—228 (1951).

Verff. geben ganz elementare, nur von den einfachsten Grundbegriffen der Theorie Gebrauch machende Beweise für manche wichtigen Sätze der Matrixentheorie, die größtenteils von N. H. McCoy (dies. Zbl. 9, 99, 15, 55) herrühren, teils aber neu sind. Große lateinische Buchstaben bezeichnen  $n$ -reihige quadratische Matrizen im komplexen Zahlkörper. Der erste Satz besagt, daß für die Matrizen  $A_1, \dots, A_m$  folgende drei Bedingungen äquivalent sind: (I) Jede Matrix von der Form  $p(A_1, \dots, A_m)(A_i A_j - A_j A_i)$  ist nilpotent, wobei  $p(x_1, \dots, x_m)$  ein beliebiges skalares Polynom der untereinander nicht vertauschbaren Unbestimmten  $x_1, \dots, x_m$  bezeichnet. (II) Es gibt eine unitäre Matrix  $P$ , so daß die Matrizen  $P^{-1} A_i P$  ( $i = 1, \dots, m$ ) dreieckig sind. (III) Die Eigenwerte der Matrix  $R(A_1, \dots, A_m)$  sind bei passender Numerierung der Eigenwerte  $\alpha_k^{(i)}$  der Matrizen  $A_i$  die Zahlen  $R(\alpha_k^{(1)}, \dots, \alpha_k^{(m)})$  ( $k = 1, \dots, n$ ), wobei  $R$  eine beliebige (skalare) ganze rationale Funktion bezeichnet. — Es wird gezeigt, daß für normale Matrizen  $A_i$  jede der Bedingungen (I) — (III) mit der Vertauschbarkeit der  $A_i$  äquivalent ist. — Der zweite Satz lautet: Dafür, daß eine der Bedingungen (I) — (III) gültig sei, ist hinreichend, daß jede der  $A_i$  mit jeder Kommutatormatrix  $A_j A_k - A_k A_j$  vertauschbar ist. Daraus folgt: Sind beide Matrizen  $A, B$  mit  $AB - BA$  vertauschbar und besitzt  $A$  mindestens  $r$  verschiedene Eigenwerte, dann gibt es ein skalares Polynom  $f(x)$ , so daß die Matrix  $B - f(A)$  mindestens  $r$  linear unabhängige Eigenvektoren mit Eigenwert Null besitzt. Dies ist eine schöne neue Verallgemeinerung eines bekannten Satzes über Matrizen ohne mehrfache Eigenwerte. Im dritten Satz werden die obigen Resultate auf den Fall spezialisiert, daß die Matrizen  $A_i$  miteinander vertauschbar sind und auf Diagonalform gebracht werden können. Tibor Szele.

**Ostrowski, A. M. and Olga Taussky:** On the variation of the determinant of a positive definite matrix. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 383—385, Indagationes math. 13, 383—385 (1951).

Let  $R$  be an  $n \times n$  matrix of complex numbers, such that for every vector  $x$ , the number  $x^* R x$  lies in the closed lower half plane. If  $H$  is a hermitian matrix, none of whose eigenvalues is negative, it is proved that  $|\det(H + i R)| \geq \det H$ . Corollary: If  $K$  is hermitian, then  $|\det(H + i K)| \geq \det H$ . In particular, if  $S$  is real and positive semi-definite, then  $\det(S + A) \geq \det S$  if  $A$  is anti-symmetric. In each of the corollaries, if we have the additional hypothesis that  $H$  and  $S$  are positive definite, strict inequality holds unless  $K[A]$  is the zero matrix.

J. L. Brenner.

**Stein, P.:** A note on inequalities for the norm of a matrix. Amer. math. Monthly 58, 558—559 (1951).

$A$  sei eine quadratische Matrix mit reellen Elementen, und  $B = \frac{1}{2}(A + A')$  sei die zugeordnete symmetrische Matrix. Verf. beweist eine Ungleichung, die die Norm und Spur von  $A^{-1}$  mit dem maximalen und minimalen Eigenwert von  $B$  koppelt. Sie lautet, wenn  $m, M$  die betreffenden Eigenwerte sind, für eine nicht singuläre Matrix  $A$ :  $m N^2(A^{-1}) \leq \text{Sp}(A^{-1}) \leq M N^2(A^{-1})$ . Enthält  $A$  komplexe Elemente, so lautet die entsprechende Ungleichung bezüglich  $B = \frac{1}{2}(A + A')$ :  $m N^2(A^{-1}) \leq \text{Re}(\text{Sp}(A^{-1})) \leq M N^2(A^{-1})$ . Hans-Joachim Kowalsky.

**Schoenberg, I. J. and Anne Whitney:** A theorem on polygons in  $n$  dimensions with applications to variation-diminishing and cyclic variation-diminishing linear transformations. Compositio math. 9, 141—160 (1951).

Es bezeichne  $v(y)$  die Zeichenwechsel in der Folge  $y_1, \dots, y_m$ . Liegt die lineare Transformation  $T: y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vor, und ist  $r$  der Rang der Matrix  $(a_{ik})$ , so gilt  $\sup_{(x)} v(y) \geq r - 1$ . Deutet man  $A_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$  als Punkt im  $E^n$ , so ist  $A_1 A_2 \dots A_m = \Pi$  ein Polygon und  $v(y)$  gibt an, wie oft  $\Pi$  die Hyper-ebene  $x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = 0$  ( $x_1, \dots, x_n$  sind Koeffizienten) schneidet. Der grundlegende Satz ist: Notwendig und hinreichend dafür, daß  $v(y) \leq r - 1$  für alle  $(x)$ , ist, daß keine Spalte der Matrix  $\mathfrak{A}^{(r)}$  Elemente verschiedenen Vorzeichens enthält. Dabei ist allgemein  $\mathfrak{A}^{(j)}$ ,  $j \leq r$ , die Matrix, deren Elemente die  $j$ -reihigen



Unterdeterminanten von  $(a_{ik})$  sind, und zwar so angeordnet, daß alle Unterdeterminanten, welche aus denselben  $j$  Spalten von  $(a_{ik})$  gebildet sind, auch in  $\mathfrak{A}^{(j)}$  in derselben Spalte stehen, und gleiches für die Zeilen gilt. — Aus obigem Satz wird das Ergebnis von Th. Motzkin über Zeichenwechsel vermindernde Transformationen  $[v(y) \leq v(x)$  für alle  $x]$  hergeleitet:  $T$  ist dann und nur dann zeichenwechselvermindernd, wenn keine der Matrizen  $(a_{ik})$ ,  $\mathfrak{A}^{(2)}, \dots, \mathfrak{A}^{(r-1)}$  und wenn keine Spalte von  $\mathfrak{A}^{(r)}$  Elemente verschiedenen Vorzeichens besitzt. — Schließlich wird eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angegeben, daß  $T$  im zyklischen Sinne zeichenwechselvermindernd ist:  $v_c(y) \leq v_c(x)$  für alle  $x$ . Dabei ist  $v_c(y)$  die Zahl der Zeichenwechsel in der zyklisch angeordneten Folge  $y_1, \dots, y_m$ .  
*Georg Aumann.*

**Goddard, L. S.:** On positive definite quadratic forms. Publ. math., Debrecen 2, 46—47 (1951).

Ein kurzer, sehr eleganter Beweis für das Determinantenkriterium der definiten quadratischen Formen.  
*Tibor Szele.*

**Palamà, Giuseppe:** Sistemi indeterminati impossibili. Boll. Un. mat. Ital., III, 6, 113—117 (1951).

Verf. untersucht in Spezialfällen die Lösbarkeit des (unbestimmten) Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n y_i^k, \quad k = m, m+1, \dots, m+n-1,$$

in reellen  $x_i, y_i$  ( $x_i, y_i \geq 0$  bei passender Numerierung). Es wird die Unmöglichkeit der nichttrivialen simultanen Lösbarkeit im Fall  $m=2, n$  beliebig, sowie im Fall  $m=3, n=2$  nachgewiesen. Die Beweise verlaufen elementar und beruhen auf den Umrechnungsformeln zwischen Potenzsummen und elementarsymmetrischen Grundpolynomen bez. der  $x_i$  bzw.  $y_i$ . Sei z. B.  $m=n=2$ , ferner  $S_k = x_1^k + x_2^k$ ,  $T_k = y_1^k + y_2^k$ ,  $A_k, B_k$  die entsprechenden elementarsymmetrischen Polynome, so folgt aus  $S_2 = T_2$ ,  $S_3 = T_3$  und aus  $B_1^2 - 2 B_2 = A_1^2 - 2 A_2$ ,  $B_1^3 - 3 B_1 B_2 = A_1^3 - 3 A_1 A_2$  durch einfache Rechnung  $F_2 = A_2 - \frac{A_1}{2!} h + \frac{1}{3!} h^2 = 0$ , wobei etwa  $T_1 = S_1 + h$ ,  $h > 0$ , gesetzt sei ( $h=0$ , d. h.  $S_1 = T_1$  neben  $S_2 = T_2$ ,  $S_3 = T_3$  ist unmöglich). Wegen  $-A_1 = S_1$  ist aber  $F_2 > 0$ . Für  $m=2, n$  beliebig ergibt sich allgemein  $F_n = A_n - \frac{1}{2!} A_{n-1} h + \frac{1}{3!} A_{n-2} h^2 - \dots \pm \frac{1}{(n+1)!} h^n = 0$ .

Für  $m=2, n=3$  gibt schließlich Verf. noch eine numerische reelle Lösung von  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^k = \sum_{i=1}^{n+1} y_i^k$ ,  $k = m, \dots, m+n-1$ , nämlich:  $(5\sqrt{6} + 15)^k + (\sqrt{6} + 20)^k + (\sqrt{6} + 10)^k + (-3\sqrt{6} + 5)^k = (5\sqrt{6} + 10)^k + (3\sqrt{6} + 20)^k + (-\sqrt{6} + 5)^k + (-\sqrt{6} + 15)^k$ , ( $k = 2, 3, 4$ ), in der jedoch genau ein Glied und zwar  $(-3\sqrt{6} + 5)$  negativ, also die Bedingung  $x_i, y_i \geq 0$  verletzt ist. [Anm. d. Ref.: Unter Weglassung von  $x_i, y_i \leq 0$  ist aber bereits auch  $x_1^3 + x_2^3 = y_1^3 + y_2^3 = a$ ,  $x_1^3 - x_2^3 = y_1^3 - y_2^3 = b$  (d. h.  $m=n=2$ ) in nichttrivialen  $x_i > 0, y_i > 0$  reell lösbar, und zwar für beliebig gegebene  $a > 0, b > 0$ , wenn  $b^2 < a^3$  ist. Elimination von  $x_1$  liefert  $x_2$  als Lösung der Gleichung 6. Grades  $P(z) = (b + z^3)^2 - (a - z^2)^3 = 0$ , die nach der Cartesischen Zeichenregel eine positive Nullstelle besitzt, womit auch  $0 < a - x_2^3 = x_1^3$ , also  $x_1 > 0$  wählbar ist.  $y_2$  ist Nullstelle von  $Q(z) = P(z) - 4b z^3$ , und  $Q$  besitzt wegen  $Q(x_2) = -4b x_2^3 < 0$  eine positive Nullstelle  $> x_2$ . Ref. hat daher den Zweck des obigen Zahlenbeispiels nicht zu erkennen vermocht].

*Hans-Heinrich Ostmann.*

**Tallqvist, Hj.:** Die Divisibilität der Polynome. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 15, Nr. 6, 58 S. (1951).

This paper is an exposition on the divisibility of a polynomial  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$  with real coefficients. Conditions are found on the



coefficients for: (1) divisibility of the polynomial by  $x - r$ ; (2) common factors of two polynomials of degrees two up to and including six; (3) equal zeros; (4) one or three real zeros (Cardan's formulas) of a cubic polynomial; (5) four real, two pairs of conjugate imaginary, or two real and two conjugate imaginary zeros (Ferrari's and Lagrange's formulas) of a quartic polynomial.

*Evelyn Frank.*

**Venkataraman, C. S.: On the zeros of a certain complex polynomial.** Math. Student 18, 145—147 (1951).

Die Nullstellen des Polynoms

$$\frac{1}{r!} + \frac{z}{(r+1)!} + \cdots + \frac{z^n}{(r+n)!}$$

liegen im Kreisring  $r+1 \leq |z| \leq r+n$ . Dieser Satz ist eine einfache Folgerung eines aus dem Eneström-Kekeyaschen Satz von Hurwitz erhaltenen Satzes über Polynome mit positiven Koeffizienten. Verf. scheint diesen Satz nicht zu kennen.

*Gyula Sz.-Nagy.*

**Permutti, Rodolfo: Determinazione di equazioni algebriche a gruppo di Galois supersolubile.** Giorn. Mat. Battaglini 80, 159—185 (1951).

Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  möge hypermetazyklisch heißen, wenn in einer (und damit in jeder) Hauptreihe  $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \supset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$  von  $\mathfrak{G}$  der Index von  $\mathfrak{G}_i$  in  $\mathfrak{G}_{i-1}$  stets eine Primzahl  $p_i$  ist ( $i = 1, \dots, n$ ). Verf. betrachtet nun bei beliebig vorgegebenen Primzahlen  $p_i$  über einem Körper  $\mathbb{K}$ , der für  $i = 1, \dots, n$  die  $p_i$ -ten Einheitswurzeln enthält, und dessen Charakteristik zu  $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n$  teilerfremd ist, ein separables, metazyklisches Polynom  $f(x)$  mit der Eigenschaft, daß jede Nullstelle  $\alpha$  von  $f(x)$  eine Darstellung der speziellen Form

$$(1) \quad \alpha = \sqrt[p_n]{a_n + \sqrt[p_{n-1}]{a_{n-1} + \sqrt[p_{n-2}]{a_{n-2} + \cdots + \sqrt[p_1]{a_1}}} \quad (a_n, a_{n-1}, \dots, a_1 \in \mathbb{K})$$

besitzt. Er gewinnt vor allem den Hauptsatz: Der zu  $f(x)$  gehörige Normalkörper hat dann und nur dann über  $\mathbb{K}$  eine hypermetazyklische Gruppe, wenn entweder  $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = p$  oder  $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = p$  und  $p_1$  ein Teiler von  $p-1$  ist. Beim Beweis werden für  $n=2$  und  $n=3$  die Gruppen  $\mathfrak{G}$ , die zu Polynomen  $f(x)$  mit Nullstellen des Typus (1) gehören, explizit konstruiert. Es ist leicht zu sehen, daß eine entsprechende Konstruktion auch für beliebiges  $n$  möglich wäre, doch geht Verf. bewußt nicht näher darauf ein, da er für seine Zwecke mit der Betrachtung der allgemeinen Fälle  $n=2, 3$  auskommt. An sich interessant ist der folgende rein gruppentheoretische Hilfssatz, den Verf. an die Spitze seiner Untersuchungen stellt: Die Gruppe  $\mathfrak{G}$  ist sicher hypermetazyklisch, wenn ihre Ordnung die Gestalt  $p_1 p^\alpha$  besitzt, wobei  $p_1$  ein Teiler von  $p-1$  ist.

*Wolfgang Krull.*

### Gruppentheorie:

**Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: Homology theories for multiplicative systems.** Trans. Amer. math. Soc. 71, 294—330 (1951).

Bekanntlich sind die Kohomologiegruppen  $H^q(\Pi, G)$  einer Gruppe  $\Pi$  (bei trivialer Operationsweise von  $\Pi$  auf die Koeffizientengruppe  $G$ ) die gewöhnlichen Kohomologiegruppen eines der Gruppe  $\Pi$  zugeordneten abstrakten Komplexes  $A^0(\Pi)$ . In ähnlicher Weise treten in neueren Untersuchungen der Verff. (dies. Zbl. 37, 395 u. 39, 190) für abelsche Gruppen  $\Pi$  zugeordnete „kubische“ Komplexe  $Q(\Pi)$  und „abelsche“ Komplexe  $A(\Pi)$  auf, die für diese abelschen Gruppen eine besondere, von der durch  $A^0(\Pi)$  gegebenen verschiedene Homologietheorie liefern. Dies führte Verf. zu der These, daß für jede Klasse von algebraischen Systemen eine eigene Homologietheorie existiert. In der vorliegenden Arbeit werden allgemeine multiplikative Systeme  $M$  mit einer binären Operation  $m_1 \cdot m_2$  ( $m_1, m_2 \in M$ ) und einem Einselement 1 betrachtet. Ein Homomorphismus  $\alpha: M \rightarrow N$  ist durch die Forderungen  $\alpha(1) = 1$  und  $\alpha(m_1 m_2) = \alpha(m_1) \alpha(m_2)$  charakterisiert. Ein freies System  $F$  ist ein multiplikatives System  $F$  mit einer vorgegebenen Folge von Elementen  $g_1, g_2, \dots$  mit  $g_i \neq 1$ , so daß für jede Folge  $a_1, a_2, \dots$  aus  $F$  ein und nur ein Homomorphismus  $\alpha: F \rightarrow F$  mit  $\alpha g_i = a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) existiert. Die durch  $F$  bestimmte Kategorie  $\mathfrak{M}(F)$  von multiplikativen Systemen umfaßt alle Systeme  $M$  mit der Eigenschaft, daß für jede



Folge  $m_1, m_2, \dots$  aus  $M$  ein und nur ein Homomorphismus  $\beta: F \rightarrow M$  mit  $\beta(g_i) = m_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) existiert. Die freie (abelsche) Gruppe  $F_G (F_{GA})$  mit abzählbar vielen Erzeugenden ist ein freies System in diesem Sinne und  $\mathfrak{M}(F_G) (\mathfrak{M}(F_{GA}))$  umfaßt alle (abelschen) Gruppen. Ferner läßt sich leicht ein universelles freies System  $F_I$  konstruieren, derart, daß  $\mathfrak{M}(F_I)$  alle multiplikativen Systeme umfaßt. Durch geeignete Kongruenzrelationen in  $F_I$  entstehen weiter aus  $F_I$  ein freies assoziatives bzw. kommutatives System  $F_A$  bzw.  $F_C$ , deren Kategorie alle assoziativen bzw. kommutativen Systeme umfaßt. Alle diese freien Systeme genügen der Endlichkeitsbedingung: Zu jedem  $x \in F$  existiert eine natürliche Zahl  $n$ , so daß  $\alpha x = x$  für den Homomorphismus  $\alpha: F \rightarrow F$ , der durch  $\alpha g_i = g_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\alpha g_j = 1$  ( $j > n$ ) gegeben ist. Es werden weiterhin nur solche freien Systeme zugelassen, die dieser Endlichkeitsbedingung genügen. Eine Konstruktion  $K$  auf der Kategorie  $\mathfrak{M}(F)$  ist eine Vorschrift, die jedem  $M \in \mathfrak{M}(F)$  einen abstrakten Zellkomplex  $K(M)$  zuordnet mit den Eigenschaften: 1. Die Dimension der Zellen von  $K(M)$  ist  $\geq 1$ . 2. Die  $q$ -Zellen von  $K(M)$  zerfallen in Typen. Die Einteilung in Typen ist unabhängig von  $M$ . 3. Zu jedem Typ  $t$  von  $q$ -Zellen gehört eine ganze Zahl  $r = r(t) \geq 0$ . Die  $q$ -Zellen vom Typ  $t$  in  $K(M)$  sind die  $r$ -Tupel  $[x_1, \dots, x_r]_t$  mit  $x_1, \dots, x_r \in M$ . 4. Für jeden Homomorphismus  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  liefert die Definition  $K(\alpha) [x_1, \dots, x_r]_t = [\alpha x_1, \dots, \alpha x_r]_t$  eine randtreue Abbildung  $K(\alpha): K(M_1) \rightarrow K(M_2)$ . Eine Konstruktion  $K$  wird vergrößert, indem man in der nullten Dimension als Kettengruppe die Gruppe  $H(M)$  hinzunimmt, die definiert ist als die Faktorgruppe  $C(M)/B(M)$  der freien abelschen Gruppe  $C(M)$  mit den Erzeugenden  $\{x\}$  ( $x \in M$ ) nach der Untergruppe  $B(M)$ , die von allen  $\{y\} - \{xy\} + \{x\}$  ( $x, y \in M$ ) erzeugt wird. Die Randdefinition in der ersten Dimension muß wieder bei jedem Homomorphismus  $\alpha: M_1 \rightarrow M_2$  sich in natürlicher Weise von  $K(M_1)$  nach  $K(M_2)$  übertragen. Eine vergrößerte Konstruktion  $K$  auf  $\mathfrak{M}(F)$  heißt azyklisch, wenn alle Homologiegruppen  $H_q(\bar{K}(F)) = 0$  ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ) sind. Dann besagt der Hauptsatz: Für jedes freie System  $F$  existiert auf  $\mathfrak{M}(F)$  eine azyklische vergrößerte Konstruktion  $K$ , und irgendzwei derartige Konstruktionen liefern isomorphe Homologie- und Kohomologiegruppen für alle  $M \in \mathfrak{M}(F)$ . Man kann daher von der frei-azyklischen Homologietheorie der Systeme  $M \in \mathfrak{M}(F)$  sprechen. — Ein Element  $x \in F$  heißt „generic“, wenn es als Produkt von lauter verschiedenen  $g_i$  dargestellt werden kann. Eine Zelle  $[x_1, \dots, x_r]_t \in K(F)$  heißt generic, wenn die  $x_i$  generic sind und insgesamt kein  $g_i$  mehrfach vorkommt. Von der Konstruktion  $K$  wird jetzt noch verlangt, daß die generic Zellen einen Unterkomplex  $K(F, *) \subset K(F)$  bilden, und von der vergrößerten Konstruktion  $\bar{K}$ , daß der Rand einer 1-Zelle aus  $K(F, *)$  zu der Untergruppe  $H(F, *) \subset H(F)$  gehört, die durch die  $\{x\} + B(F)$  ( $x$  generic aus  $F$ ) erzeugt wird. Eine derartige generic Konstruktion  $K$  heißt azyklisch, wenn  $H_q(\bar{K}(F, *)) = 0$  für alle  $q$  ist. Es gilt für sie wieder der Hauptsatz. Man erhält so die generic-azyklische Homologietheorie der Systeme  $M \in \mathfrak{M}(F)$ . Beide Arten von Konstruktionen werden dem gemeinsamen Oberbegriff der  $\Phi$ -Konstruktionen untergeordnet, für die ebenfalls der Hauptsatz gilt. — Die obengenannte Konstruktion  $A^0$  läßt sich auf der Kategorie  $\mathfrak{M}(F_A)$  aller assoziativen Systeme durchführen, die zugehörige vergrößerte Konstruktion  $A^0$  ist frei- und generic-azyklisch. Die kubische Konstruktion  $Q$  ist auf der Kategorie  $\mathfrak{M}_{AC}$  der assoziativen und kommutativen Systeme erklärt, aber erst generic-azyklisch modulo einer gewissen Unterkonstruktion. Aber auch auf diese Fälle wird der Hauptsatz erweitert. Die ausführliche Untersuchung der „abelschen“ Konstruktion  $A$  auf  $\mathfrak{M}_{AC}$  wird einer späteren Arbeit vorbehalten. Zum Schluß werden Systeme ohne Einselement untersucht.

Ewald Burger.

Devidé, Vladimir: Einige Beziehungen der Kommutativitäts- und der Assoziativitätseigenschaft. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 6, 33–42 und kroatische Zusammenfassg. 43–48 (1951).

Rules (or „identical relations“)  $(Q) u(x, y, \dots) = v(x, y, \dots)$  in a groupoid  $S$  (i. e. a system closed under a binary operation) are investigated under the restrictive assumptions: (1)  $S$  has a unit element, and at least one other element as well; (2) no variable  $x, y, \dots$  occurs more than once in the word  $u$  or in the word  $v$ ; it is also assumed that  $(Q)$  is not trivial, that is to say that  $u$  and  $v$  are not the same word in the same variables. Examples of rules satisfying (2) are the associative law  $(\alpha)$  and the commutative law  $(\kappa)$ . These two together imply every rule  $(Q)$ . The main results of the paper are that if  $(\alpha)$  does not imply  $(Q)$  then  $(Q)$  implies  $(\kappa)$ , and if  $(\kappa)$  does not imply  $(Q)$  then  $(Q)$  implies  $(\alpha)$ . Also of  $(\chi)$ ,  $(z)$  at most one by itself implies  $(Q)$ . Hence if  $(\chi)$  implies  $(Q)$  then  $(Q)$  implies  $(\alpha)$ , and if  $(z)$  implies  $(Q)$  then  $(Q)$  implies  $(\kappa)$ . Here „the rule  $(\xi)$  implies the rule  $(\eta)$ “ can either mean that  $(\eta)$  is obtained from  $(\xi)$  by certain manipulations of the rules (such as substitution), or equivalently that whenever  $(\xi)$  is satisfied in a groupoid  $S$  then  $(\eta)$  is also satisfied in  $S$ . Various different formulations are given to the main results, and a new axiom system for groups is obtained as a corollary.

Bernhard H. Neumann.



Green, J. A.: On the structure of semigroups. *Ann. of Math.*, II. Ser. 54, 163—172 (1951).

$S$  étant un demi-groupe (ensemble muni d'une opération binaire associative), un idéal à gauche, ou à droite, ou bilatère, est un sous-ensemble  $I$  tel que  $SI \subseteq I$ , ou  $IS \subseteq I$ , ou  $SIS \cup SI \cup IS \subseteq I$ . En particulier  $(a)_g = a \cup Sa$ ,  $(a)_d = a \cup aS$ ,  $(a)_b = a \cup Sa \cup aS$ , sont respectivement les idéaux principaux à gauche, à droite, ou bilatère, dont  $a \in S$  est un générateur. Appelons  $\mathfrak{M}_g$ ,  $\mathfrak{M}_d$ ,  $\mathfrak{M}_b$  la condition minimale pour les idéaux principaux à gauche, à droite, ou bilatères, et  $\mathfrak{M}_s$  la condition exprimant que tout élément est d'ordre fini. L'A. établit d'abord:  $\mathfrak{M}_g \& \mathfrak{M}_d \rightarrow \mathfrak{M}_b$ . Il considère ensuite les équivalences  $G$ ,  $D$ ,  $B$  définies par:  $x \equiv y (G) \leftrightarrow (x)_g = (y)_g$ ;  $x \equiv y (D) \leftrightarrow (x)_d = (y)_d$ ;  $x \equiv y (B) \leftrightarrow (x)_b = (y)_b$ . Il démontre que les équivalences  $G$  et  $D$  sont permutable et que leur produit transitif  $P$  est une équivalence plus fine que  $B$ , ou égale, et qu'on a l'égalité  $P = B$  si la condition  $\mathfrak{M}_s$ , ou si les conditions  $\mathfrak{M}_g$  &  $\mathfrak{M}_d$ , sont remplies. Les autres résultats utilisent la notion d'élément simple, et la notion d'élément régulier.  $a \in S$  est simple si on peut trouver  $x$  et  $y$  tels que  $xay = a$ ,  $x \equiv a (B)$ ,  $y \equiv a (B)$ . Un élément  $a$  régulier (c. à d. tel que  $a = aza$ ) est simple. L'A. démontre la réciproque si la condition  $\mathfrak{M}_s$ , ou les conditions  $\mathfrak{M}_g$  &  $\mathfrak{M}_d$ , sont remplies. Ces conditions entraînent aussi que tout élément  $u \in S$  possède une puissance  $u^k$  régulière. Signalements encore une propriété intéressante:  $F$  étant une classe modulo  $B$ , c. à d. l'ensemble des générateurs d'un idéal principal bilatère  $I$ ,  $K = I - F$  est un groupe lorsque  $K$  est multiplicativement fermé.

Léonce Lesieur.

Loonstra, F.: The classes of partially ordered groups. *Compositio math.* 9, 130—140 (1951).

Sei  $G$  eine kommutative  $l$ -Gruppe (lattice-ordered gr.). Die Menge  $G^\pm$  aller mit 0 vergleichbaren Elemente ( $a \lesseqgtr 0$ ) läßt sich in Klassen einteilen:  $a \in G^\pm$ ,  $b \in G^\pm$  haben den gleichen Rang ( $a \sim b$ ), wenn es zu jedem  $\left\{ \begin{smallmatrix} n \cdot a \\ m' \cdot b \end{smallmatrix} \right\}$  ein  $\left\{ \begin{smallmatrix} m \\ n' \end{smallmatrix} \right\}$  mit  $\left\{ \begin{smallmatrix} m \cdot b > n \cdot a \\ n' \cdot a > m' \cdot b \end{smallmatrix} \right\}$  gibt;  $a$  hat einen kleineren Rang als  $b$  ( $a < b$ ), wenn es ein  $m_0$  mit  $n \cdot a < m_0 \cdot b$  für alle  $n$  gibt;  $a$  und  $b$  haben nicht vergleichbare Ränge, wenn weder  $a \sim b$  noch  $a < b$  noch  $a > b$  gilt. Die Klasse  $A$  enthält genau alle Elemente gleichen Ranges. Zwischen den Klassen besteht eine Ordnungsrelation  $A > B$  genau dann, wenn  $a > b$  für  $a \in A$ ,  $b \in B$  gilt usw. — Definiert man in  $G$   $|a|$  durch  $|a| = a \cup -a$  [vgl. G. Birkhoff, *Annals of Math.* II. Ser. 43, 298—331 (1942)], so bildet die Menge der  $x \in G$  mit  $|x| \leq n \cdot |a|$  ein Ideal  $I(a)$ . Die Ideale  $I(a)$  von  $G$  bilden einen distributiven Verband. Verf. verknüpft die Ideale  $I(a)$  mit den Klassen von  $G^\pm$  und erhält u. a. die folgenden Aussagen: 1.  $a, b \in G$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ :  $a$  und  $b$  haben genau dann gleichen Rang, wenn  $I(a) = I(b)$  ist. 2. Aus  $a < b$  folgt  $I(a) \subset I(b)$ . 3. Der Klassenmenge von  $G^\pm$  entspricht eineindeutig die Menge der  $I$ -Ideale von  $G$ . Die Zuordnung erhält die Ordnung in einer Richtung, d. h. aus  $A < B$  folgt  $I(a) \subset I(b)$  mit  $a \in A$ ,  $b \in B$ .

Georg Reichel.

Gluškov, V. M.: Über lokal nilpotente Gruppen ohne Torsion. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 80, 157—160 (1951) [Russisch].

The author announces, without proofs, nineteen theorems on the structure of locally nilpotent groups without torsion, in which ascending and descending chains of serving subgroups or serving normal subgroups (Servanz-Untergruppen or -Normalteiler in the sense of Prüfer) terminate after a finite number of terms. The aim of the theorems is to establish links between such groups on the one hand and nilpotent groups of finite special rank (see A. I. Mal'cev, this Zbl. 37, 150) and locally nilpotent extensions of abelian groups by means of groups of finite special rank on the other hand. The theorems require a heavy apparatus of definitions, and we think it better to postpone a detailed account until the full text with proofs becomes available.

Kurt A. Hirsch.



**Higman, Graham:** Almost free groups. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 284—290 (1951).

In this paper the author answers a question raised by Kurosh in the concluding section of his book *Teoriya Grupp* (Moscow-Leningrad 1944): whether there exists a group which is not free but all of whose countable subgroups are free: He constructs such a group, of order  $\aleph_1$ . More generally the author calls a group of order  $\alpha$  „almost free“ if every subgroup generated by fewer than  $\alpha$  elements is free. It is well known that there are almost free groups of order  $\aleph_0$  (i. e. locally free groups) which are not free, and the author's example shows that the same is true for order  $\aleph_1$ . On the other hand he shows that if  $\alpha$  is the limit of an ascending countable sequence of infinite cardinals  $\alpha_1, \alpha_2, \dots$  with  $2^{\alpha_i} \leq \alpha_{i+1}$ , then every almost free group of order  $\alpha$  is free. In addition to the construction of the example and to the result already quoted the paper contains a number of interesting results on locally free groups. We quote only one: The following three properties of a locally free group  $G$  are equivalent: (a) Every countable subgroup of  $G$  is free. (b) Every infinite properly ascending sequence of finitely generated subgroups of  $G$  contains a subgroup (and then, of course, infinitely many) which is contained in a proper free factor of its successor. (c) Every finitely generated subgroup  $A$  of  $G$  is contained in a finitely generated subgroup  $B$  of  $G$  which is a free factor of every finitely generated subgroup  $C$  of  $G$  which contains  $B$ . A group  $B$  with this last-named property is called „basic“, and basic subgroups of locally free groups play an important rôle in the theory. — For a solution (by quite different methods) of the corresponding problem for abelian groups, viz. the existence of a group which is not free abelian but all of whose countable subgroups are free abelian, cf. E. Specker, *Portugaliae Math.* 9, 131—140 (1950).  
Bernhard H. Neumann.

**Neumann, Hanna:** On an amalgam of abelian groups. J. London math. Soc. 26, 228—232 (1951).

Verf. betrachtet einige Abelsche Untergruppen  $A_i$  einer beliebigen Gruppe  $G$ . Dabei kann der Durchschnitt  $A_{i,j}$  von  $A_i$  und  $A_j$  beliebig sein. Die Vereinigungsmenge  $A$  sämtlicher Elemente der betrachteten Untergruppen  $A_i$  heißt nach Baer (dies. Zbl. 33, 345) das Amalgam der  $A_i$ . Das wichtige und interessante Problem von Verf. lautet: Läßt sich das Amalgam  $A$  immer in eine Abelsche Gruppe einbetten? Verf. hat in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 40, 149) gezeigt, daß die Antwort bejahend ist, wenn jede der Gruppen  $A_i$  zyklisch oder lokal-zyklisch ist. In dieser Arbeit beweist nun Verf., daß die Antwort auch dann affirmativ ist, wenn es sich nur um drei (sonst beliebige Abelsche) Gruppen  $A_i$  handelt. — Dagegen gilt der Satz, der das Hauptresultat der Arbeit enthält: Die Antwort fällt im allgemeinen negativ aus. Das wird durch ein sinnvolles Beispiel von fünf Abelschen Gruppen  $A_i$  bewiesen. Die Frage von vier Gruppen  $A_i$  ist noch offen. — Durch das Hauptresultat wird auch eine, in früheren Arbeiten von Verf. (in der oben zitierten sowie B. H. Neumann und Verf., dies. Zbl. 38, 12) noch offengebliebene Frage erledigt, und zwar durch den Satz: Aus der Existenz des verallgemeinerten freien Produktes von Abelschen Gruppen mit verschmolzenen Untergruppen folgt diejenige der verallgemeinerten freien Summe (mit denselben verschmolzenen Untergruppen) im allgemeinen nicht.

Tibor Szele.

**Mills, W. H.:** Multiple holomorphs of finitely generated Abelian groups. Trans. Amer. math. Soc. 71, 379—392 (1951).

Im Jahre 1908 hat G. A. Miller [Math. Ann. 66, 133—142 (1908)] die Frage aufgeworfen, ob das Holomorph  $H$  einer Gruppe  $G$  auch gleichzeitig Holomorph einer weiteren Untergruppe von  $H$  sein kann, und hat im Falle einer Abelschen Gruppe  $G$  eine teilweise Lösung gegeben. Verf. vervollständigt und verallgemeinert die Untersuchungen von Miller. Seine Hauptergebnisse sind die folgenden: 1. Wenn von zwei endlich erzeugten Abelschen Gruppen  $G$  und  $G'$  jede zu einem Normalteiler des Holomorphs der anderen isomorph ist, so sind sie untereinander isomorph. Insbesondere sind zwei endlich erzeugte Abelsche Gruppen mit isomorphen Holomorphen einander isomorph. 2. Wenn  $H$  das Holomorph einer endlich erzeugten Abelschen Gruppe  $G$  ist, und  $G'$  ein maximaler Abelscher zu  $G$  isomorpher Normalteiler von  $H$ , so ist  $H$  auch das Holomorph von  $G'$ . Ein „mehrfaches“ Holomorph kann im Falle endlich erzeugter Abelscher Gruppen also nur dann und immer dann



vorkommen, wenn  $H$  außer  $G$  noch andere zu  $G$  isomorphe maximale Abelsche Normalteiler — deren gibt es höchstens drei außer  $G$  — besitzt. Das ist sicher nicht der Fall, wenn  $G$  keine Elemente der Ordnung 2 enthält, oder wenn  $G$  mindestens drei unabhängige Erzeugende unendlicher Ordnung besitzt. — Die Beweise sind ganz elementar, aber sehr langwierig und arbeiten mit einer Fülle von Fall-Unterscheidungen. Verwandte Untersuchungen findet man bei R. A. Gelfand (dies. Zbl. 39, 16). — Wenn man sich nicht auf Abelsche Gruppen beschränkt, dann können auch nicht isomorphe Gruppen dasselbe Holomorph haben, z. B. für  $n \geq 3$  die Dieder-Gruppen und di-zyklischen Gruppen der Ordnung  $4n$ . Kurt A. Hirsch.

Douglas, Jesse: On the existence of a basis for every finite abelian group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 359—362 (1951).

Konstruktion einer Basis für endliche primäre abelsche Gruppen: Werden die Elemente einer primären Gruppe nach nicht steigender Ordnung angeordnet, so gehört das Element  $A_k$  genau dann zur Basis, wenn es durch die  $A_i$  mit  $i < k$ , die zur Basis gehören, und die  $A_j$  mit  $j > k$  nicht ausdrückbar ist.

Helmut Ulm.

Douglas, Jesse: On the basis theorem for finite abelian groups. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 525—528 (1951).

(Teil III s. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 611—614). Ein Beweis des Fundamentalsatzes für endliche abelsche Gruppen. Es wird gezeigt: Ist die Summe der Ordnungen der Elemente eines Erzeugendensystems einer primären Gruppe minimal, so bilden diese erzeugenden Elemente eine Basis.

Helmut Ulm.

Wielandt, Helmut: Über das Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen. Math. Z. 55, 1—7 (1951).

Es seien  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_k$  paarweise vertauschbare Untergruppen einer Gruppe. Verf. behandelt die Aufgabe, Aussagen über die Struktur des Produktes  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 \dots \mathcal{G}_k$  herzuleiten, wenn über die  $\mathcal{G}_i$  Näheres bekannt ist. Insbesondere handelt es sich hier um die Frage, unter welchen Voraussetzungen über die  $\mathcal{G}_i$  das Produkt  $\mathcal{G}$  auflösbar ist, und um Aussagen über den Zusammenhang der Sylowgruppen von  $\mathcal{G}$  mit denen der  $\mathcal{G}_i$ . Das Hauptergebnis ist eine Verschärfung eines Satzes von P. Hall (dies. Zbl. 16, 392) und lautet: Die  $\mathcal{G}_i$  seien nilpotent und die Produkte von je zwei unteren ihnen seien auflösbar. Dann ist auch  $\mathcal{G}$  auflösbar. Bezeichnet ferner  $\mathcal{P}_i$  die  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}_i$ , so ist das Produkt  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_k$  von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig und eine  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}$ . Ist  $\mathcal{P}$  die entsprechend gebildete Sylowgruppe von  $\mathcal{G}$  zu einer andern Primzahl, so sind  $\mathcal{P}$  und  $\mathcal{P}'$  vertauschbar. Ob ein Produkt  $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$  paarweise vertauschbarer Untergruppen auflösbar ist, wenn  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  nilpotent sind, ist nicht bekannt. Wie Verf. und N. I. tó unabhängig voneinander fanden, ist  $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$  jedenfalls dann auflösbar, wenn  $\mathcal{G}_1$  nilpotent und  $\mathcal{G}_2$  abelsch oder eine  $p$ -Gruppe ist. — Der Beweis des Hauptsatzes der Arbeit erfordert eine nähere Untersuchung über die Sylowgruppen des Produktes von zwei vertauschbaren Faktoren, deren Ergebnisse auch an sich interessant sind: Sind  $\mathcal{P}_1$  und  $\mathcal{P}_2$  vertauschbare Sylowgruppen von  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  zur selben Primzahl  $p$ , so ist  $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2$  und  $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2$ . Ferner gibt es zu jeder Primzahl  $p$  eine Sylowgruppe  $\mathcal{P}_i$  von  $\mathcal{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ) derart, daß  $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$  gilt. Genau entsprechende Sätze gelten über die Sylow-Komplemente (unter einem  $p$ -Sylow-Komplement von  $\mathcal{G}$  versteht man nach Hall eine Untergruppe von  $\mathcal{G}$ , die als Ordnung den größten zu  $p$  fremden Teiler der Ordnung von  $\mathcal{G}$  hat). — Im Fall, daß die  $\mathcal{G}_i$  zyklisch sind, wird schließlich folgendes bewiesen: Sind  $p_1 > p_2 > \dots > p_r$  die sämtlichen Primteiler der Ordnung von  $\mathcal{G}$  und ist  $\mathcal{P}_j$  eine zu  $p_j$  gehörige Sylowgruppe von  $\mathcal{G}$ , so sind  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_2 \dots \mathcal{P}_{k-1}$  Normalteiler von  $\mathcal{G}$ .

Rudolf Kochendörffer.

Knoche, Hans-Georg: Über den Frobenius'schen Klassenbegriff in nilpotenten Gruppen. Math. Z. 55, 71—83 (1951).

If  $\{1\} = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_c = G$  is the upper central series of a finite nilpotent group  $G$  of a class  $c$ , the  $i$ th normaliser  $N_i(A)$  of an element  $A \in G$  is defined as the largest group mapped onto the centraliser of  $AZ_i$  under the canonic homomorphism of  $G$  onto  $G/Z_i$ . These normalisers form an ascending normal series from the centraliser  $N_0(A)$  to  $N_j(A) = G$ , where  $j$  is such that  $A \in Z_{j-1} - Z_j$ . The factor group  $N_{i+1}(A)/N_i(A)$  is isomorphic to a subgroup of  $Z_{i+1}/Z_i$ . The intersection of all  $N_i(A)$ , where  $A$  ranges over  $G$ , is  $Z_{i+1}$ . The conjugates  $S^{-1}AS$  of  $A$ , for  $S$  ranging



over  $N_i(A)$ , form the  $i$ th class of  $A$ . For  $i = 0$  this consists of  $A$  alone, for  $i = c - 1$  it is the ordinary class of conjugates. The second part of the paper deals mainly with  $p$ -groups whose derived group has order  $p$ . — Some of the notions and results go back to Burnside. The treatment is elementary, and a number of simple illustrative examples are discussed.

Bernhard H. Neumann.

Rédei, L. und J. Szép: Über die endlichen nilpotenten Gruppen. Monatsh. Math. 55, 200—205 (1951).

Verff. beweisen: Ist  $\{a, S\}$  eine endliche nilpotente Gruppe,  $a$  ein Element von einer Primzahlpotenzordnung  $p^l$ ,  $S$  ein System von Elementen, bezeichnet ferner  $\{\dots\}'$  die Kommutatorgruppe von  $\{\dots\}$ , so gilt mit passenden ganzen Zahlen  $m, n$  ( $l \geq m \geq n > 0$ ):

$$\begin{aligned}\{a, S\} \supset \{a^p, S\} \supset \dots \supset \{a^{p^m}, S\} &= \{S\} \\ \{a, S\}' \supset \{a^p, S\}' \supset \dots \supset \{a^{p^n}, S\}' &= \{S\}'.\end{aligned}$$

Als besonders brauchbar bezeichnen die Verff. folgende (im wesentlichen mit dem vorhergehenden äquivalente) Teilaussage: Aus  $\{a, S\} \supset S$  folgt  $\{a, S\} \supset \{a^p, S\}$ , aus  $\{a, S\}' \supset S'$  folgt  $\{a, S\}' \supset \{a^p, S\}'$ , sowie den Spezialfall: Ist die unendliche  $p$ -Gruppe  $\{\alpha, \beta\}$  nicht zyklisch, bzw. nicht abelsch, so gilt  $\{\alpha, \beta\} \supset \{\alpha^p, \beta\}$ , bzw. sogar:  $\{\alpha, \beta\}' \supset \{\alpha^p, \beta\}'$  — Verff. geben noch ein Korollar zu obigem Satze und zeigen durch Beispiele, daß der Satz für nicht nilpotente Gruppen nicht allgemein gilt.

Otto Grün.

Szép, J.: Zur Theorie der endlichen einfachen Gruppen. Acta Sci. math., Szeged 14, 111—112 (1951).

$H$  et  $K$  étant deux sous-groupes d'un groupe  $G$ , celui-ci est dit factorisable si tout  $g$  appartenant à  $G$  peut être obtenu de manière univoque comme produit de deux éléments  $h$  et  $k$  appartenant à  $H$  et  $K$  respectivement. L'égalité  $HK = G$  s'appelle une factorisation de  $G$ . Perfectionnement d'un théorème déjà obtenu par J. Szép et L. Rédei (ce Zbl. 39, 255). L'A. arrive à cette conclusion: Pour qu'un groupe factorisable,  $G$ , soit simple il faut et il suffit qu'il ne possède aucune factorisation  $G = HK$ , telle que l'intersection  $H \cap K$  contienne un diviseur normal ( $\neq 1$ ) de  $K$  ou de  $H$ . Cas d'exception. Page 112, 1<sup>ère</sup> ligne, lire  $NK$  eu lieu de  $NH$ .

Albert Sade.

Szép, J.: Zur Theorie der faktorisierbaren Gruppen. Publ. math. 2, 43—45 (1951).

Eine Gruppe  $G$  heißt faktorisierbar, wenn die Darstellung  $G = HK$  gilt, wobei  $H$  und  $K$  zwei eigentliche Untergruppen von  $G$  sind. In dieser Arbeit wird folgender Satz bewiesen: Wenn  $G = HK$  ist, wobei  $H$  eine  $p$ -Gruppe und  $K$  eine Abelsche Gruppe ist und die Ordnungen von  $H$  und  $K$  relativ prim sind, so ist  $G$  auflösbar. Dieser Satz wird auf Grund des anderen bewiesen, daß  $G$  nicht einfach ist, wenn  $G = HK$  gilt, wobei  $H$  eine  $p$ -Gruppe und  $K$  eine Gruppe mit nicht identischem Zentrum ist.

Rodolfo Permutti.

Chowla, S., I. N. Herstein and W. K. Moore: On recursions connected with symmetric groups. I. Canadian J. Math 3, 328—334 (1951).

Für die Anzahl  $T_n$  der Lösungen von  $x^2 = 1$  in der symmetrischen Gruppe  $S_n$  gilt  $T_n = T_{n-1} + (n-1) T_{n-2}$ ,  $\exp(x + \frac{1}{2} x^2) = \sum T_n \cdot x^n/n!$ ,  $T_n \sim n^{n/2} e^{1/2} n^{-n/2-1/4} 2^{-1/2}$ ,  $T_{n+m} \equiv T_n \pmod{m}$ , falls  $m$  ungerade, und  $2^s \mid T_n$ , falls  $n \geq 4s - 2$ .

Ernst Witt.

Murnaghan, Francis D.: The dimensions of the irreducible representations of a finite group. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 441—442 (1951).

Vereinfachter Beweis des Satzes, daß bei endlichen Gruppen die Darstellungsgrade Teiler der Gruppenordnung sind.

Hermann Boerner.



**Murnaghan, Francis D.:** The analysis of representations of the linear group. *Anais Acad. Brasileira Ci.* **23**, 1—19 (1951).

Für die „S-Funktionen“  $\{\lambda\}$ , d. h. die Charaktere der irreduziblen ganzrationalen homogenen Darstellungen der vollen linearen Gruppe  $\mathfrak{G}_n$ , die den Partitionen  $(\lambda) = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  ( $k \leq n$ ) der natürlichen Zahlen zugeordnet sind, gibt es bekanntlich zwei Arten von „Produkten“: das gewöhnliche  $\{\lambda\} \{\mu\}$ , das dem Kroneckerprodukt der Darstellungen entspricht, und Littlewood's „neues Produkt“  $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ . Beide werden in dieser Arbeit ausführlich erklärt und Formel und Methoden zu ihrer Berechnung, d. h. zur Reduktion der resultierenden Darstellung angegeben: beim gewöhnlichen Produkt zuerst die bekannte Formel für  $\{m\} \{p\}$  bei eingliedrigen Partitionen, dann als komplizierteres Beispiel  $\{m-1, 1\}^2$ , dann eine allgemeine rekursive Methode. Beim neuen Produkt wird zuerst  $\{m\} \otimes \{2\}$ ,  $\{m\} \otimes \{1^2\}$ ,  $\{1^m\} \otimes \{2\}$  und  $\{1^m\} \otimes \{1^2\}$  berechnet, sodann  $\{m-1, 1\} \otimes \{2\}$  und  $\{m-1, 1\} \otimes \{1^2\}$  mit Hilfe des oben berechneten  $\{m-1, 1\}^2$ . Wesentlich komplizierter ist schon  $\{m-2, 2\} \otimes \{2\}$  und  $\{m-2, 2\} \otimes \{1^2\}$ . Damit sind immerhin die Fälle der Summe 2, 3, 4, 5 im ersten, 2 im zweiten Faktor erledigt mit Ausnahme von  $(\lambda) = (3 \ 1^2)$ . Es wird noch  $\{2\} \otimes \{m\}$  und  $\{1^2\} \otimes \{m\}$  behandelt und zuletzt eine größere Zahl von Einzelbeispielen gegeben, darunter auch die oben fehlenden  $\{3 \ 1^2\} \otimes \{2\}$  und  $\{3 \ 1^2\} \otimes \{1^2\}$ .

*Hermann Boerner.*

**Itô, Noboru:** On the degrees of irreducible representations of a finite group. *Nagoya math. J.* **3**, 5—6 (1951).

Die Darstellungsgrade einer endlichen Gruppe  $\mathfrak{G}$  sind Teiler des Index eines jeden maximalen abelschen Normalteilers von  $\mathfrak{G}$ .

*Hermann Boerner.*

**Newell, M. J.:** A theorem on the plethysm of S-functions. *Quart. J. Math., Oxford II. Ser.* **2**, 161—166 (1951).

Es werden zwei Sätze bewiesen, welche die Berechnung von Littlewoods Produkt  $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$  von S-Funktionen in manchen Fällen erleichtern.  $g_{rst}$  seien die Koeffizienten, die bei der Berechnung des gewöhnlichen Produkts von S-Funktionen auftreten:  $\{r\} \{s\} = g_{rst} \{t\}$ . Satz I: Wenn  $\{m\} \otimes \{n\} = \sum \{r\}$  ( $m$  und  $n$  natürliche Zahlen), dann ist für jede natürliche Zahl  $k \leq n$

$$\sum g_{(1^k) \varepsilon \nu} \{\varepsilon\} = [\{m-1\} \otimes \{1^k\}] [\{m\} \otimes \{n-k\}].$$

Satz I A: Wenn  $\{m\} \otimes \{1^n\} = \sum \{r\}$ , dann ist für jede natürliche Zahl  $k \leq n$

$$\sum g_{(1^k) \varepsilon \nu} \{\varepsilon\} = [\{m-1\} \otimes \{k\}] [\{m\} \otimes \{1^{n-k}\}].$$

Als Anwendung wird  $\{5\} \otimes \{3\}$ ,  $\{3\} \otimes \{1^n\}$  für  $n = 2, 3, 4, 5$ ,  $\{4\} \otimes \{1^4\}$ , endlich  $\{3\} \otimes \{5\}$  berechnet.

*Hermann Boerner.*

**Thrall, R. M. and G. de B. Robinson:** Supplement to a paper of G. de B. Robinson. *Amer. J. Math.* **73**, 721—724 (1951).

Korrektur und Zusatz zur Arbeit von G. de B. Robinson (dies. Zbl. **36**, 155). Die Korrektur bezieht sich auf den letzten Teil der Arbeit, am Wortlaut des Zbl.-Referats ist nichts zu ändern. Der Zusatz betrifft die Multiplizität, mit der die Einsdarstellung von  $S$  in  $[\alpha]_q^*$  vorkommt.

*Hermann Boerner.*

**Chevalley, Claude:** Sur le groupe exceptionnel ( $E_6$ ). *C. r. Acad. Sci., Paris* **232**, 1991—1993 (1951).

**Chevalley, Claude:** Sur une variété algébrique liée à l'étude du groupe ( $E_6$ ). *C. r. Acad. Sci., Paris* **232**, 2168—2170 (1951).

Die 78-gliedrige einfache Liesche Gruppe  $\mathfrak{g}$  vom Ausnahmetyp  $E_6$  hat nach E. Cartan eine 27-reihige Darstellung  $\mathfrak{d}$ , die sich als Invariantengruppe einer bestimmten kubischen Form  $F(w)$  beschreiben läßt. Zu ihrer Beschreibung sei  $E_p$  der Modul der Formen  $p$ -ten Grades aus  $n$  alternierenden Unbestimmten ( $n = 6$ ),  $E = \sum E_p$  die zugehörige Algebra,  $E^*$  eine isomorphe Algebra mit einer festen Zuordnung  $*$ . Es bedeute  $u \vee v = (u^* v^*)^*$ . Mit  $w = (x, y, z) \in E_1 \times E_1 \times E_4$  ist dann  $F(w) = 6xy \vee z + z \vee z \vee z$ . — Mit diesen Hilfsmitteln wird nun die Geometrie der Darstellung  $\mathfrak{d}$ , ihrer kontragradierten Darstellung usw. näher diskutiert.



$\mathfrak{F}$  sei die affine Mannigfaltigkeit  $F = 0$ . Ihre mehrfachen Punkte bilden eine Mannigfaltigkeit  $\mathfrak{S}$  der Dimension 17, die nur noch im Nullpunkt singular ist. Alle Sekanten von  $\mathfrak{S}$  liegen ganz in  $\mathfrak{F}$ .  $g$  permutiert die Punkte von  $F = c$  ( $c \neq 0$ ) transitiv, ebenso die einfachen Punkte  $\mathfrak{F}$  und gleichfalls die von Null verschiedenen Punkte von  $\mathfrak{S}$ . Eine Fülle von geometrischen Einzelheiten ergeben sich bei der Betrachtung der Polarform  $F(w, w', w'')$ . Beweise fehlen. — Ernst Witt.

**Dieudonné, Jean:** Sur les groupes orthogonaux rationnels à trois et quatre variables. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 541—543 (1951).

Die Struktur der orthogonalen Gruppe  $\mathcal{G}$  einer quadratischen Form  $f$  von  $n$  Variablen aus einem Körper  $K$  hängt sehr davon ab, ob die Form  $f$  die Null darstellt oder nicht. Im ersten Fall ist die projektive Kommutatorgruppe einfach, wenigstens für  $n \geq 5$ , dagegen im zweiten Fall nicht immer.  $G$  wird fast auflösbar genannt, wenn  $G$  eine Kette von Normalteilern  $G_n$  mit Durchschnitt 1 enthält ( $G_0 = G$ ), so daß  $G_n/G_{n+1}$  endlich und fast immer abelsch ist. Hier wird nun gezeigt, daß die orthogonale Gruppe  $G$  einer ternären, die Null nicht darstellenden quadratischen Form  $f$  über dem Körper  $Q$  der rationalen Zahlen fast auflösbar ist. Dasselbe gilt für quaternäre Formen, wenn  $f$  indefinit ist oder die Diskriminante  $d = 1$  hat. Diese Tatsachen bleiben auch gültig für einen reellen algebraischen Körper, dessen konjugierte alle imaginär sind. Verf. kündigt an, daß die projektive Kommutatorgruppe von  $G$  über  $Q$  für  $n \geq 6$  einfach ist, so daß die Struktur von  $G$  nur noch für  $n = 5$  und in gewissen Fällen für  $n = 4$  ungeklärt ist. — Ernst Witt.

**Peremans, W.:** Finite binary projective groups. Compositio math. 9, 97—129 (1951).

Die Abhandlung beschäftigt sich mit der Bestimmung aller endlichen Gruppen von binären projektiven Transformationen  $(1) z' = (az + b)/(cz + d)$  im Falle, daß die Koeffizienten  $a, b, c, d$  einem beliebigen kommutativen Körper  $K$  angehören. Die Behandlung dieser Aufgabe gestaltet sich nicht so einfach wie im komplexen Gebiet; in der Tat, hat der zugrunde gelegte Körper  $K$  eine von Null verschiedene Charakteristik, so kann die betrachtete Gruppe auch parabolische Transformationen enthalten. Verf. unterscheidet also die Gruppen ohne parabolische Elemente von denjenigen, die auch parabolische Elemente enthalten. Man findet zunächst, daß die möglichen Gruppen der 1. Art fünf sind, wie im komplexen Gebiete; dies ist auch hier eine Folge der Diskussion einer diophantischen Gleichung, die die Ordnung  $N$  der Gruppe mit den Ordnungen  $n_i$  der Pole der verschiedenen Transformationen der Gruppe verbindet. Für die Existenz der gefundenen Gruppen muß man, in jedem der fünf Fälle, einige einschränkende Voraussetzungen über die Charakteristik des Körpers machen. Zwei Gruppen, die demselben Typus angehören, können immer durch eine lineare Transformation (1) ineinander übergeführt werden. Für die Richtigkeit dieser Behauptung ist es u. U. nötig, den gegebenen Körper  $K$  algebraisch zu erweitern, damit er die Pole der Transformationen der Gruppe enthalte; es wird angenommen, daß alle solche algebraischen Erweiterungen, die nötig sind, ausgeführt werden. — Enthält eine endliche Gruppe auch parabolische Elemente, so muß man in der Gruppe auch diejenigen additiven Untergruppen betrachten, die aus allen parabolischen Elementen mit einem und demselben Pol bestehen; diese Untergruppen sind alle miteinander konjugiert und haben eine gewisse Ordnung  $p^m$ . Man findet auch in diesem Falle eine diophantische Gleichung, die  $N$  mit  $p, m$  und anderen Invarianten der Gruppe verbindet. Die Anzahl der möglichen Lösungen ist jetzt sieben. Zwei Gruppen desselben Typus sind jetzt aber nicht immer durch lineare Transformationen der schon oben genannten algebraischen Erweiterung des Körpers  $K$  ineinander überführbar. Für die Existenz der gefundenen Gruppen muß man auch jetzt gewisse Voraussetzungen über die Charakteristik des Körpers machen. — Eugenio Togliatti.

**Peremans, W.:** Existence and equivalence of finite binary projective groups. Compositio math. 9, 169—192 (1951).

Diese Abhandlung kann als eine Fortsetzung der vorsteh. besprochenen angesehen werden. Hier ist der kommutative Körper  $K$ , über welchem die im Titel genannten Gruppen  $G$  von linearen Transformationen betrachtet werden, als gegeben und fest zu denken; keine Erweiterung von  $K$  ist jetzt gestattet. Diese Voraussetzung hat die Folge, daß die Pole einer nicht parabolischen Transformation der Gruppe  $G$  dem Körper nicht anzugehören brauchen; so daß die in der vorigen Untersuchung gefundenen Bedingungen die Existenz der Gruppe  $G$  nicht immer sichern; dazu sind weitere Bedingungen auszusprechen, die hier im 1. Teil gefunden



werden. Diese reduzieren sich hauptsächlich darauf, daß die Gleichung  $x^2 + y^2 + z^2 = 0$  im Körper  $K$  eine nicht triviale Lösung haben muß. — Auch die Frage, ob zwei Gruppen desselben Typus immer durch eine lineare Transformation über  $K$  ineinander übergeführt werden können, bietet jetzt neue Schwierigkeiten, besonders im Falle einer diedrischen Gruppe. Im 2. Teil der Abhandlung wird eben diese Frage behandelt.

Eugenio Togliatti.

**Kesava Menon, P.: The invariants of finite transformation groups. I.** Math. Student 18, 100—107 (1951).

Es sollen die Invarianten einer endlichen Transformationsgruppe  $G = \{S_1, \dots, S_N\}$  auf algebraischem Wege aufgestellt werden, wo  $S_i(x) = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i}$  mit Koeffizienten in einem beliebigen Körper. Da  $A(t, x) = \Pi(t - S_i(x))$ , über alle Gruppenelemente genommen, invariant ist bezüglich einer Transformation von  $G$ , so ist  $B(t, x) = A(t, x)/\Pi(c_i x + d_i)$  invariant sowohl für  $x$  als auch für  $t$ . Nachdem die Eigenschaften dieser Funktion hergeleitet sind, wird als wichtigste Invariante eingeführt  $I(t) = B(t, p)$  wo  $p$  eine solche Größe des Körpers, daß  $c_i p + d_i \neq 0$ . Jede Funktion von  $x$ , welche unter einer Transformation von  $G$  invariant ist, ist eine Funktion von  $I(x)$ . Transformiert man  $G$  mittels einer linear gebrochenen Funktion in  $G^*$ , so kann die zugehörige Invariante  $I^*$  als linear gebrochene Funktion von  $I$  geschrieben werden. Ist insbesondere  $G = G^*$ , so wird  $I = I^*$ , und faßt man nun  $G$  als Normalteiler einer gewissen Gruppe  $K$  auf und zerlegt nach Nebengruppen  $K = G + PG + QG + \dots$ , so bilden  $\{I, P^*, Q^*, \dots\}$  eine zu  $K/G$  isomorphe Gruppe und wir erhalten eine Darstellung von  $K/G$ .

Johann Jakob Burckhardt.

**Hurley, A. C.: Finite rotation groups and crystal classes in four dimensions.** Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 650—661 (1951).

Zur Herleitung der geometrischen Kristallklassen (d. s. orthogonale Gruppen, die sich ganzzahlig schreiben lassen) sind für den dreidimensionalen Raum  $R^3$  im wesentlichen drei Methoden bekannt: 1. ein geometrisches Verfahren (A. Schoenflies), 2. die Reduktionstheorie der quadratischen Formen, 3. eine algebraisch gruppentheoretische Methode mit Hilfe der Charakterentheorie. Für die höherdimensionalen Räume versagen die beiden ersten Methoden, und auch die dritte ist noch nicht bis zur expliziten Bestimmung der irreduziblen Klassen durchgebildet worden. Um im  $R^4$  die Kristallklassen aufzustellen, bedient sich daher Verf. der Kenntnisse über die orthogonalen Gruppen, die man E. Goursat [Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 6, 9—102 (1889)] verdankt. Dieser hat durch eine Abbildung auf Paare inhomogener linearer Substitutionen deren 51 bestimmt (wobei Verf. eine von Goursat übersehene Gruppe ergänzt). Unter diesen Goursatschen Gruppen sind diejenigen herauszusuchen, die sich ganzzahlig schreiben lassen. Hierzu müssen vorerst die Invarianten der charakteristischen Gleichung der Matrizen ganzzahlig sein. Im Unterschied zum dreidimensionalen Fall, wo bereits die Ganzzahligkeit der Spur genau alle Kristallklassen liefert, müssen im  $R^4$  zwei Invarianten untersucht werden, womit man beinahe alle nichtkristallographischen Gruppen ausscheiden kann. Eine Durchmusterung der Goursatschen Gruppen zeigt dabei, daß für erste und zweite Invariante nur wenige ganze Zahlen in Frage kommen (dasselbe Ergebnis wird auch durch die Charakterentheorie der vierdimensionalen Gruppen geliefert, was Verf. in einer unveröffentlichten Arbeit, in die er dem Ref. freundlicherweise Einblick gab, ausgeführt hat). Zu ihnen findet man 225 verschiedene Gruppen. Unter ihnen sind diejenigen zu suchen, die sich ganzzahlig schreiben lassen. Zu diesem Zweck bedient sich Verf. einer Methode von G. de B. Robinson [Proc. Cambridge philos. Soc. 27, 37—48 (1931); dies. Zbl. 1, 160]. Die ganzzahligen Gruppen lassen ein vierdimensionales Gitter invariant und umgekehrt. Durch dieses Kriterium fallen drei der obigen Gruppen weg und es gibt somit 222 vierdimensionale geometrische Kristallklassen, von denen 45 irreduzibel sind.

Johann Jakob Burckhardt.

**Siegel, Carl Ludwig: Die Modulgruppe in einer einfachen involutorischen Algebra.** Festschr. Akad. Wiss. Göttingen 1951, math.-phys. Kl., 157—167 (1951).

Es bezeichne  $A$  eine einfache Algebra über dem Körper  $P$  der rationalen Zahlen mit dem Einselement 1. Vorausgesetzt wird, daß  $A$  einen involutorischen Antiautomorphismus  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}^*$  ( $\mathfrak{A} \in A$ ) besitzt. Durch Überstreichen wird die Grundkörpererweiterung zum Körper  $P$  der reellen Zahlen angedeutet. Die symplektische Gruppe  $\Sigma$  in  $\bar{A}$  wird erklärt als die Gruppe der zweireihigen Matrizen  $\mathfrak{M}$



mit Elementen aus  $\bar{A}$ , welche die Gleichung

$$\mathfrak{M}^* \mathfrak{S} \mathfrak{M} = \mathfrak{S}, \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \mathfrak{B} \\ \mathfrak{C} \mathfrak{D} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{A}^* \mathfrak{C}^* \\ \mathfrak{B}^* \mathfrak{D}^* \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erfüllen. Jede kompakte Untergruppe  $K$  von  $\Sigma$  wird durch eine Gleichung  $\mathfrak{M}' \mathfrak{P} \mathfrak{M} = \mathfrak{P}$  gekennzeichnet, wobei die Koeffizienten von  $\mathfrak{M}$ , d. h. die Elemente von  $\bar{A}$  durch reelle Matrizen darzustellen sind,  $\mathfrak{M}'$  bedeutet die spiegelbildliche Matrix und  $\mathfrak{P}$  die Matrix zu einer definiten oder semidefiniten quadratischen Form. Verf. gibt ein Berechnungsverfahren für  $\mathfrak{P}$  an. Fortan wird  $K$  als eine maximale kompakte Untergruppe von  $\Sigma$  vorausgesetzt. Die Darstellung von  $\Sigma$  im Raum  $P = \Sigma/K$  der rechtsseitigen Nebengruppen von  $K$  wird studiert. Eng verwandt mit ihr ist die Darstellung im Raum der Nebengruppen von  $KZ$ , wo  $Z$  das Zentrum von  $\Sigma$  bedeutet. Diese letztere ist das Analogon der Darstellung der Gruppe der reellen zweireihigen Matrizen durch gebrochen lineare Substitutionen einer komplexen Variablen  $\tau$  mit  $\text{Im}(\tau) > 0$ . — Diejenigen  $\mathfrak{M}$ , deren Elemente aus einer maximalen Ordnung  $\mathfrak{D}$  von  $A$  stammen, bilden eine diskrete Untergruppe  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  von  $\Sigma$ , eine Verallgemeinerung der klassischen Modulgruppe. Sie besitzt in  $P$  einen Fundamentalbereich  $F$ . Der Beweis stützt sich auf den vom Verf. entwickelten Zusammenhang zwischen der Reduktionstheorie der durch  $\mathfrak{P}$  gelieferten quadratischen Form und der Einheitentheorie der Matrixalgebra 2. Grades über  $A$  [s. Ann. of Math., II. Ser. 44, 674—689 (1943)]. Verf. bemerkt zum Schluß, daß das hier gelegte algebraisch-geometrische Fundament der Theorie von  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  gleichzeitig folgende Sätze erschließt:  $\Gamma_{\mathfrak{D}}$  besitzt ein endliches Erzeugendensystem, und  $F$  besitzt ein endliches Volumen.

*Martin Eichler.*

**Bonnevay, Georges:** Sur la topologie du groupe des rotations dans l'espace. Revue sci. 89, 83—89 (1951).

Démonstration détaillée du fait très connu que le groupe fondamental du groupe orthogonal unimodulaire à trois variables réelles est d'ordre deux.

*Armand Borel.*

**Šrejder, Ju. A.:** Über ein Beispiel eines verallgemeinerten Charakters. Mat. Sbornik, n. Ser. 29 (71), 419—426 (1951) [Russisch].

This paper is an addendum to an earlier work by the author on the theory of generalized characters of a locally compact Abelian group (this Zbl. 38, 273). The principal result obtained is the following. There exists a generalized character  $\chi_{\gamma}(t)$  on the additive group of real numbers, a constant  $\gamma$  such that  $0 < |\gamma| < 1$ , and a singular measure  $\xi$  with the property that  $\chi_{\xi}(t) = \gamma$  almost everywhere. The measure  $\xi$  is Lebesgue's singular measure on the Cantor set in the interval  $[0, 1]$ . The author also proves that  $\xi^n * \varepsilon_s$  and  $\xi^m * \varepsilon_t$ , where  $\varepsilon_u$  ( $u$  a real number) is the point-measure  $\delta - 1$  at the point  $u$ , are always singular with respect to each other.

*Edwin Hewitt.*

**Mautner, F. I.:** Fourier analysis and symmetric spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 529—533 (1951).

Soit  $G$  un groupe localement compact dans lequel il existe un sous-groupe compact  $K$  et une partie  $S$ , tels que tout  $g \in G$  se décompose univoquement et continûment en un produit  $g = s k$ ,  $s \in S$ ,  $k \in K$  et tels de plus que l'application  $g \rightarrow k^{-1}s$  soit un antiautomorphisme de  $G$  laissant invariant la mesure de Haar. L'A. étudie la représentation unitaire  $g \rightarrow U_g$  de  $G$  dans  $L^2(G/K)$  associée aux éléments de  $g$  considérés comme opérant par translations à gauche dans  $G/K$ : l'algèbre  $W'$  des opérateurs bornés de  $L^2(G/K)$ , permutant aux  $U_g$ , est commutative et l'anneau d'opérateurs  $W$  engendrés par les  $U_g$  est de type I. En décomposant, relativement à  $W'$ ,  $L^2(G/K)$  en somme directe d'espaces  $H_t$ , le sous-espace de  $H_t$  invariant par tous les  $V_t(k)$ ,  $k \in K$  [ou  $g \rightarrow V_t(g)$  est la représentation unitaire fortement continue de  $G$  dans  $H_t$ , obtenue pour presque tout  $t$  à partir de  $U_g$  (F. I. Mautner,

ce Zbl. 39, 22)] est de dimension 1 pour presque tout  $t$ . Si  $f \in L^1(G/K) \cap L^2(G/K)$ , l'opérateur  $F(t) = \int f(g) V_t(g) dg$  est borné dans  $H_t$  pour presque tout  $t$ , appartient à  $W_t$  ( $W = (W_t)$ ) et on a une généralisation de la formule de Plancherel-Weyl  $\int_G |f(g)|^2 dg = \int \text{Tr} [F(t) F(t)^*] a(t) ds(t)$ , où  $a(t)$  est une fonction à valeurs réelles et  $ds(t)$  la mesure intervenant dans la décomposition de  $L^2(G/K)$  en somme directe des  $H_t$ . L'A. étudie en suite les conséquences de ce résultat. Jean Riss.

Gleason, A. M.: Compact subgroups. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 622—623 (1951).

Es wird ein elementärer Beweis des folgenden Satzes gegeben: Jede zusammenhängende, kompakte Untergruppe einer lokal kompakten Gruppe ist in einer maximalen, zusammenhängenden kompakten Untergruppe enthalten. Dieser Satz steht in enger Beziehung zu zwei von K. Iwasawa bewiesenen Sätzen (dies. Zbl. 34, 18. Th. 13 und Th. 14). Folgende Verallgemeinerung wird auch bewiesen: Jede kompakte Untergruppe  $H$  einer lokal kompakten Gruppe ist in einer kompakten Untergruppe enthalten, welche unter denjenigen kompakten Untergruppen  $K$  für die  $K/H$  zusammenhängend ist, maximal ist. Tudor Ganea.

## Verbände. Ringe. Körper:

Châtelet, Albert: Une forme générale des théorèmes de Schreier et de Jordan-Holder. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1165—1166 (1951).

Verf. bemerkt, daß eine seiner Bedingungen für den Schreierschen Verfeinerungssatz für Äquivalenzrelationen (dies. Zbl. 31, 8) überflüssig ist. Dadurch erhält der Satz eine sehr einfache und allgemeine Form. Paul Lorenzen.

Aumann, Georg: Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden. Math. Z. 55, 109—113 (1951).

The following theorem is proved: every prime ideal  $I$  of a subring  $B$  of a Boolean ring  $A$  can be extended to a prime ideal  $J$  of  $A$ . This theorem is a very simple and immediate consequence of known theorems on prime ideals and homomorphisms. See e. g. M. H. Stone, this Zbl. 14, 340, and R. Sikorski, this Zbl. 37, 19. The method of the proof also is not new. Roman Sikorski.

Haimo, Franklin: A representation for Boolean algebras. Amer. J. Math. 73, 725—740 (1951).

If  $x, y$  are elements of a partly ordered set  $S$  with universal infimum 0, we write  $x \perp y$  whenever: 0 =  $x \cap y$  and there is  $z \in S$  such that  $x, y \leq z$ . An additive Abelian group  $G$  is said to be a vector ordered group (v. o. group) if  $G$  is partly ordered by a relation  $\leq$  satisfying the following conditions: (1)  $x \geq 0$  for every  $x \in G$  (where 0 is the additive identity of  $G$ ); (2)  $x \geq y$  implies  $y \perp (x - y)$ ; (3)  $x \perp y$  implies  $x + y \geq x, y$ ; (4)  $x + y \geq x, y$  imply  $x + y = x \cup y$ ; (5) for each fixed  $a \in G$ , the sets  $[x | x \in G; x \perp a]$  and  $[x | x \in G; z \leq x, z \perp a \text{ imply } z = 0]$  are subgroups of  $G$ ; (6a) to each  $x \in G$  there is at least one maximal element  $m$  of  $G$  with  $x \leq m$ ; (6b) given  $a, b \in G$ , there exists an element  $c$  (denoted by  $a \perp b$ ) of  $G$  such that  $c \leq a, c \perp b$ , and such that  $d \leq a, d \perp b$  imply  $d \leq c$ ; (6c) the meet  $x \cap y$  always exists. — A partly ordered abelian group  $G$  is said to be a strong v. o. group if the order  $\leq$  satisfies conditions (1—5) and the following: (6') every chain in  $G$  has a l. u. b. in  $G$ . — Each strong v. o. group is a v. o. group. An endomorphism  $V$  of a v. o. group  $G$  is called a projection if  $V(x) \leq x$  for every  $x \in G$  (this property implies  $V^2 = V$ ). For instance, if  $a \in G$ , then the endomorphism  $V_a(x) = x - x \perp a$  is a projection. — Vector ordered groups generalize direct sums of Abelian groups. In fact, if  $G$  is the direct sum of finite number of Abelian groups, and if  $b \leq a$  ( $a, b \in G$ ) means that  $b$  can be obtained from  $a$  by replacing some components by zeros, leaving the other components fixed, then  $G$  is a v. o. group. Other examples of v. o. groups are „Boolean groups“  $G(B, \Sigma)$  defined as follows: Let  $B$  be a Boolean algebra with the order relation  $\leq$  and with the greatest element 1, and let  $\Sigma$  be a non-trivial Abelian group. A valued partition is a pair  $(\Pi, s)$  where  $\Pi$  is a partition of 1 (i. e. a class of disjoint elements  $\beta \in B, \beta \neq 0 \in B$ , and such that  $1 = \text{l. u. b. of all } \beta \in \Pi$ ), and  $s$  is a function of the set  $\Pi$  into  $\Sigma$ . Another valued partition  $(\Pi', s')$  is a refinement of  $(\Pi, s)$  if (1)  $\Pi'$  is a refinement of  $\Pi$  (i. e. for each  $\beta' \in \Pi'$  there is a  $\beta \in \Pi$  with  $\beta' \leq \beta$ ), and (2) if  $\beta' \in \Pi', \beta \in \Pi, \beta' \leq \beta$ , then  $s'(\beta') = s(\beta)$ . We write  $(\Pi', s') \sim (\Pi, s)$  if  $(\Pi', s')$  and  $(\Pi, s)$  have a common refinement. Clearly  $\sim$  is an equivalence relation. Let



$G(B, \Sigma)$  be the set of all equivalence classes under  $\sim$ .  $G(B, \Sigma)$  is a group with the following definition of addition: If  $g_1, g_2 \in G(B, \Sigma)$  have representants  $(\Pi_1, s_1)$  and  $(\Pi_2, s_2)$  respectively, let  $\Pi$  be a common refinement of  $\Pi_1$  and  $\Pi_2$ , and let  $s(\beta) = s_1(\beta_1) + s_2(\beta_2)$  when  $\beta \leq \beta_1 \cap \beta_2$ ; then  $g_1 + g_2$  is the element of  $G(B, \Sigma)$  determined by  $(\Pi, s)$ . We write  $g_1 \leq g_2$  if  $g_1, g_2$  have representants  $(\Pi, s_1)$ ,  $(\Pi, s_2)$  respectively, such that  $s_1(\beta) = s_2(\beta)$  or  $0 \in \Sigma$  for each  $\beta \in \Pi$ . — The main theorems of the paper are as follows: (I) Each Boolean group  $G(B, \Sigma)$  is a v. o. group. If  $B$  is complete, then  $G(B, \Sigma)$  is a strong v. o. group. (II) Let  $V$  be a projection of a v. o. group. Then  $V = V_a$  if and only if  $a$  is maximal in the set  $H(V) = \{x \mid x \in G; V(x) = x\}$ ; and for each projection  $V$  there is  $a \in H(V)$  such that  $V = V_a$ . (III) The class  $P(G)$  of all projections of a v. o. group  $G$  is a Boolean algebra with respect to order relation  $V \leq W$  ( $V, W \in P(G)$ ) defined as follows:  $V \leq W$  if and only if  $V(x) \leq W(x)$  for every  $x \in G$ . If  $G$  is a strong v. o. group, then  $P(G)$  is a complete Boolean algebra. (IV) If  $G$  is a strong v. o. group and  $a \in G$ , the class of all  $x \in G$  with  $x \leq a$  is, under the order relation from  $G$ , a complete Boolean algebra isomorphic to the Boolean algebra of all projections  $V_x \leq V_a$ . (V) A Boolean algebra  $B$  has a faithful (lattice isomorphic) representation as the set of projections of the Boolean group  $G(B, \Sigma)$ .

Roman Sikorski.

Arnold, B. H.: Distributive lattices with a third operation defined. Pacific J. Math. 1, 33—41 (1951).

Convenons d'appeler  $\ast$  treillis un treillis distributif muni, outre les deux opérations habituelles  $\vee$  et  $\wedge$ , d'une troisième opération  $\ast$ , idempotente, commutative, associative, distributive par rapport à  $\vee$  et  $\wedge$ . (Un  $\ast$  treillis entre donc dans la classe des  $m$ -lattices de G. Birkhoff.) Le produit direct de deux  $\ast$  treillis est un  $\ast$  treillis. L'A. démontre que tout  $\ast$  treillis est isomorphe à un sous  $\ast$  treillis  $S$  du produit direct de deux  $\ast$  treillis bien déterminés et si  $(a, b) \in S$  et  $(c, d) \in S$ ,  $(a, b) \ast (c, d) = (a \wedge c, b \vee d)$ . Un intéressant rapprochement entre la structure de  $\ast$  treillis et la structure d'„ordre double“ utilisée par Stöhr [J. reine angew. Math. 184, 138—157 (1942)] n'est que suggéré par la bibliographie.

Jacques Riguet.

Dubreil-Jacotin, Marie-Louise et Robert Croisot: Sur les congruences dans les ensembles où sont définies plusieurs opérations. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1162—1164 (1951).

On désigne par  $G$  un demi-groupe pour l'opération  $\circ$  (associative), et par  $E$  un complexe central unitaire de  $G$  (sous demi-groupe tel que  $x \circ E = E \circ x$ , quel que soit  $x \in G$ , et  $x \circ e \in E$ ,  $e \in E \rightarrow x \in E$ ). L'équivalence  $K_E$  définie par:  $a \equiv b (K_E) \leftrightarrow \exists e_1$  et  $e_2 \in E$ , tels que  $a \circ e_1 = b \circ e_2$ , est, comme on sait, la plus fine parmi les équivalences régulières pour l'opération  $\circ$  admettant  $E$  pour classe. On suppose  $G$  muni d'une deuxième opération, notée  $\otimes$ , associative ou non. Les AA. donnent alors une condition nécessaire et suffisante pour que  $K_E$  soit régulière par rapport à l'opération  $\otimes$ , sous la forme  $(\beta)$  suivante: quels que soient  $e_1 \in E$ ,  $e_2 \in E$ ,  $x \in G$ ,  $y \in G$ , il existe  $e^\ast \in E$  et  $e' \in E$ , tels que

$$[(x \circ e_1) \otimes (y \circ e_2)] \circ e^\ast = (x \otimes y) \circ e'.$$

Cette condition générale s'applique en particulier aux cas suivants: 1°  $G$  est un anneau  $A$ ; l'opération  $\circ$  est la somme  $+$ , et l'opération  $\otimes$  le produit. La condition  $(\beta)$  exprime que  $E$  est idéal bilatère de  $A$ . 2°  $G$  est un groupe réticulé; l'opération  $\circ$  est le produit, l'opération  $\otimes$  est l'union  $\cup$  (ou l'intersection  $\cap$ ). La condition  $(\beta)$  exprime que  $E$  est un idéal de  $G$ , c'est-à-dire (G. Birkhoff, Lattice Theory), un sous-groupe invariant  $E$  de  $G$  tel que  $a \in E$ ,  $|x| \leq |a| \rightarrow x \in E$ . 3°  $G$  est un demi-treillis multiplicatif entier.  $\circ$  est l'union,  $\otimes$  le produit.  $E$  un idéal de  $G$ , c'est-à-dire un sous-demi-treillis  $E$  tel que:  $a \in E$ ,  $x \leq a \rightarrow x \in E$ . La condition  $(\beta)$  est vérifiée. 4°  $G$  est un treillis.  $\circ$  est l'union,  $\otimes$  l'intersection.  $E$  un idéal du treillis. La condition  $(\beta)$  exprime que, dans le treillis  $I$  des idéaux de  $G$ ,  $E$  est un élément  $\cup$ -distribuant, c'est-à-dire tel que  $E \cup (X \cap Y) = (E \cup X) \cap (E \cup Y)$ , quels que soient  $X \in I$ ,  $Y \in I$ .

Léonce Lesieur.

Raffin, R.: Axiomatisation des algèbres génétiques. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 359—366 (1951).

L'A. indique la construction et les principales propriétés d'une algèbre  $A$  non

associative obtenue à partir d'un domaine  $D$  qu'on utilise en génétique, est qui a les propriétés suivantes: 1°  $D$  forme un semi-groupe abélien avec élément nul. 2°  $D$  admet comme domaine d'opérateurs l'ensemble  $R^{0+}$  des nombres réels positifs ou nuls. 3°  $D$  possède une base finie de  $n > 1$  éléments. [Si  $(a_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ou nuls. 4° Il existe dans  $D$  une multiplication donnée par la table  $a_i \cdot a_j = \sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} a_k$ . Dans la suite on suppose  $D$  commutatif.  $D$  est dit pondéré s'il existe un homomorphisme (ou fonction de poids)  $x \rightarrow \omega(x)$  de  $D$  dans  $R^{0+}$ , tel que  $x \neq 0$  entraîne  $\omega(x) \neq 0$ . Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'on puisse trouver une base  $(a_i)$ , dite génétique, dont la table de multiplication vérifie:  $\sum_{k=1}^n \gamma_{ijk} = 1$ . Le domaine

$D$  définit par immersion l'algèbre  $A$  des éléments  $x = \sum_{i=1}^n \xi_i a_i$  ( $\xi_i \in R$ ,  $a_i =$  élément d'une base de  $D$ ). La notion de fonction de poids s'étend à  $A$ , avec la propriété suivante: si  $D$  est pondéré dans  $R^+$ , son algèbre  $A$  est pondérée dans  $R$ . Les domaines génétiques  $D$  et leurs algèbres  $A$  se répartissent en domaines et algèbres symétriques, pour lesquels la base génétique est unique, et en domaines et algèbres non symétriques. L'A. donne en terminant une très brève signification biologique des éléments de  $D$  et  $A$ .  
Léonce Lesieur.

Wyler, Oswald: Über einen Rangbegriff in der Theorie der Ringe, speziell der regulären Ringe. *Compositio math.* 9, 193—208 (1951).

Verf. teilt die Elemente eines Ringes  $R$  in Klassen gleichrangiger Elemente ein. Diese Rangdefinition ist am einfachsten durch folgenden Satz gekennzeichnet: Dann und nur dann haben die Elemente  $a$  und  $b$  in  $R$  denselben Rang, wenn es ein Element  $c$  in  $R$  derart gibt, daß  $a$  und  $c$  dasselbe Linksideal und  $b$  und  $c$  dasselbe Rechtsideal in  $R$  erzeugen. Das Element  $r$  in  $R$  ist dann und nur dann regulär [d. h. es gibt ein  $rsr = r$  erfüllendes Element  $s$  in  $R$ ], wenn  $r$  denselben Rang wie ein idempotentes Element hat. Addition der Ränge wird durch die folgende Regel definiert: Sind  $e$  und  $f$  orthogonale Idempotente in  $R$ , so ist der Rang von  $e + f$  die Summe der Ränge von  $e$  und von  $f$ . Die Ränge der Elemente in  $R$  bilden dann ein System mit unvollständiger, aber kommutativer Addition. Das System der Ränge läßt sich dann isomorph in eine additive Mannigfaltigkeit einbetten; und innerhalb dieser additiven Abschließung des Systems der Ränge gilt dann die folgende Verallgemeinerung einer bekannten Rangformel: Ist  $R$  ein regulärer Ring, sind  $a, b, c, d$  Elemente in  $R$  derart, daß  $c$  den Durchschnitt und  $d$  die Summe der von  $a$  und  $b$  erzeugten Linksideale erzeugt, dann ist die Summe der Ränge von  $a$  und  $b$  gleich der Summe der Ränge von  $c$  und  $d$ .  
Reinhold Baer.

Herstein, I. N.: A generalization of a theorem of Jacobson. *Amer. J. Math.* 73, 756—762 (1951).

Jacobson [*Ann. of Math.*, II. Ser. 46, 695—707 (1945)] has proved the following result: if, for each element  $x$  of a ring, there exists an integer  $n(x) > 1$ , such that  $x^{n(x)} = x$ , then the ring is commutative. In the present paper the author obtains this theorem: if  $n > 1$  is an integer and if, for each element  $x$  of a ring,  $x^n - x$  lies in the centre, then the ring is commutative. The proof involves a detailed study of the structure of the ring. The reviewer observes that the theorem is clearly equivalent to the following: for each positive integer  $n > 1$  there exists a positive integer  $k$  and polynomials  $p_i, q_i, r_i, s_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ), with integer coefficients, in the non-commutative indeterminates  $x, y$  ( $p_i, s_i$  may also contain formal unit elements) such that

$$xy - yx = \sum_{i=1}^k p_i \{q_i (r_i^n - r_i) - (r_i^n - r_i) q_i\} s_i$$

is identically true (i. e. true in all rings). It would be interesting to find an elementary proof of this result.  
Shepherdson.



**Artin, Emil and John T. Tate: A note on finite ring extensions.** *J. math. Soc. Japan* **3**, 74–77 (1951).

Grundlegend für die Untersuchungen der Verff. ist der leicht beweisbare Satz: Es sei  $\mathfrak{R}$  ein Noetherscher Ring mit Einheitsselement,  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  eine endliche Ringerweiterung von  $\mathfrak{R}$ , und es bedeute  $\mathfrak{T}$  einen Ring zwischen  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$ , über dem  $\mathfrak{S}$  eine endliche Modulbasis besitzt; dann ist stets auch  $\mathfrak{T}$  eine endliche Ringerweiterung von  $\mathfrak{R}$ . Aus diesem Theorem gewinnt man zunächst in sehr einfacher Weise das folgende Lemma, auf das Zariski seinen Beweis des Hilbertschen Nullstellensatzes stützt: Ist die endliche Ringerweiterung  $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}[\xi_1, \dots, \xi_n]$  des Körpers  $\mathfrak{R}$  selbst ein Körper, so ist  $\mathfrak{S}$  über  $\mathfrak{R}$  algebraisch und es hat infolgedessen  $\mathfrak{S}$  über  $\mathfrak{R}$  eine endliche Modulbasis. Weiter erhält man für einen Noetherschen Integritätsbereich  $\mathfrak{R}$  mit Einheitsselement:  $\mathfrak{R}$  besitzt dann und nur dann einen Körper unter seinen endlichen Ringerweiterungen, wenn der Quotientenkörper  $\mathfrak{K}$  von  $\mathfrak{R}$  zu den endlichen Ringerweiterungen von  $\mathfrak{R}$  gehört. Der Quotientenkörper  $\mathfrak{K}$  ist dann und nur dann eine endliche Ringerweiterung von  $\mathfrak{R}$ , wenn es in  $\mathfrak{R}$  nur endlich viele (von (0) verschiedene) Primideale gibt, die alle in  $\mathfrak{R}$  maximal sind.

*Wolfgang Krull.*

**Cohen, I. S. and I. Kaplansky: Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules.** *Math. Z.* **54**, 97–101 (1951).

Sei  $R$  ein Hauptidealring mit Einselement und mit Minimalbedingung für Linksideale. Dann ist nach einem bekannten Satz von Köthe (dies. Zbl. **10**, 11) jeder  $R$ -Modul eine direkte Summe von zyklischen Moduln. Für einen kommutativen Ring  $R$  hat Köthe auch folgende Umkehrung dieses Resultats bewiesen: Besitzt ein kommutativer Ring  $R$  mit Einselement und mit Minimalbedingung die Eigenschaft, daß jeder  $R$ -Modul eine direkte Summe von zyklischen Moduln ist, so ist  $R$  ein Hauptidealring. Nun gelingt es Verff., dieses Resultat wesentlich zu verschärfen, indem sie zeigen, daß dabei die Annahme der Minimalbedingung überflüssig — nämlich von selbst erfüllt — ist. Der Satz der Verff. lautet also: Ist für einen kommutativen Ring  $R$  mit Einselement jeder  $R$ -Modul eine direkte Summe von zyklischen Moduln, so ist  $R$  ein Hauptidealring mit Minimalbedingung. Der scharfsinnige Beweis enthält manche an sich interessante Hilfssätze, und es wird dabei als ein wichtiges modernes Hilfsmittel die komplette direkte Summe von Ringen angewandt.

*Tibor Szele.*

**Szépál, I.: Über Ringerweiterungen.** *Acta Sci. math.* **14**, 113–114 (1951).

Nach R. Baer (dies. Zbl. **24**, 149) gibt es abelsche Gruppen, die nur als direkter Faktor in umfassenderen abelschen Gruppen enthalten sein können. — Verf. zeigt, daß das Entsprechende für (nicht notwendig kommutative) Ringe nicht gilt und beweist sogar: Zu jedem Ring  $R$  gibt es (1) Ringe  $S$ , so daß  $S$  zwei zu  $R$  isomorphe Ringe enthält, von denen der eine ein Ideal, der andere kein Ideal von  $S$  ist, (2) Ringe  $S'$ , die zwei zu  $R$  isomorphe Ringe enthalten, die beide nicht Ideal von  $S'$  sind.  $S, S'$  werden nach L. Redei (dies. Zbl. **40**, 299) als schiefe Produkte konstruiert. Einer Bemerkung zufolge kann man nicht immer verlangen, daß die Additionsgruppe von  $S, S'$  endlichen Exponenten hat, wenn dasselbe für  $R$  gilt. Verf. will in einer anderen Arbeit darauf näher eingehen.

*Wolfgang Gaschütz.*

**Amitsur, S. A.: Nil Pi-rings.** *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 538–540 (1951).

Im Anschluß an eine Note von L. Levitzki (dies. Zbl. **37**, 306) zeigt Verf.: Sei  $S$  ein Nilring, der einer Polynomidentität genügt, sei  $d$  der Minimalgrad, der durch  $S$  erfüllten Polynomidentitäten und sei  $N$  das Radikal von  $S$ , dann ist  $S/N$  ein nilpotenter Ring, dessen Index höchstens  $\left[\frac{d}{2}\right]$  ist.

*Georg Reichel.*

**Johnson, R. E.: Prime rings.** *Duke math. J.* **18**, 799–809 (1951).

Ein Ring  $R$  heißt ein Primring, wenn sein Nullideal ein Primideal ist; d. h. wenn für zwei Ideale  $a, b$  von  $R$  aus  $a \cdot b = 0$  stets  $a = 0$  oder  $b = 0$  folgt. Verf. stellt sich die Aufgabe, eine Übersicht über die Struktur solcher Primringe zu geben. Die vorliegende Arbeit ist ein erster

Beitrag zu dieser Problemstellung. Neben den Primringen werden gleichzeitig ihre Rechtsmoduln untersucht. Da man auch die additive Gruppe  $R^+$  eines Primringes  $R$  als  $R$ -Rechtsmodul auffassen kann, liefern Sätze über  $R$ -Rechtsmoduln gleichzeitig Sätze über den Primring selbst. Grundlegend für alle Betrachtungen ist der Begriff des Prim-Rechtsideals: Ein Rechtsideal  $I$  eines Ringes  $R$  heißt ein Prim-Rechtsideal, wenn für zwei Rechtsideale  $a, b$  von  $R$  mit  $b \neq 0$  aus  $a \cdot b \subseteq I$  stets  $a \subseteq I$  folgt. Nur nichtkommutative Ringe besitzen nicht-triviale Prim-Rechtsideale. Entsprechende Begriffe werden für  $R$ -Rechtsmoduln definiert: Ein  $R$ -Rechtsmodul heißt prim, wenn für Untermoduln  $N$  und Rechtsideale  $a$  von  $R$  aus  $N \cdot a = 0$  immer  $N = 0$  oder  $a = 0$  folgt. Ein Untermodul  $M'$  von  $M$  heißt ein Prim-Untermodul, wenn aus  $N \cdot a \subseteq M'$  ( $a \neq 0$ ) folgt  $N \subseteq M'$ . Im Falle  $M = R^+$  werden die Prim-Untermoduln gerade durch die additiven Gruppen  $I^+$  der Prim-Rechtsideale  $I$  von  $R$  geliefert. Zu jedem Untermodul  $N$  eines  $R$ -Rechtsmoduls  $M$  (und entsprechend zu jedem Rechtsideal  $I$  von  $R$ ) gibt es einen kleinsten umfassenden Prim-Untermodul  $p(N)$  von  $M$  [bzw. ein umfassendes Prim-Rechtsideal  $p(I)$ ]. Die Zuordnung  $N \rightarrow p(N)$  [bzw.  $I \rightarrow p(I)$ ] stellt eine Hüllenoperation dar. Diese Hüllenzuordnung im System der Rechtsideale von  $R$  ist ein spezielles Beispiel für eine Hüllenbildung  $I \rightarrow I^*$ , die jedem Rechtsideal  $I$  von  $R$  ein Primrechtsideal  $I^*$  als Hülle zuordnet und die folgenden Eigenschaften besitzt: (1)  $I^* \supseteq I$ , (2)  $I^{**} = I^*$ , (3)  $I \supseteq I' \rightarrow I^* \supseteq I'^*$ , (4)  $0^* = 0$ , (5)  $I \cap I' = 0 \rightarrow I^* \cap I'^* = 0$ , (6)  $a \cdot I^* \subseteq (a \cdot I)^*$  ( $a \in R$ ). Die Menge  $\mathfrak{R}$  aller hinsichtlich einer solchen Hüllenoperation abgeschlossenen Rechtsideale ist gegenüber beliebiger Durchschnittsbildung abgeschlossen. Zu den Hülleneigenschaften (1)–(6) wird noch eine weitere Eigenschaft hinzugenommen: (7)  $\mathfrak{R}$  soll (von Null verschiedene) minimale Elemente besitzen. Unter den  $R$ -Rechtsmoduln können gewisse, als zulässig bezeichnete Moduln ausgesondert werden. Ist dann in  $R$  eine Hüllenoperation  $*$  gegeben, die die Eigenschaften (1)–(7) erfüllt, so kann man mit Hilfe dieser auch in jedem zulässigen  $R$ -Rechtsmodul eine Hüllenbildung definieren, die ebenfalls die Eigenschaften (1)–(7) besitzt. Jedem (zulässigen) Prim-Rechtsmodul  $M$  eines Primringes  $R$  (mit Hüllenoperation) läßt sich in bestimmter Weise eine teilweise geordnete Menge  $K$  von „Halbendomorphismen“ zuordnen. Die maximalen Elemente von  $K$  bilden bei geeigneten Festsetzungen einen regulären Ring  $E$ . Das Hauptergebnis der Arbeit besteht dann in dem folgenden Satz: Der Verband aller abgeschlossenen Untermoduln von  $M$  ist isomorph zu dem Verband aller Haupt-Rechtsideale von  $E$ . Ist  $M = R^+$ , so ist  $E$  Rechts-Quotientenring von  $R$ .

Hans-Joachim Kowalsky.

Campbell, H. E.: An extension of the „principal theorem“ of Wedderburn. Proc. Amer. math. Soc. 2, 581–585 (1951).

Soit  $T(\xi)$  la trace d'un élément général  $\xi$  d'une algèbre alternative  $\mathfrak{A}$ . L'A. appelle premier libéral (first liberal) de  $\mathfrak{A}$  l'idéal constitué par les éléments  $x$  pour lesquels  $T(x \cdot y) = 0$ , pour tout  $y \in \mathfrak{A}$ . Soit  $\mathfrak{N}$  le radical de  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{T}'$  le premier libéral de  $\mathfrak{A}/\mathfrak{N}$ . L'idéal  $\mathfrak{T} \supseteq \mathfrak{N}$  de  $\mathfrak{A}$  tel que  $\mathfrak{T}/\mathfrak{N} = \mathfrak{T}'$  est, par définition, le libéral de  $\mathfrak{A}$ ; il possède la propriété d'être l'idéal minimum pour lequel  $\mathfrak{A}/\mathfrak{T}$  soit séparable. L'A. démontre le théorème: Si  $\mathfrak{T}$  est le libéral d'une algèbre alternative quelconque  $\mathfrak{A}$ , il existe une algèbre  $\mathfrak{S}$  telle que  $\mathfrak{A} = \mathfrak{S} + \mathfrak{T}$ ,  $\mathfrak{S} \cong \mathfrak{A}/\mathfrak{T}$ .

Germán Ancochea.

Feldman, Chester: The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. Proc. Amer. math. Soc. 2, 771–777 (1951).

Soient  $A$  une algèbre normée complète sur le corps réel ou complexe,  $R$  le radical de  $A$ . L'A. cherche dans quelles conditions on peut étendre le théorème principal de Wedderburn, c'est-à-dire trouver une sous-algèbre fermée  $S$  de  $A$  telle que l'espace vectoriel  $A$  soit la somme directe de  $R$  et  $S$  (auquel cas l'application canonique de  $S$  sur  $A/R$  sera un isomorphisme bicontinu d'algèbres normées). Il en est ainsi 1. lorsque  $A/R$  est de dimension finie; 2. lorsque  $R$  étant de dimension finie,  $A/R$  vérifie certaines conditions qui ne peuvent être détaillées ici.

Jacques Dixmier.

Jacobson, Nathan: Completely reducible Lie algebras of linear transformations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 105–113 (1951).

Es werden eine Reihe von Sätzen für einen Lieschen Matrizenring  $\mathfrak{Q}$  über einem Körper der Charakteristik 0 bewiesen mit Anwendung auf halbeinfache Jordansche Algebren  $\mathfrak{A}$ . Satz 1.  $\mathfrak{Q}$  ist genau dann vollständig reduzibel, wenn  $\mathfrak{Q}$  direkte Summe seines Zentrums und einem halbeinfachen Unterring ist, und alle Zentrumselemente einfache Elementarteiler haben. Satz 2. Die Kommutatoren von  $\mathfrak{Q}$  mit seinem Radikal liegen im Radikal der assoziativen Hülle von  $\mathfrak{Q}$ . Satz 3.



In einem vollständig reduziblen Ring  $\mathfrak{Q}$  ist jedes nilpotente Element in einem einfachen Unterring dritten Ranges enthalten [Die Sätze 1 und 3 stammen teilweise von W. W. Morozov, C. R. (Doklady) Akad. Sci. URSS, 36, 83—86, 259—261 (1942)]. Jedes Element läßt sich eindeutig aufspalten in  $a = s + n$ , wo  $s$  mit  $n$  vertauschbar ist,  $s$  einfache Elementarteiler hat und  $n$  nilpotent ist. Nach A. Mal'cev [Bull. (Izvestija) Akad. Sci. URSS, Sér. Math. 9, 329—356 (1945)] heißt nun  $\mathfrak{Q}$  aufspaltbar, wenn die genannte Aufspaltung bereits innerhalb  $\mathfrak{Q}$  möglich ist. Satz 4. Wenn jedes nilpotente Element von  $\mathfrak{Q}$  in einem dazu passenden einfachen Unterring dritten Ranges enthalten ist, wenn ferner das Zentrum von  $\mathfrak{Q}$  aufspaltbar ist, so ist  $\mathfrak{Q}$  vollständig reduzibel. Satz 5. Wenn das Zentrum von  $\mathfrak{Q}$  aufspaltbar ist, und  $\mathfrak{Q}$  in einem vollständig reduziblen Ring  $\mathfrak{Q} + \mathfrak{M}$  mit  $[\mathfrak{Q}\mathfrak{M}] \subseteq \mathfrak{M}$  enthalten ist, so ist  $\mathfrak{Q}$  vollständig reduzibel ( $\mathfrak{M}$  ein Modul). Satz 6. Ein vollständig reduzibler Ring ist aufspaltbar. Satz 7. Sind  $\mathfrak{Q}_1 \subseteq \mathfrak{Q}_2$  vollständig reduzible Ringe, so ist auch der Zentralisator von  $\mathfrak{Q}_1$  bezüglich  $\mathfrak{Q}_2$  vollständig reduzibel. Satz 8. Eine Jordansche Algebra  $\mathfrak{A}$  ist genau dann halbeinfach, wenn die Gleichungen  $x^2 a - x(xa) = x$  und  $a^2 x - a(ax) = a$  auflösbar sind ( $a, x$  nilpotent vorausgesetzt). Satz 9. Die Ableitung einer halbeinfachen Jordanschen Algebra  $\mathfrak{A}$  ist vollständig reduzibel.

Ernst Witt.

Mills, W. H.: A theorem on the representation theory of Jordan algebras. Pacific J. Math. 1, 255—264 (1951).

Let  $J$  be a Jordan algebra over a field  $\Phi$  of characteristic neither 2 nor 3; that is, a commutative (non-associative) algebra over  $\Phi$  in which  $(a^2 b) a = a^2 (b a)$  for all  $a, b$ . Then a representation is defined as a linear mapping  $a \rightarrow S_a$  of  $J$  in an associative algebra  $U$  such that, for all  $a, b, c$  from  $J$ , one has  $[S_a S_{bc}] + [S_b S_{ac}] + [S_c S_{ab}] = 0$  and  $S_a S_b S_c + S_c S_b S_a + S_{(ac)b} = S_a S_{bc} + S_b S_{ac} + S_c S_{ab}$ , where  $[AB]$  stands for  $AB - BA$ . — N. Jacobson has proved [Trans. Amer. math. Soc., 70, 509—530 (1951)] the existence of a universal associative algebra  $U$  for  $J$  verifying the conditions: there is a representation  $a \rightarrow S_a$  of  $J$  in  $U$ ,  $U$  is generated by the elements  $S_a$ , and whenever  $a \rightarrow T_a$  is a representation of  $J$ ,  $S_a \rightarrow T_a$  is a homomorphism of  $U$ . — In this paper the author examines the nature of the polynomial identity satisfied by  $S_\alpha$  when  $\alpha$  is an algebraic element of  $J$  and  $a \rightarrow S_a$  is a representation of  $J$ . Assuming that the algebraic element  $\alpha$  of  $J$  satisfies the equation  $f(\alpha) = 0$ , where  $f(x) = \prod (x - \alpha_i)^{n_i}$  is a polynomial with no constant term, and the  $\alpha_i$  are distinct elements of the splitting field  $\Omega$  of  $f(x)$ , the main theorem is based on some preliminary lemmas regarding the positive integers  $S(m, n)$  and the polynomial  $\psi(x)$  defined as follows: when the characteristic  $p$  of the field  $\Phi$  is 0 or  $\geq m + n - 1$ ,  $S(m, n) = m + n - 1$ ; when  $0 < p < m + n - 1$ ,  $S(m, n)$  is the least positive integer  $N$  such that  $\binom{N}{n-1}$  considered as an integer in  $\Phi$  equals 0; and  $\psi(x) = \text{l. c. m. } (x - (\frac{1}{2} \alpha_i - (\frac{1}{2} \alpha_j)^{S(n_i, n_j)})_{i,j}$ .

The main theorem then asserts that  $\psi(S_\alpha) = 0$ , and that  $\psi(x)$  is the minimal polynomial satisfied by  $S_\alpha$  if the following conditions are true: the (commutative) algebra  $U$  generated by the  $S_a$ ,  $a \in J$ , is the universal associative algebra of  $J$ ,  $J$  is generated by  $\alpha$ , and  $f(x)$  is the minimal polynomial of  $\alpha$ .

V. S. Krishnan.

Cohen, Eckford: Sums of products of polynomials in a Galois field. Duke math. J. 18, 425—430 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 34, 21) hat Verf. die Anzahl der Darstellungen eines Elementes  $F$  des Polynomringes  $GF[p^n, x]$  von der Form  $F = \alpha_1 X_1^s Y_1 + \dots + \alpha_m X_m^s Y_m$  ( $\alpha_i \in GF(p^n)$ ,  $X_i, Y_i \in GF[p^n, x]$ ) bestimmt, wobei  $GF(p^n)$  den endlichen Körper mit  $p^n$  Elementen und  $GF[p^n, x]$  den Ring der Polynome der Unbestimmten  $x$  über dem Koeffizientenkörper  $GF(p^n)$  bezeichnet. Nun wird dieses Resultat verallgemeinert auf den Fall, daß an Stelle der konstanten Koeffizienten  $\alpha_i$  gewisse Elemente von  $GF[p^n, x]$  treten.

Tibor Szele.

### Zahlkörper. Funktionenkörper:

Ankeny, N. C. and S. Chowla: The class number of the cyclotomic field. Canadian J. Math. 3, 486—494 (1951).

Es handelt sich um den Kummerschen ersten Faktor  $h_l^*$  der Klassenzahl des Körpers der  $l$ -ten Einheitswurzeln ( $l$  Primzahl), also um die Relativklassenzahl

dieses Körpers über seinem größten reellen Teilkörper. Bekanntlich ist

$$h_l^* = A_l \cdot \prod_{\chi(-1)=-1} L(1|\chi) \quad \text{mit} \quad A_l = 2l \cdot \left(\frac{\sqrt{l}}{2\pi}\right)^{(l-1)/2},$$

wo  $\chi$  die  $\frac{1}{2}(l-1)$  ungeraden Restklassencharaktere mod.  $l$  durchläuft. Kummer vermutete die asymptotische Gleichheit  $h_l^* \sim A_l$ . Verff. beweisen in dieser Richtung die Abschätzung

$$A_l l^{-\epsilon} < h_l^* < A_l l^{\epsilon} \quad \text{für} \quad l > l_0(\epsilon),$$

aus der jedenfalls  $h_l^* \rightarrow \infty$  für  $l \rightarrow \infty$  folgt. Letzteres war mit weniger scharfer Restabschätzung bereits durch R. Brauer (dies. Zbl. 38, 176) festgestellt worden. Die hier gegebene schärfere Restabschätzung erlaubt den Schluß, daß  $h_l^*$  von einer Stelle an monoton wächst. Verff. beweisen ferner, daß aus der Richtigkeit der Kummerschen Vermutung die folgende Abschätzung für den Logarithmus des obigen  $L$ -Reihenprodukts folgen würde:

$$\sum_p \frac{X(p)}{p} = O\left(\frac{1}{l}\right) \quad \text{mit} \quad X(p) = \frac{2}{l-1} \sum_{\chi(-1)=-1} \chi(p) = \begin{cases} 1 & \text{für } p \equiv 1 \pmod{l} \\ -1 & \text{für } p \equiv -1 \pmod{l} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Schließlich beweisen Verff., unter Annahme der Riemannschen Vermutung für die  $L(s|\chi)$ , daß bei gegebenen  $\theta_1, \theta_2$  und  $\epsilon > 0$  zu jedem  $l$  ein  $\chi_l$  derart existiert, daß  $|L(s|\chi_l)| < 1 + \epsilon$  im Intervall  $\frac{1}{2} < \theta_1 < s < \theta_2 < 1$  für alle  $l > l_0(\epsilon)$  gilt, ein Resultat, das mit  $\sqrt{\zeta(2s)} + \epsilon$  statt  $1 + \epsilon$  von A. Selberg [Skr. Norske Vid.-Akad. Oslo, I, 1946<sub>3</sub>] ohne Riemannsche Vermutung bewiesen wurde.

Helmut Hasse.

Ankeny, Nesmith C.: An improvement of an inequality of Minkowski. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 711—716 (1951).

Nach Minkowski genügt der Diskriminantenbetrag  $d$  eines algebraischen Zahlkörpers  $K$  vom Grade  $n$  einer Ungleichung  $\log \sqrt[n]{d} > c$  mit einer von  $n$  unabhängigen Konstanten  $c > 1$ . Nach einer Bemerkung von Artin (nicht erst, wie Verf. angibt, von Herbrand) würde zur Bestätigung der Hilbertschen Vermutung über den Klassenkörperturn eine Verschärfung der Minkowskischen Abschätzung zu  $\log \sqrt[n]{d} > f(n)$  mit  $f(n) \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  genügen. Verf. beweist eine in dieser Richtung liegende Aussage, daß nämlich für  $r$ -stufig metabelsche Zahlkörper  $K$  die Ungleichung  $\log \sqrt[n]{d} > b \log_r n$  gilt, wo  $\log_r n$  der  $r$ -mal iterierte Logarithmus und  $b$  eine von  $n$  unabhängige positive Konstante ist. Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion über die  $r$  relativ-abelschen Stufen, unter Benutzung des Führerdiskriminantensatzes der Klassenkörpertheorie zur Aufspaltung der Relativdiskriminanten.

Helmut Hasse.

Weil, André: Arithmetic on algebraic varieties. Ann. of Math., II. Ser. 53, 412—444 (1951).

Verf. schreibt in seinem Vorwort: „Northcott has recently contributed some interesting new theorems to a subject which I introduced in my thesis under the above given title, and which had been further developed by Siegel and myself. It is my purpose here, by making explicit some concepts which had remained implicit in these papers, to supply what seems to be the proper algebraic foundations for that theory, and to give a comprehensive account of its results, including some new ones, up to date.“ Er bezieht sich dabei der Reihe nach auf die folgenden Arbeiten: [1] Northcott, dies. Zbl. 35, 307; [2] Weil, Acta math. 52, 281—315 (1928); [3] Siegel, Abh. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, Phys.-Math. Klasse, 1929 Nr. 1; [4] Weil, dies. Zbl. 11, 246. Die obigen Sätze im Verein mit diesen Literaturangaben kennzeichnen die Stellung der vorliegenden Arbeit im Gefüge der arithmetischen Theorie algebraischer Mannigfaltigkeiten und zeigen, daß es sich um



eine grundlegende und gleichzeitig zusammenfassende Darstellung handelt. Bezüglich der verwendeten geometrischen Begriffe verweist Verf. auf sein Buch „Foundations of algebraic geometry“ (Amer. math. Soc. Colloq. Publ. Nr. 29, New York 1946); allerdings kommt gerade der Hauptteil dieses Buches, nämlich die allgemeine Durchschnittstheorie algebraischer Mannigfaltigkeiten, hier nicht wesentlich zur Anwendung, sondern es handelt sich größtenteils um arithmetische Untersuchungen von Funktionenkörpern. Insbesondere findet sich in dieser Arbeit eine neue Begründung und Erweiterung der Distributionenlehre algebraischer Funktionenkörper, welche die ursprünglich vom Verf. in [2] und dann in [4] gegebene Darstellung infolge systematischer Verwendung der Krullschen allgemeinen Bewertungstheorie bei weitem an Durchsichtigkeit übertrifft. Die Northcottschen Sätze [1] sowie die von Siegel [3] (gelegentlich des Beweises der Anzahllendlichkeit der ganzalgebraischen Punkte auf einer algebraischen Kurve höheren Geschlechts) aufgestellten fundamentalen Abschätzungen ergeben sich jeweils als Spezialfälle aus viel allgemeineren Theoremen, wie überhaupt alle Definitionen, Sätze und Bemerkungen des Verf. sehr allgemein gehalten sind. Die Beweise sind stets soweit ausgeführt, daß sie sich der Leser ohne Mühe selbst vervollständigen kann.

Die Arbeit gliedert sich folgendermaßen in fünf Kapitel und einen Anhang: I. The algebraic foundations. II. Absolute values, distributions, heights. III. The decomposition theorem. IV. The case of curves. V. Valuation functions and local ideals; Appendix: Divisorial valuations. Im ersten Kapitel findet sich neben einer Darstellung elementarer Tatsachen aus der Krullschen Bewertungstheorie und verwandter Sätze insbesondere die Definition des für alles Folgende wichtigen Begriffes der Bewertungsfunktionen in einem Körper  $K$ . Dieser ist in gewisser Hinsicht eine Verallgemeinerung des aus der Primzerlegung der Elemente gewonnenen Divisorbegriffes in algebraischen Zahlkörpern oder in Funktionenkörpern vom Transzendenzgrad 1, indem bei der Primzerlegung der Elemente  $x$  aus  $K$  nicht nur die speziellen Bewertungen mit archimedischer Wertgruppe, sondern auch die allgemeinen Krullschen Bewertungen mit berücksichtigt werden. So stellt sich eine „Primzerlegung“ von  $x$  als eine Funktion  $[x]$  dar, welche jeder allgemeinen Bewertung  $\omega$  den  $x$  bei  $\omega$  zukommenden Wert  $\omega(x)$  zuordnet, und aus diesen besonderen Bewertungsfunktionen  $[x]$  entstehen durch mehrfache Bildung des größten gemeinsamen Teilers und kleinsten gemeinsamen Vielfachen [welche Prozesse ja infolge der Ordnung der Wertgruppen  $\omega(K)$  unbeschränkt ausgeführt werden können] diejenigen Bildungen, die vom Verf. die Bewertungsfunktionen in  $K$  genannt werden. Durchläuft dabei  $\omega$  im Falle eines algebraischen Funktionenkörpers  $K/k$  von endlichem Transzendenzgrad  $r$  alle  $k$  identisch bewertenden Bewertungen von  $K$ , so ist, wie im Anhang gezeigt wird, die entstehende Gruppe  $F(K/k)$  von Bewertungsfunktionen in natürlicher Weise zur Gruppe  $F_r(K/k)$  isomorph, welche man aus  $F(K/k)$  durch Weglassung aller Bewertungen vom Transzendenzgrad  $< r-1$  unter alleiniger Beibehaltung der Bewertungen vom Transzendenzgrad  $r-1$  (der „divisorial valuations“) erhält. Jedoch scheint es gerade ein Fortschritt zu sein, auch Bewertungen niedrigeren Transzendenzgrades, insbesondere vom Transzendenzgrad 0 und 1, mit in den Kreis der Betrachtung einzubeziehen. — Das zweite Kapitel beginnt mit der Definition eines absoluten Betrages eines Körpers  $K$ , worunter Verf. eine multiplikative und der Dreiecksungleichung genügende Funktion der Körperelemente versteht, deren Werte positive reelle Zahlen einschließlich 0 und  $+\infty$  sind; sie stellen also eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen reellwertigen multiplikativen Bewertungen in der Hinsicht dar, daß als Wert auch  $+\infty$  zugelassen wird. Im Falle eines Zahlkörpers gibt es außer den als multiplikative reellwertige Bewertungen aufgefaßten endlichen und unendlichen Primstellen nur noch gewisse außerhalb der Betrachtung bleibende absolute Beträge; dies ist jedoch anders bei einem algebraischen Funktionenkörper  $K$  über einem Zahlkörper als Konstantenkörper. Im letzteren Falle sind im Hinblick auf die Distributionenlehre besonders diejenigen absoluten Beträge wichtig, welche je aus dem Restklassenhomomorphismus  $f$  einer nulldimensionalen Krullschen Bewertung von  $K$  und einer Primstelle  $p$  des Restklassenkörpers in der Weise entstehen, daß jedem Element  $x$  aus  $K$  der Wert von  $f(x)$  bei  $p$  zugeordnet wird. Die absoluten Beträge von  $K$  werden dann zur Konstruktion der Distributionen in derselben Weise herangezogen, wie die Bewertungen zur Konstruktion der Bewertungsfunktionen. Der Zusammenhang zwischen Bewertungsfunktionen und Distributionen wird dadurch hergestellt, daß die ersteren in natürlicher Weise homomorph auf die letzteren bezogen werden können, wenn man „quasigleiche“ Distributionen nicht unterscheidet. Der Name „Distribution“ trifft jedoch hier noch nicht ganz das, was man bisher gemäß den Arbeiten [2] und [4] des Verf. darunter verstand; erst im dritten Kapitel werden aus diesen allgemeinen Distributionen gewisse Funktionen konstruiert, welche den absolut-algebraischen Punkten  $P$  einer über einem Zahlkörper  $k$  definierten Mannigfaltigkeit Divisoren der Koordinatenkörper  $k(P)$  zuordnen, und welche man leicht als Distributionen im bisherigen Sinne erkennt. Auch der Beweis des Haupt-

satzes der Distributionenlehre („decomposition theorem“, S. 433) wird in das dritte Kapitel verlegt, während im Rest des zweiten Kapitels noch die Northcottschen Resultate ([1] S. 505, S. 512) hergeleitet werden. Bemerkenswert ist, daß Verf. diese Sätze ohne Zuhilfenahme des Hauptsatzes der Distributionenlehre beweist, und daß daher auch die von Northcott noch gemachte Voraussetzung der Singularitätenfreiheit der untersuchten Mannigfaltigkeit fallen gelassen werden kann. Hilfsmittel zum Beweis ist der Begriff der „Höhe“ eines homogenen Zahlensystems, welche aus der von Hasse (dies. Zlb. 21, 296) so genannten Zahl durch Wurzelziehung entsteht und dadurch wie die Northcottsche „Komplexität“ unabhängig von dem das Zahlensystem enthaltenden Zahlkörper wird. Formal elegant ist, daß bei der Definition der Höhe eines Zahlensystems  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  die endlichen und unendlichen Primstellen in gleicher Weise berücksichtigt werden; die Höhe wird nämlich durch

$$H(\alpha_0, \dots, \alpha_n) = \sqrt[r]{11 \max_p (|\alpha_0|_p, \dots, |\alpha_n|_p)}$$

definiert, wo  $p$  die sämtlichen Primstellen eines  $\alpha_0, \dots, \alpha_n$  enthaltenden Zahlkörpers vom Absolutgrad  $r$  durchläuft und  $|\cdot|_p$  die zugehörige, im Sinne der Produktformel normierte multiplikative Bewertung bedeutet. — Nachdem im dritten Kapitel die Distributionen im bisherigen Sinne konstruiert sind und für diese der Hauptsatz der Distributionenlehre bewiesen ist (auch hier sind Vereinfachungen gegenüber [2] und [4] festzustellen), werden im vierten Kapitel die erhaltenen Resultate auf den Fall einer Kurve bzw. eines Funktionenkörpers vom Transzendenzgrad 1 angewandt. Hier vereinfachen sich manche Aussagen, weil erstens die Bewertungsfunktionen mit den Divisoren zusammenfallen, und weil zweitens der Riemann-Rochsche Satz zur Verfügung steht. Es ergeben sich insbesondere hier die beiden Siegelschen fundamentalen Abschätzungen aus [3]. — Das fünfte Kapitel fällt etwas aus dem Rahmen der Arbeit. In ihm soll für gewisse in Kap. I eingeführte Begriffe eine Rechtfertigung gegeben werden, wobei es sich um einen Zusammenhang der Divisoren einer Mannigfaltigkeit mit den Bewertungsfunktionen des zugehörigen Funktionenkörpers handelt. Es werden dazu einige idealtheoretische Überlegungen angestellt. — Die Arbeit enthält noch weitere methodisch und sachlich interessante Einzelheiten, die natürlich nicht alle referiert werden konnten. Es sei jedoch noch erwähnt, daß (im dritten Kapitel) der Versuch gemacht wird, eine durch eine multiplikative Bewertung abstrakt gegebene Topologie des Grundkörpers  $k$  auf die über  $k$  definierten algebraischen Mannigfaltigkeiten auszudehnen, welche dann als topologische Räume erscheinen. Dies scheint auch im Falle diskreter nichtarchimedischer Bewertungen des Grundkörpers beachtenswert zu sein.

Helmut Hasse — Peter Roquette.

## Zahlentheorie:

Srinivasan, M. S.: Some properties of squares of integers. Math. Student 19, 59—61 (1951).

Škrebilin, Stjepan: Détermination de la longueur de période d'une fraction. Soc. Sci. natur. Croatica, Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 6, 165—171 und französ. Zusammenfassg. 171 (1951) [Serbo-kroatisch].

Maxfield, Margarete Waugh: The order of a matrix under multiplication (modulo  $m$ ). Duke math. J. 18, 619—621 (1951).

Let  $m$  be a positive integer. The author found the order of an  $n$ -rowed non-singular matrix with integer coefficients, mod  $m$ . Loo-Keng Hua.

Davis, Alex S.: The Euler-Fermat theorem for matrices. Duke math. J. 18, 613—617 (1951).

Let  $m$  be a positiv integer. The author found the least exponent  $w$  such that every  $n$ -rowed non-singular matrix  $A$  satisfies  $A^w \equiv I \pmod{m}$ . Loo-Keng Hua.

Apostol, T. M. and Herbert S. Zuckerman: On magic squares constructed by the uniform step method. Proc. Amer. math. Soc. 2, 557—565 (1951).

Um ein magisches Quadrat von  $n^2$  Feldern herzustellen, kann man die Zahlen 1, 2, ... in Felder eintragen, die durch dieselbe wiederholte Verschiebung (mod  $n$ ) auseinander hervorgehen, oder ersatzweise durch eine zweite, falls die erste auf ein schon besetztes Feld führt. Die genauen Bedingungen dafür, daß das Quadrat durch ein solches Verfahren sowohl gefüllt, als auch magisch wird, werden abgeschwächt und die Eigenschaften einer dritten dann erforderlichen Verschiebung sowie der erzeugten Zahlenquadrate untersucht.

R. Sprague.



**Brandt, Heinrich:** Über das quadratische Reziprozitätsgesetz im rationalen Zahlkörper. *Math. Nachr.* 6, 125—128 (1951).

Verf. gibt eine neuartige Formulierung der quadratischen Reziprozitätsgesetze, die auch die Ergänzungssätze umfaßt. *Sigmund Selberg.*

**Dénes, Peter:** An extension of Legendre's criterion in connection with the first case of Fermat's last theorem. *Publ. math., Debrecen* 2, 115—120 (1951).

Für den sogenannten 1. Fall der Fermatgleichung  $(1) x^l + y^l + z^l = 0$  (d. h.  $l \nmid xyz$ ) bewies Furtwängler ihre Unmöglichkeit, falls eine der Zahlen  $ul + 1$  für  $u = 2, 4, 8, 10$  wieder Primzahl ist. Verf. erweitert dieses Resultat auf  $u = 14, 16, 20, 22, 26, 28, 32, 34, 38, 40, 44, 46, 50, 52, 56, 58, 62, 64, 68, 70, 74, 76, 80, 82, 86, 88, 92, 94, 98, 100, 110$ . Der Beweis wird im Körper  $P(\varrho)$  ( $P$  Körper der rationalen Zahlen,  $\varrho$  primitive  $u$ -te Einheitswurzel) geführt und basiert auf dem Hilfssatz „Seien  $l, ul + 1 = p$  ungerade Primzahlen,  $(u, l) = 1$ ; wenn für beliebige  $a, b$  stets  $(2) 1 + \varrho^a + \varrho^b \not\equiv 0 \pmod{p}$  ( $p$  Primidealteiler von  $p$ ), so ist (1) unmöglich im 1. Fall“. Der Beweis ergibt sich unschwer in Verbindung mit dem Furtwänglerschen Kriterium  $p^l \equiv p \pmod{l^2}$ . Für (2) ist offenbar hinreichend  $0 < N(1 + \varrho^a + \varrho^b) < p$  [ $N$  bedeutet die Norm in  $P(\varrho)$ ]. Die numerische Diskussion beruht alsdann im wesentlichen auf der Normabschätzung:  $N(1 + \varrho^a + \varrho^b) \leq \sqrt[4]{N(2 + \varrho^a)N(2 + \varrho^b)N(2 + \varrho^{a-b})}^{3\varphi(u)} = W$  [ $\varphi(u)$  ist die Eulersche Funktion], d. h. auf  $W < p$ , sowie auf Heranziehung der von D. H. Lehmer gegebenen notwendigen Bedingung  $l \geq 253747899$  für die Lösbarkeit im 1. Fall.

*Hans-Heinrich Ostmann.*

**Roth, K. F.:** On Waring's problem for cubes. *Proc. London math. Soc., II. Ser.* 53, 268—279 (1951).

The paper contains the proof of the following theorems: (1) Almost all positive integers  $u$  are representable in the form  $u = p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 + x^3$ , where  $p_1, p_2, p_3$  are primes and  $x$  is a positive integer and (2) All large integers  $u$  are representable in the form  $u = p_1^3 + \dots + p_7^3 + x^3$ , where  $p_1, \dots, p_7$  are primes and  $x$  is a positive integer. The method depends essentially on the following facts: Let  $f_1(\alpha) = \sum_{n^{1/3} \leq x \leq 2n^{1/3}} e(\alpha x^3)$ ,  $f_1^*(\alpha) = \sum_{n^{1/3} \leq p \leq 2n^{1/3}} e(\alpha p^3)$ ,  $f_2(\alpha) = \sum_{n^{4/15} \leq x \leq 2n^{4/15}} e(\alpha x^3)$ ,  $f_2^*(\alpha) = \sum_{n^{4/15} \leq p \leq 2n^{4/15}} e(\alpha p^3)$ . By Hölder inequality, we have

$$\begin{aligned} \int_E |f_1 f_1^* f_2^{*2}|^2 d\alpha &\leq \left( \int_0^1 |f_1 f_1^*|^2 d\alpha \right)^{1/3} \left( \int_0^1 |f_2^{*2}|^2 d\alpha \right)^{1/3} \left( \int_E |f_1|^6 d\alpha \right)^{1/3} \\ &\leq \left( \int_0^1 |f_1 f_2^4|^2 d\alpha \right)^{1/3} \left( \int_0^1 |f_2^2|^2 d\alpha \right)^{1/3} \left( \int_E |f_1|^6 d\alpha \right)^{1/3}, \end{aligned}$$

where  $E$  is a certain subset in the interval  $(0, 1)$ . By a lemma due to Davenport and the classical method on Waring's problem, the author proved that the first term is  $O(n^{9/5})$  and the second  $O(n^{7/5})$  and the third  $O(n(\log n)^{-l})$ , where  $l$  is a positive integer.

*Loo-Keng Hua.*

**Venkataraman, C. S.:** An order result relating to the number of divisors of  $n$  in an arithmetic progression. *Math. Student* 18, 19—21 (1951).

The author proves the following theorem: If  $d'(n)$  denotes the number of divisors of  $n$ , in the form  $ar + b$  ( $r = 0, 1, 2, \dots$ ), then

$$\sum_{n=1}^x d'(n) = \frac{x \log x}{a} + \alpha x + O(\sqrt{x}),$$

where  $\alpha$  is an absolute constant. This is a generalization of the well-known divisor problem. By the methods of Vinogradov and van der Corput it seems to have no difficulty to obtain a better error term than  $O(x^{1/2})$ .

*Loo-Keng Hua.*

Tatuzawa, Tikao and Kanetsiroo Iseki: On Selberg's elementary proof of the prime-number theorem. Proc. Japan Acad. 27, 340—342 (1951).

Der von A. Selberg angegebene sog. elementare Beweis des Primzahlsatzes  $\pi(x) \sim x/\log x$  ging aus von dem asymptotischen Verhalten

$$\vartheta(x) \log x + \sum_{p \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p}\right) \log p = 2x \log x + O(x).$$

Für den gleichen Zweck wird hier

$$\psi(x) \log x + \sum_{p^v \leq x} \vartheta\left(\frac{x}{p^v}\right) \log p = 2x \log x + O(x)$$

in einfacher Weise hergeleitet. Dabei bedeutet wie üblich

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1, \quad \vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p, \quad \psi(x) = \sum_{p^v \leq x} \log p.$$

Ernst Witt.

Siegel, Carl Ludwig: Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie. I. Math. Ann. 124, 17—54 (1951).

Es sei  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$  eine nicht ausgeartete indefinite quadratische Form, die sich reell in  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] = y_1^2 + \dots + y_n^2 - y_{n+1}^2 - \dots - y_m^2$  transformieren lasse. Dieser Form wird die positiv definite „Majorante“  $\mathfrak{P}[\mathfrak{x}] = y_1^2 + \dots + y_n^2 + y_{n+1}^2 + \dots + y_m^2$  zugeordnet. Kennzeichnend für die Majoranten ist die Matrizenrelation  $\mathfrak{P} \mathfrak{S}^{-1} \mathfrak{P} = \mathfrak{S}$ , die im Raum der positiven symmetrischen  $\mathfrak{P}$  eine  $n(m-n)$ -dimensionale Mannigfaltigkeit  $P = P(\mathfrak{S})$  mit rationaler Parameterdarstellung definiert (s. Verf., dies. Zbl. 23, 7). Die orthogonale Gruppe  $\Omega$  von  $\mathfrak{S}$  besteht aus den reellen Transformationen  $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{B} \mathfrak{x}$ , wobei  $\mathfrak{S}[\mathfrak{B} \mathfrak{x}] = \mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$  ist.  $\Omega$  induziert in  $P$  die Gruppe der Transformationen  $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{B}]$ , die als Bewegungen bezüglich einer gewissen Riemannschen Metrik aufgefaßt werden können. Jede diskrete Untergruppe von  $\Omega$  ist auf  $P$  diskontinuierlich. — Im folgenden wird vorausgesetzt, daß die Matrix  $\mathfrak{S}$  und der Spaltenvektor  $\mathfrak{a}$  so gewählt sind, daß die quadratische Funktion  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}] + 2\mathfrak{a}'\mathfrak{x}$  ganzwertig ist. Weiter sei  $m > 3$  und im Falle  $m = 4$  nicht zugleich  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}]$  eine Nullform und  $|\mathfrak{S}|$  ein Quadrat. Mit  $z = x + iy$  ( $x, y$  reell,  $y > 0$ ),  $\mathfrak{R} = x \mathfrak{S} + i y \mathfrak{P}$  wird

$$f_{\mathfrak{a}}(z, \mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{x}} e^{2\pi i \mathfrak{R}[\mathfrak{x} + \mathfrak{a}]}$$

gebildet, wobei über alle ganzen  $\mathfrak{x}$  zu summieren ist. Diese Reihen verhalten sich gegenüber den Modulsstitutionen  $\mathfrak{M}z = (az + b)(cz + d)^{-1}$  ähnlich wie Modulformen. Es wird

$$(cz + d)^{-n/2} (c\bar{z} + d)^{(n-m)/2} f_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{M}z, \mathfrak{P}) = \sum_{\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\mathfrak{M}) f_{\mathfrak{b}}(z, \mathfrak{P})$$

mit gewissen Koeffizienten  $\lambda_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\mathfrak{M})$  bewiesen.  $\mathfrak{b}$  durchläuft ein volles System von zulässigen Spaltenvektoren, die zu verschiedenen Funktionen  $f_{\mathfrak{b}}(z, \mathfrak{P})$  führen. Es bezeichne  $s$  den absoluten Betrag der Determinante  $|2\mathfrak{S}|$  und  $\Gamma$  die Gruppe der Substitutionen  $\mathfrak{P} \rightarrow \mathfrak{P}[\mathfrak{U}]$ , die den Einheiten  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{S}$  mit  $\mathfrak{U} \equiv \mathfrak{E} \pmod{2s}$  entsprechen ( $\mathfrak{E}$  = Einheitsmatrix). Ferner sei  $dv$  das invariante Volumelement in  $P$ ,  $F$  ein Fundamentalbereich von  $\Gamma$  in  $P$  und  $V$  sein Volumen. Die

Invarianz von  $f_{\mathfrak{a}}(z, \mathfrak{P})$  gegenüber  $\Gamma$  legt die Mittelbildung  $\varphi_{\mathfrak{a}}(z) = \frac{1}{V} \int_F f_{\mathfrak{a}}(z, \mathfrak{P}) dv$  nahe. Die

Einschränkungen bezüglich  $\mathfrak{S}$  mußten vorgenommen werden, um die Existenz des Integrals zu garantieren. Es folgt dann

$$(cz + d)^{-n/2} (c\bar{z} + d)^{(n-m)/2} \varphi_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{M}z) = \sum_{\mathfrak{b}} \lambda_{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}(\mathfrak{M}) \varphi_{\mathfrak{b}}(z).$$

Die Funktionen  $\varphi_{\mathfrak{a}}(z)$  gestatten Fourierentwicklungen der Art

$$(1) \quad \varphi_{\mathfrak{a}}(z) = \gamma + \sum_{t \in \mathfrak{a} \pmod{1}} \alpha_t k_t(y; m, n) e^{2\pi i t x}.$$

Hierin ist  $k_t(y; m, n)$  eine Funktion, die in einfacher Weise mit der konfluenten hypergeometrischen Funktion zusammenhängt,  $\gamma = 1$  oder  $0$  je nachdem  $\mathfrak{a}$  ganz oder nicht ganz ist und

$$\alpha_t = \frac{\pi^{m/2} S^{-1/2} M(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}, t)}{\Gamma(n/2) \Gamma(m/2 - n/2) \mu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{S})}, \quad S = \text{absoluter Betrag von } |\mathfrak{S}|, \text{ wobei } M(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}, t) \text{ ein Maß für}$$

die Darstellungen von  $t$  durch  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x} + \mathfrak{a}]$  und  $\mu_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{S})$  ein Maß für die Gruppe  $\Gamma_{\mathfrak{a}}$  der Einheiten  $\mathfrak{U}$  von  $\mathfrak{S}$  mit  $\mathfrak{U}\mathfrak{a} \equiv \mathfrak{a} \pmod{1}$  bezeichnet. Hinsichtlich der Definition von  $M(\mathfrak{S}, \mathfrak{a}, t)$  ist zu beachten, daß es zu jeder Darstellung von  $t$  durch  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x} + \mathfrak{a}]$  unendlich viele äquivalente gibt; man erhält diese, indem man auf  $\mathfrak{x} + \mathfrak{a}$  die Einheiten  $\mathfrak{U} \in \Gamma_{\mathfrak{a}}$  anwendet. Ist  $t \neq 0$ , so gibt es nur endlich viele Klassen äquivalenter Darstellungen. Jeder Klasse wird ein positives Gewicht



geeignet zugeordnet. Mit  $M(\mathfrak{S}, a, t)$  wird die Summe dieser Gewichte bezeichnet. — Das Hauptergebnis der Arbeit ist die Partialbruchentwicklung

$$(2) \quad \varphi_a(z) = \gamma + \sum_r \gamma(r)(z-r)^{-n/2}(\bar{z}-r)^{(n-m)/2},$$

wobei über alle rationalen Zahlen  $r = a/b$  ( $a, b$  teilerfremd,  $b > 0$ ) summiert wird und

$$\gamma(r) = e^{2\pi i(2m-m)/4} s^{-1/2} b^{-m} \sum_{\mathfrak{x} \bmod b} e^{2\pi i \mathfrak{x} \mathfrak{S}[\mathfrak{x}+a]}$$

gesetzt ist. Der Beweis von (2) beruht auf folgenden Tatsachen: Die Partialbruchreihe verhält sich bezüglich der Modulsstitutionen wie  $\varphi_a(z)$ ; sie läßt sich ebenfalls in eine Fourierreihe vom Typus (1) entwickeln und zeigt in den rationalen Spitzen  $r$  dasselbe asymptotische Verhalten wie  $\varphi_a(z)$ . Diese Eigenschaften sind kennzeichnend für die Funktionen und führen zur Identität (2). Im Fall  $m > 4$  kann dies relativ einfach auf Grund des funktionentheoretischen Verhaltens der konfluenten hypergeometrischen Funktion festgestellt werden. Der Fall  $m = 4$  erfordert eine andere Schlußweise. Hier benutzt Verf. in scharfsinniger Weise partielle Differentialgleichungen, die die Anwendung des Maximumprinzips gestatten. — Entwickelt man die Partialbruchreihe in eine Fourierreihe und vergleicht man die Fourierkoeffizienten mit denen von  $\varphi_a(z)$ , so ergibt sich die folgende bemerkenswerte Formel

$$(3) \quad M(\mathfrak{S}, a, t) = \mu_a(\mathfrak{S}) \prod_p \delta_p(\mathfrak{S}, a, t) \text{ für } t \equiv \mathfrak{S}[a] \pmod{1}.$$

Das Produkt ist über alle Primzahlen  $p$  zu erstrecken.  $\delta_p(\mathfrak{S}, a, t)$  bezeichnet die  $p$ -adische Lösungsdichte, die sich aus den Kongruenzlösungsanzahlen von  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}+a] \equiv t \pmod{p^k}$ ,  $k \geq 1$ , ableitet. Die Formel (3) stellt im Falle  $a = 0$ ,  $t = 0$  eine quantitative Verfeinerung eines bekannten Satzes von Hasse und Meyer über Nullformen dar. Die Verallgemeinerung dieses Satzes lautet nun:  $t$  wird durch  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}+a]$  dann und nur dann rational ganzzahlig dargestellt, wenn für jede Primzahl  $p$  die Gleichung  $\mathfrak{S}[\mathfrak{x}+a] \equiv t \pmod{p}$   $p$ -adisch ganzzahlig lösbar ist, und zwar nichttrivial im Falle  $t = 0$ . Mit einer Modifikation im Beweisgang wird schließlich noch gezeigt, daß (3) auch noch für Quaternionen-Nullformen gilt. — In einer älteren Arbeit des Verf. [Ann. of Math., II. Ser. 45, 577–622 (1944)] trat das in (3) für  $a = 0$  und  $m > 4$  ausgesprochene Ergebnis als Spezialfall auf. Die vorliegenden Untersuchungen lassen sich auf das analoge Problem der Darstellung von Formen durch indefinite Formen verallgemeinern. Auch können an Stelle des rationalen Zahlkörpers beliebige algebraische Zahlkörper und involutorische Algebren endlichen Grades über dem Körper der rationalen Zahlen treten. Hierüber wird im zweiten Teil der Arbeit berichtet.

Hans Maaß.

**Segre, Beniamino: On the rational solutions of homogeneous cubic equations in four variables.** Math. Notae II, 1–68 (1951).

This paper is concerned with the following problems, denoting by  $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$  a quaternary cubic form with rational coefficients: 1. To give conditions for the cubic surface  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$  to contain rational points. 2. To determine all or some of the existing rational points on  $F$ , and to study the figure formed by such points. 3. Problems deducible from each of 1. and 2. by substituting for the word „points“ the expression „set of  $n$  points“ or „curves of an assigned type“. Throughout the paper it is assumed that  $F$  is non-singular. The case  $F$  singular is treated of in the authors previous paper: London math. Soc. 19, 84–91 (1944). Concerning the existence of rational points the following result is proved: Any rational cubic surface contains either no rational points or an infinity of rational points, both cases being possible. In the paper the word rational is used in the sense that algebraic surfaces, or curves or point-sets are definable over the field of rational numbers. On any non-singular cubic surface  $F$  — considered in the complex domain — there are always 27 lines, 216 doublets, 720 triplets and 72 sextuplets; doublets, triplets and sextuplets meaning respectively sets of 2, 3 and 6 lines, two by two skew. Indicating as the condition  $q_1$  or  $q_2$ , or  $q_3$ , or  $q_6$  the existence of (at least) one rational line, or doublet, or triplet, or sextuplet on  $F$  the author proves: A necessary and, sufficient condition for a rational cubic surface  $F$  to contain a non-trivial rational curve, i. e. curves which are not obtained as the complete intersection of  $F$  with another rational surface, is that at least one of the conditions  $q_1, q_2, q_3, q_6$  should be satisfied by  $F$ . To verify whether such a condition is satisfied or not, implies only a finite number of arithmetical operations on the coefficients of  $F$ . Further results are given for special types of such curves. The conditions  $q_1, q_2, q_3, q_6$  are also significant for the problems 1. and 2. by virtue of the following two theorems: A rational cubic surface  $F$  contains an infinity of rational points, if  $F$  satisfies one of the conditions  $q_1, q_2, q_6$  and moreover if, in the last case, it satisfies the further condition of containing one rational point. In the last two cases, all the rational points of the surface can be obtained by expressing their coordinates  $x_1, x_2, x_3, x_4$  as rational polynomials in three homogeneous parameters, of degrees 4 and 3 respectively. If none of the conditions  $q_1, q_2, q_3, q_6$  holds, then it is impossible to express the homogeneous coordinates  $x_1, x_2, x_3, x_4$  of a point of  $F$  as rational polynomials in three homogeneous parameters, such that there is a (1, 1)-correspondence between

the points of  $F$  and the parameters. — These general methods and results are applied to the equianharmonic surfaces  $a_1 x_1^3 + a_2 x_2^3 + a_3 x_3^3 + a_4 x_4^3 = 0$ . Theorems concerning this equation as well as the most important general results in this paper, are announced in the authors previous paper: London math. Soc. 19, 24–31 (1943). The proofs are based on ingenious geometrical considerations.

Wilhelm Ljunggren.

Richardson, A. R.: Compositions involving ternary cubics. Duke math. J. 18, 595–598 (1951).

In der Arbeit werden mehrere Identitäten angeführt, die bei der Komposition von ternären kubischen Formen auftreten. Dabei werden nur Formen betrachtet, die sich als 3-zeilige Determinanten darstellen lassen, deren Elemente lineare Funktionen sind.

N. Hofreiter.

Barnes, E. S.: The minimum of the product of two values of a quadratic form. I. Proc. London math. Soc., III. Ser. 1, 257–283 (1951).

Es sei  $Q(x, y) = a x^2 + b x y + c y^2$  eine indefinite binäre quadratische Form mit reellen Koeffizienten und der Diskriminante  $D = b^2 - 4ac$ . Ferner sei  $M = M(Q)$  die untere Grenze von  $|Q(x, y) \cdot Q(u, v)|$  für alle ganzen Zahlen  $x, y, u, v$ , die der Bedingung (1)  $|xv - uy| = 1$  genügen. Ist  $\lambda = D/M$ , so gilt  $\lambda \geq 5$ , wobei das =-Zeichen nur für Formen eintritt, die zu  $C_{-1} Q_{-1}(x, y) = C_{-1}(x^2 - xy - y^2)$  ( $C_{-1} = \text{konst.}$ ) äquivalent sind. Sonst gilt  $\lambda \geq 20/3$ . Das =-Zeichen tritt hier nur für Formen ein, die zu  $C_0 Q_0(x, y) = C_0(x^2 - 5y^2/2)$  äquivalent sind. Sonst gilt  $\lambda \geq 9797/1333$ . Man erhält eine Folge wachsender  $\lambda_n$  und eine dazugehörige Folge von indefiniten Formen  $Q_n(x, y)$ , deren allgemeine Gesetzmäßigkeit etwas kompliziert ist und in der Arbeit angegeben wird. — Das Ergebnis ist also ganz analog der bekannten Markoffschen Kette über das Minimum einer indefiniten binären quadratischen Form. — Im Beweis wird zunächst der Fall  $m = 0$  behandelt, wobei  $m$  die untere Grenze von  $|Q(x, y)|$  für alle ganzen Zahlen  $x, y \neq 0, 0$  ist. Der Fall  $m = 0$  führt zu  $M = 0$ . Ist  $m > 0$ , so kann man sich auf  $m = 1$  beschränken. Es werden nun mehrere Fallunterscheidungen gemacht, je nach der Größe von  $D$ . Ihnen entsprechen die ersten Werte von  $\lambda$  mit den dazugehörigen Formen. Um den allgemeinen Fall zu erledigen, werden Hilfsmittel über Kettenbrüche herangezogen, wodurch es gelingt, sich auf endlich viele  $x, y, u, v$  zu beschränken, für die (1) und  $Q_n(x, y) Q_n(u, v) = M(Q_n)$  gilt. — Aus dem obigen Satz ergibt sich folgendes für die Reduktion der indefiniten binären Formen wichtige Resultat: Jede indefinite binäre quadratische Form  $Q(x, y)$  ist mit  $a_0 x^2 + b_0 x y + c_0 y^2$  äquivalent, wobei  $|a_0 c_0| \leq D/5$  ist. Das =-Zeichen gilt nur für Formen, die zu  $C \cdot (x^2 - xy - y^2)$  äquivalent sind.

N. Hofreiter.

Postnikov, A.: Über einige trigonometrische Ungleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 501–504 (1951) [Russisch].

Let  $f(x)$  be a real function defined in  $1 \leq x \leq N$  satisfying  $|\Delta f(x) - \alpha| < \varepsilon$ .

Then  $\left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i f(x)} \right| \leq \frac{1 + \pi \varepsilon (N-1)}{2(\alpha)}$  where  $(\alpha)$  is the fractional part of  $\alpha$ . The

author proves and generalizes this theorem to several variables with the conditions on high differences. The author proves also: let  $\theta < \Delta f(x) < 1 - \theta$  and suppose that in the sequence  $\Delta f(1), \dots, \Delta f(N-1)$ , there is a monotonic subsequence of

length  $l$ . Let  $\varepsilon = \text{Max } |\Delta f(x) - \Delta f(y)|$ . Then  $\left| \sum_{x=1}^N e^{2\pi i f(x)} \right| \leq |1 + \pi \varepsilon (N-l-1)|/\theta$ .

Two misprints should be noted: p. 501, second line of the proof, read  $\alpha$  for 2; p. 503 line 8 in the numerator read  $\varphi(x)$  for  $f(x)$ .

Loo-Keng Hua.

Prasad, A. V.: On a theorem of Khintchine. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 310–330 (1951).

The following result is proved: For any real  $\alpha$  there is a real  $\beta$  such that  $|\alpha x + \beta - y| > 3/32 x$  for all integers  $x > 0, y$ . This improves a result of Davenport (this Zbl. 37, 171). The proof is rather similar to that of Davenport except that  $\alpha$  is now expanded as a regular continued fraction and not by the method of the nearest integer. There is no evidence that the constant  $3/32$  is best possible.

J. W. S. Cassels.

Monna, A. F.: Sur un théorème de M. J. F. Koksma concernant la théorie des approximations diophantiques. II. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 342–355, Indagationes math. 13, 342–355 (1951).

The author remarks that his proof of a generalization of a theorem of Koksma



given in the first part (this Zbl. 39, 42) (itself substantially Koksma's) will apply to even more general situations: and discusses how far the generalization may be carried.

*J. W. S. Cassels.*

**Koksma, J. F.:** On a certain integral in the theory of uniform distribution. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 285—287, Indagationes math. 13, 285—287 (1951).

Let  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$  be a sequence of positive integers, and let  $A(N) = \sum_{m,n=1}^N \frac{(\lambda_m, \lambda_n)^2}{\lambda_m \lambda_n}$  where  $(\lambda_m, \lambda_n)$  is the greatest common divisor of  $\lambda_m$  and  $\lambda_n$ . For real  $x$  and  $0 < \beta - \alpha \leq 1$  denote by  $N^*(\alpha, \beta, x, N)$  the number of elements of the set  $x\lambda_1, x\lambda_2, \dots, x\lambda_N$  for which  $\alpha \leq x\lambda_n < \beta \pmod{1}$ . Then

$$\int_0^1 (N^* - (\beta - \alpha)N)^2 dx \leq \frac{1}{3} A(N).$$

*Kurt Mahler.*

**Obrechhoff, N.:** Sur l'approximation des nombres irrationnels par des nombres rationnels. C. r. Acad. Bulgare Sci., Sci. math. natur. 3, Nr. 1, 1—4 und französ. Zusammenfassg. 4 (1951) [Russisch].

Let  $r_n = P_n/Q_n$  be the approximations of the continued fraction  $\omega = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots$  where the  $a$ 's are positive integers. Then at least one of any three consecutive fractions  $r_{n-2}, r_{n-1}, r_n$  satisfies the inequality  $|\omega - p/q| < \{q^2 \sqrt{a_n^2 + 4}\}^{-1}$ , but this need not be true if  $\sqrt{a_n^2 + 4}$  is replaced by a larger number. Compare J. F. Koksma, Diophantische Approximationen, Berlin 1936, p. 33f. — The author also states a result on the solvability and limiting cases of  $|\omega x - y| \leq (n+1)^{-1}$ ,  $1 \leq x \leq n$ , obtained by means of Farey fractions. (This result follows easily from Minkowski theorem on linear forms.)

*Kurt Mahler.*

**Ullrich, Egon:** Über den Wertvorrat gewisser Lückenreihen. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anzeiger 1951, 296—303 (1951).

Let  $f(z) = a_{n_1} z^{n_1} + a_{n_2} z^{n_2} + \dots$ , where  $0 \leq n_1 < n_2 < \dots$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n_{k+1}}{n_k} = \infty$ , be a power series with rational integral coefficients which converges for  $|z| < 1$ . If  $z$ , with  $|z| < 1$ , lies in an algebraic field  $K_g$  of degree  $g$ , then  $f(z)$  is the limit of elements of  $K_g$ , and if it does not itself lie in  $K_g$ , it is a  $U$ -number with  $\mu(f(z)) \leq g$  in Mahler's classification (this Zbl. 3, 151; § 1). In a paper to appear in Math. Z., the author will study the values of such functions in detail.

*Kurt Mahler.*

**Robinson, Robin:** A new absolute geometric constant? Amer. math. Monthly 58, 462—469 (1951).

Let  $g_n$  be the number of polygons of  $n$  sides formed by a plane network of  $n$  lines, no three of which are concurrent (such a polygon is allowed to be composite, i. e. to consist of two or more polygons of fewer sides.). Using the recursion formula  $g_{n+1} = n g_n + \binom{n}{2} g_{n-2}$  the author proves that  $g_n \simeq \frac{1}{2} \sqrt{b n} (n-1)!$  where  $b \simeq 0.284098$ , and poses the question whether  $b$  is algebraic, or expressible in terms of  $\pi$  and  $e$ , or an entirely new constant.

*Felix A. Behrend.*

## Analysis.

### Allgemeines:

• **Murti, Lakshmana:** Elementary calculus, for intermediate students. Guntur: Rao Brothers 1951. XXIII, 207 p 2,80 Rs..

• **Gasson, J. D. N.:** Mathematic for technical students. I. II. Cambridge University Press 1951. XII, 417 p.; X, 431 p. 15 s each.

● **Joos-Kaluza: Höhere Mathematik für den Praktiker. 5. verb. Auflage.** Leipzig: Johann Ambrosius Barth 1951. XII, 373 S. DM 24,50.

● **Severi, Francesco e Giuseppe Scorza Dragoni: Lezioni di analisi. Vol. III. Con indici analitici e generale: Equazioni differenziali ordinarie e loro sistemi — Problemi al contorno relativi — Serie trigonometriche — Applicazioni geometriche.** Bologna: Cesare Zuffi-Editore 1951. VI, 255 p. Lire 2700.

Neben einer Vorlesung über Infinitesimalrechnung, die sich in diesem dritten Teil auf gewöhnliche Differentialgleichungen, ihre Systeme, Verhalten im Großen, auf Fourierreihen und geometrische Anwendungen erstreckt, bringen Verff. im Kleindruck in „Ergänzungen und Übungen“ in weitem Umfang Ausblicke auf Nachbargebiete und auf neuere Forschungen, die von besonderem Interesse sind. Sie können vielleicht auch dem Anfänger deutlich machen, daß es sich hier um eine lebendige Wissenschaft handelt, an deren Entwicklung besonders der ältere Verf. weit über das Gebiet der algebraischen Geometrie hinaus lebhaften und eigenwilligen Anteil hat und daß die Zusammenarbeit mit dem jüngeren Verf., dessen Hauptverdienste auf dem Gebiete der reellen Funktionen und der Topologie liegen, besonders glücklich ist. — Schon im zweiten Kapitel (Systeme von Differentialgleichungen) bringen die „Ergänzungen“ auf mehr als 60 eng bedruckten Seiten eine große Fülle moderner Untersuchungen z. B. von Carathéodory über sehr allgemeine Existenzsätze, dann Integralsätze aus der Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlicher, E. Cartans Integralinvarianten unter Verwendung seiner „äußeren Differentiale“. — Besonders hervorzuheben ist das dritte Kapitel mit Fragen im Großen bei gewöhnlichen Differentialgleichungen. Das Vorhandensein von Lösungen von Randwertaufgaben wird nach Birkhoff, Kellogg und Caccioppoli auf topologische Fragen zurückgeführt. Dann folgt die Theorie von Sturm und Liouville für Differentialgleichungen zweiter Ordnung und wieder „Ergänzungen“ z. B. mit einer Ausdehnung des Approximationsatzes von Weierstraß. — Das vierte Kap. ist den trigonometrischen Reihen gewidmet mit Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen und weiteren „Ergänzungen“. Im fünften Kap. werden die Elemente der Gaußschen Differentialgeometrie der Flächen in klassischer Art hergeleitet. In den „Ergänzungen“ folgen z. B. einige Aufgaben über projektive Differentialgeometrie. Den Abschluß bringen Namen- und Stichwortverzeichnisse. — Wenn gleich mit dem vorliegenden dritten Band das Werk zu einem gewissen Abschluß gelangt ist, stellt der unermüdete Nestor der italienischen Mathematik eingangs eine Fortsetzung in Aussicht. Auch durch die Fülle von Zitaten insbesondere italienischer Literatur, die nicht überall genügend bekannt ist, und durch die zahlreichen geschichtlichen Angaben wird das Werk vielen von Nutzen sein.

*Wilhelm Blaschke.*

● **Thomas jr., George B.: Calculus and analytic geometry.** Cambridge, Mass.: Addison-Wesley Press, Inc., 1951. 685 p. \$ 6,—.

Das Buch ist seiner Entstehung und Einrichtung nach ein Textbuch für angehende Ingenieure und führt in den mehr formalen Teil der Elemente der Infinitesimalrechnung und analytischen Geometrie ein. Die reellen Zahlen werden dabei in der Gestalt endlicher oder unendlicher Dezimalbrüche als natürliche Gegebenheit hingenommen. Stofflich schließt das Buch in der Differential- und Integralrechnung vor der systematischen Behandlung der Vertauschbarkeit von Grenzübergängen und vor den Integralsätzen in mehrdimensionalen Räumen, in der analytischen Geometrie praktisch vor der allgemeinen Koordinatentransformation im Raum. In diesem beschränkten Rahmen läßt die besonders breite Anlage des Buches, gekennzeichnet durch im Text eingearbeitete, in allen Einzelheiten ausführliche Beispiele und Aufgaben im Sinne der Vorbereitung oder Anwendung neuer Begriffe, es auch zum Selbststudium geeignet erscheinen. Eine umfangreiche Sammlung von Aufgaben mit Angabe der Resultate bietet zu ausgiebigen Übungen Gelegenheit; annähernd 400 Figuren sorgen für Anschaulichkeit.

*Georg Aumann.*

**Rose, Gene F.: A proof schema for a class of theorems.** Math. Mag. 25, 1—2 (1951).

Verf. gibt einen topologischen Satz an, der die gemeinsame Grundlage für die Beweise einer Reihe von Sätzen der Analysis ist, wie z. B. des Heine-Borelschen Satzes sowie der Sätze von der Beschränktheit und von der gleichmäßigen Stetigkeit einer auf einer abgeschlossenen, beschränkten Menge stetigen Funktion.

*Erika Panwitz.*



## Differentiation und Integration reeller Funktionen:

● Jeffery, R. L.: *The theory of functions of a real variable.* (Mathematical expositions No. 6.) Toronto: University of Toronto Press 1951. XIII, 232 p. \$ 6. —.

Contents: Introduction. I. Sets, sequences, and functions. II. Metric properties of sets. III. The Lebesgue integral. IV. Properties of the Lebesgue integral. V. Metric density and functions of bounded variation. VI. The inversion of derivatives. VII. Derived numbers and derivatives. VIII. The Stieltjes integral. — The subject of this book is the integration and derivation theory of functions of a real variable. The introductory chapter discusses the problem involved in the foundations of number systems but does not go deeply into these problems. Chapter I treats of problems connected with convergence of sequence of numbers or functions, and with the notion of continuity. The theory of measurable linear sets is shortly examined in Chapter II. The subject of Chapters III and IV is the theory of the Lebesgue integral of functions of a real variable. The definition assumed by the author is the original definition of Lebesgue. The Riemann integral is also examined for purpose of contrast and comparison. An ergodic theorem is proved as an application. The Fubini theorem on double integrals is omitted. Chapter V contains the Vitali covering theorem, theorems on metric density of sets, the Jordan decomposition for functions of bounded variation, the fundamental theorem on derivation of functions of bounded variation, and some theorems on additive and  $\sigma$ -additive functions of sets. The author states in the preface that „the fundamental purpose of the book is to give a detailed study of the problem of inverting the derivative of a continuous function, and to give an exhaustive and comprehensive consideration of derived numbers and derivatives of arbitrary functions over arbitrary sets“. This is the content of Chapter VI and VII. It is proved that if  $F(x)$  is continuous and  $F'(x)$  is either finite everywhere, or summable and finite except for at most a denumerable set, then  $F(x)$  is determined by  $F'(x)$ . The theory of Denjoy integral is only sketched. The fundamental theorems on sets  $[x \mid D_- f(x) > D^+ f(x)]$ ,  $[x \mid D^+ f(x) > -\infty]$  etc. are proved. The approximative derived numbers are also examined. The final chapter treats of the Stieltjes integral. — The text is illustrated by many examples and counter examples. Chapters I–VI contain numerous exercises to be solved by the reader. The material contained in the book forms a good introduction to the integration and derivation theory. The book is easy to be read. The exactness of certain definitions is, however, not always sufficient. As examples we quote the definitions of a sequence (p. 21) and of a function (p. 30): „If a set of numbers  $S$  is such that there is a first number  $s_1$ , a second number  $s_2$ , and so on, the set  $S$  is called a sequence“. „Let the real variable  $x$  range over the set  $A$ . The variable  $y$  is a function of  $x$ ,  $y = f(x)$ , if for each value of  $x$  of the set  $A$  there is a set of rules for determining the value or values of  $y$ .“ See also Definitions 3.7 (p. 75) and 8.1 (p. 204). Some theorems are not precisely formulated. See e. g. Theorem 2.15 (p. 58) where the hypothesis  $|A_n| < \infty$  is omitted (on the other hand, the assumption  $|A| < \infty$  in Theorem 2.21 on p. 60 is superfluous!).

*Roman Sikorski.*

● Burkill, J. C.: *The Lebesgue integral.* (Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No. 40.) Cambridge: University Press 1951. VIII, 87 p. 12 s. 6 d.

The aim of the book is to give an account of the Lebesgue theory of integration in a form which may appeal to those who have no wish to plumb the depths of the theory of real functions. Chapter I contains the fundamental notions from the General Theory of Sets: the algebra of sets, countable sets, open and closed subsets of the line or of the plane, the covering theorems. The subject of Chapter II is the theory of Lebesgue measure. Measurable sets are defined by means of the outer and interior measures. The Lebesgue integral is defined (Chapter III) as the difference of the plane measures of the sets  $[(x, y) \mid 0 \leq y \leq f(x)]$  and  $[(x, y) \mid f(x) \leq y \leq 0]$ . Chapter IV contains the fundamental theorems on the differentiation of functions, on functions with bounded variation, and on absolutely continuous functions. Chapter V contains theorems on integration by parts and by change of variable, the Fubini theorem, and the definition of the space  $L^p$ . The theory of the Lebesgue-Stieltjes integral is examined in final Chapter VI. — All theorems are proved for the one-dimensional case. It is however sketched, how all theorems and definitions can be generalized for the case of the plane. The book is clearly written and forms a good introduction to the theory of integration and of derivation.

*Roman Sikorski.*

Pettis, B. J.: *On the extension of measures.* Ann. of Math., II. Ser. 54, 186–197 (1951).

Let  $A$  be a Boolean ring (= a relatively complemented distributive lattice). If  $X \subset A$ , then  $R(X) [S(X)]$  denotes the smallest subring [ $\sigma$ -subring] of  $A$  containing  $X$ .  $C(X)$  denotes the set of all  $a \in A$  such that any countable covering of  $a$  by elements of  $X$  has a finite subcovering. If  $U, V \subset A$ , then  $U/V [U//V]$  denotes the set of all elements  $u - v$  where  $u \in U, v \in V$  [where  $u \in U, v \in V$  and  $u > v$ ].

The author proves the following theorems on extensions of functions to additive functions and measures: (I) Let  $X$  be a sublattice of a Boolean ring  $A$ , and let  $\varphi$  be a function of  $X$  into an Abelian group  $G$  such that  $(*) \varphi(x \cup y) + \varphi(x \cap y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ . If  $h = a - a'$ , where  $a, a' \in X$ ,  $a \geq a'$ , let  $\psi(h) = \varphi(a) - \varphi(a')$ . Then (1)  $\psi$  is single-valued and additive [i. e.  $\psi(x \cup y) = \psi(x) + \psi(y)$  if  $x \cap y = 0$ ] function on the half-ring  $X/X$ ; (2)  $\psi$  has a unique additive extension  $\mu$  on  $R(X/X)$ ; (3) if  $0 \in X$  and  $\varphi(0) = 0$ , then  $\psi = \varphi$  on  $X$ ,  $\mu = \varphi$  on  $X/X$  and  $\mu$  is the unique additive extension of  $\varphi$  on  $R(X) = R(X/X)$ ; (4) if  $G$  is the reals and if  $\varphi$  is increasing [i. e.  $a \leq b$  implies  $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ ], then  $\mu$  is non-negative and finite. (II) Let  $X$  be a sublattice of a Boolean  $\sigma$ -ring  $A$ , and let  $\varphi$  be a real finite increasing function on  $X$  satisfying the condition I (\*). Suppose there are sets  $U, V \subset A$  such that (i)  $U/V \subset C(V//U)$  and (ii)  $X/X - (0) \subset X(U, V)//X(U, V)$  where  $X(U, V)$  is the set of all  $x \in X$  with the property: given  $\varepsilon > 0$ , there exist  $x', x'' \in X$ ,  $u \in U$ ,  $v \in V$  such that  $x' \leq u \leq x \leq v \leq x''$  and  $\varphi(x'') - \varepsilon \leq \varphi(x) \leq \varphi(x') + \varepsilon$ . Then (1) there is a unique measure (i. e.  $\sigma$ -additive and non-negative function)  $\nu$  defined on  $S(X/X)$  that coincides with  $\varphi$  on  $X/X$  [see I (1)]; (2)  $\nu$  is  $\sigma$ -finite; (3) given  $s \in S(X/X)$  and  $\varepsilon > 0$ , there are  $\{w_j\} \subset V//U$  and  $\{h_j\} \subset X/X$  such that  $w_j \leq h_j$ ,  $s \leq \bigcup w_j$ , and  $\nu(\bigcup h_j - s) \leq \varepsilon$ ; (4) if  $0 \in X$  and  $\varphi(0) = 0$ , then  $\nu$  is the unique measure on  $S(X) = S(X/X)$  that agrees with  $\varphi$  on  $X$ . (III) Suppose in addition to the hypotheses of (II) that there are sets  $W', W'' \subset A$  such that  $U/V \subset W'$ ,  $V//U \subset W''$ ,  $W'/W'' \subset W'$  and  $W'$  is closed under finite disjoint unions and countable intersections. Then  $\nu$  is  $W'$ -regular, i. e. for every  $t \in S(X)$ ,  $\nu(t) = \sup \{\nu(s) | s \in S(X) \text{ and } s \leq w \leq t \text{ for some } w \in W'\}$ . — The last sections of the paper contain applications of (II) and (III) to measures in topological spaces, to the proof of the Riesz-Markoff theorem, and to extensions of content functions. Roman Sikorski.

**Enomoto, Shizu:** On the notion of measurability. Proc. Japan Acad. 27, 208—213 (1951).

Es soll eine von der Carathéodoryschen abweichende Definition der Meßbarkeit bezüglich eines Carathéodoryschen äußeren Maßes in einem metrischen Raum  $\mathfrak{R}$  gegeben werden. Bezeichnungen. Es sei  $\mathfrak{r}$  der Boolesche Vollverband aller Teilmengen von  $\mathfrak{R}$  und  $\mu|\mathfrak{r}$  ein bedingt endliches äußeres Maß, d. h. es soll  $\mu(\mathfrak{M}) < +\infty$  sein für jedes beschränkte  $\mathfrak{M} \in \mathfrak{r}$ . Unter  $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(\mu)$  werde verstanden der Boolesche  $\sigma$ -Verband der im Sinne von Carathéodory  $\mu$ -meßbaren Mengen.

Ist  $\mathfrak{K}_n \in \mathfrak{c}$  beschränkt mit  $\mathfrak{K} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{K}_n$ , wobei  $\mathfrak{K}_n \subseteq \mathfrak{K}_{n+1}$ , so sei  $\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}^*(\mu) = \mathfrak{r}^*(\{\mathfrak{K}_n\}; \mu)$ , das Teilsystem aller  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{r}$ , für welche  $\mu(\mathfrak{A} \cap \mathfrak{K}_n) = \mu(\mathfrak{K}_n) - \mu(\mathfrak{K}_n - \mathfrak{A})$ : es ist  $\mathfrak{r}^*$  unabhängig von  $\{\mathfrak{K}_n\}$ . Ein Boolescher  $\sigma$ -Teilverband (completely additive classe) von  $\mathfrak{r}$ , über welchem  $\mu$   $\sigma$ -additiv (also ein Maß) ist, heiße  $(\mu, \sigma)$ -additiv. Ein reguläres äußeres Maß  $m|\mathfrak{r}$  mit  $m(\mathfrak{M}) \geq \mu(\mathfrak{M})$  für jedes  $\mathfrak{M} \in \mathfrak{r}$ , wobei das Gleichheitszeichen jedenfalls für jedes beschränkte  $\mathfrak{M} \in \mathfrak{c}(\mu)$  gilt, heiße dominant für  $\mu$ . Ist  $\mathfrak{D}$  das System aller für  $\mu$  dominanten  $m|\mathfrak{r}$  und ist  $\mu_0(\mathfrak{M}) = \inf \{m(\mathfrak{M}) | m \in \mathfrak{D}\}$  ein reguläres äußeres Maß (in  $\mathfrak{r}$ ), so heiße  $\mu$  relativ regulär (und jedes  $\mathfrak{A} \in \mathfrak{r}^*(\mu_0)$  heiße  $\mu$ -meßbar). — Sätze: Es sei  $\mu|\mathfrak{r}$  ein bedingt endliches, äußeres Maß. (A) Folgende Aussagen sind gleichwertig: (a)  $\mu(\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}) + \mu(\mathfrak{A} - \mathfrak{B}) = \mu(\mathfrak{A})$  für beliebige  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \in \mathfrak{r}^*(\mu)$ ; (b)  $\mathfrak{r}^*(\mu)$  ist  $(\mu, \sigma)$ -additiv; (c) es ist  $\mu$  relativ regulär; (B) Ist  $m|\mathfrak{r}$  dominant für  $\mu|\mathfrak{r}$ , so ist  $\mathfrak{r}^*(m)$   $(\mu, \sigma)$ -additiv; (C) Es gibt bedingt endliche äußere Maße, die relativ regulär sind, aber nicht regulär (umgekehrt ist jedes reguläre  $\mu$  auch relativ regulär). Ferner gibt es  $\mu$ , für welche ein  $(\mu, \sigma)$ -additives  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{r}$  existiert mit  $\mathfrak{c}(\mu) \subseteq \mathfrak{q}$  und  $\mathfrak{c}(\mu) \neq \mathfrak{q}$ .

Otto Haupt.

**Henstock, R.:** Density integration. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 192—211 (1951).

Es sei  $E$  eine Lebesgue-meßbare Teilmenge des Intervalles  $W = [0, 1]$  und  $g(I)$  eine Intervallfunktion, erklärt für  $I \subset W$ . Zu  $g(I)$  bildet man die Intervallfunktion



$\left[ K_E(I) = \frac{g(I)}{m(I)} m(E \cap I), \text{ oder allgemeiner} \right] K_f(I) = \frac{g(I)}{m(I)} \int_I f(x) dx$ , wobei  $f$  eine über  $W$  Lebesgue-integrierbare Funktion und  $m$  das Lebesguesche Maß bezeichnet. Das obere bzw. untere Dichteintegral von  $g(I)$  über  $W$  ist definitionsgemäß gleich dem oberen bzw. unteren Burkill-Integral von  $K_f(I)$  über  $W$ . Damit das Dichteintegral von  $g(I)$  (mit  $K_E$ ) für jedes meßbare  $E$  existiert, ist notwendig und hinreichend, daß  $g(I)$  totalstetig und das Burkill-Integral von  $g(I)$  über  $W$  existiert; ist andererseits  $g(I)$  totalstetig und additiv, so ist das Dichteintegral von  $g(I)$  für das meßbare  $E$  identisch mit der Lebesgueschen Erweiterung von  $g(I)$  auf  $E$  [d. h. mit dem Lebesgue-Integral der fast überall vorhandenen und summierbaren Ableitung von  $g(I)$  über  $E$ ]. Die allgemeine Dichteintegration steht zwischen der Riemann-Stieltjes- und der Lebesgue-Stieltjes-Integration. Z. B. gilt: Ist fast überall  $f = f_1, f_1$  beschränkt, existiert  $(B) \int_I g(I) = g_1(I)$  für alle  $I \subset W$ , so gilt

$$(RS) \int_W f_1 dg_1 \leq (B) \int_W K_f(I) \leq (B) \int_W K_f(I) \leq (RS) \int_W f_1 dg_1.$$

Ist  $f$  meßbar und beschränkt,  $g(I)$  Burkill-integrierbar und totalstetig, so gilt  $(\mathcal{B}) \int_W K_f(I) = (LS) \int_W f(x) dg(x) = \int_W f(x) g'(x) dx$ . Für die letzte Gleichung genügt aber nicht, daß  $\int_W |f| dx$  und  $\int_W |f g'| dx$  endlich und  $g(I)$  additiv und totalstetig sind. Die Arbeit schließt mit einigen Anwendungen auf lineare Funktionale und ihre Erweiterung.

Georg Aumann.

Jeffery, R. L.: Non-absolutely convergent integrals. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 93—145 (1951).

Verf. gibt ein Referat über im wesentlichen bekannte Dinge, nämlich die verschiedenen über das Lebesguesche Integral hinausgehenden Integralbegriffe und ihr wechselseitiges Verhältnis in bezug auf Tragweite. Es sind das einerseits das spezielle und das allgemeine Denjoy-Integral, andererseits das Perron-Integral und seine verschiedenen Erweiterungen (Ridder, Burkill). Beim Denjoy-Integral unterscheidet Verf. eine konstruktive und eine deskriptive Definition, was sehr zweckmäßig ist. Konstruktiv wird das Integral definiert durch den von Denjoy angegebenen sehr komplizierten transfiniten Grenzprozeß, deskriptiv durch gewisse ziemlich einfache Eigenschaften, die das Integral als Funktion der oberen Grenze haben soll. Daß die Funktion durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt ist, muß natürlich bewiesen werden, und ihre Existenz ergibt sich durch den Nachweis, daß das konstruktiv definierte Integral eben diese Eigenschaften hat (von Denjoy gemacht). Beim Arbeiten mit dem Denjoy-Integral, insbesondere beim Nachweis der Äquivalenz mit dem Perron- bzw. Ridder-Integral, ist wohl nie die komplizierte konstruktive Definition benutzt worden, sondern stets die deskriptive, so daß man sich eigentlich mit dieser begnügen könnte, nachdem die Existenz sich ja auch aus dem Nachweis ergibt, daß eben das viel einfacher definierte Perron-(Ridder)-Integral eine Funktion mit den geforderten Eigenschaften ist. Verf. bezeichnet übrigens das allgemeine Denjoy-Integral auch als Denjoy-Khintchine-Integral, im Gegensatz zu Ridder, der diesen Namen für eine Zwischenstufe zwischen dem speziellen und dem allgemeinen Denjoy-Integral gebraucht. Für einige Hilfssätze verweist Verf. lediglich auf die Literatur; für die meisten Sätze wird aber der Beweis teils vollständig durchgeführt, teils wenigstens soweit skizziert, daß ihn der Leser unschwer ergänzen kann.

Oskar Perron.

Schärf, H. M.: On the equivalence of two types of Stieltjes integrals. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 54, 220—222. Indag. math. 13, 220—222 (1951).

Bezüglich einer Funktion von beschränkter Schwankung  $g$  bildet man für eine beschränkte Funktion  $f$  das Linksintegral als Grenzwert von Näherungssummen, in denen als Funktionswert immer der linke Randwert des Teilintervalls genommen wird. Je nach Art des Grenzübergangs erhält man dabei im Konvergenzfall ein Linksintegral vom normalen Typus (längstes Teilintervall zu Null) oder vom Verfeinerungstypus (betrachtet werden nur Folgen solcher Einteilungen, daß auch für alle jeweils möglichen Verfeinerungsteilungen die Näherungssummen dem Integral beliebig nahe kommen). Ist nun  $g_r$  die rechtsstetige Funktion zu  $g$ , so wird hier bewiesen: Für  $f$  ist die Existenz des Linksintegrals vom Verfeinerungs-

typus bezüglich  $g$  äquivalent mit der Existenz des Linksintegrals vom normalen Typus bezüglich  $g_r$ . — Damit lassen sich die vom Verf. aufgestellten Existenzbedingungen für den normalen Typus [Portugaliae Math. 4, 73—118 (1943/44)] auf den Verfeinerungstypus übertragen und so ein von Deniston gefundenes Ergebnis (dies. Zbl. 35, 327) bestätigen.

*Uwe Timm Bödwadt.*

**Ridder, J.:** Bemerkungen zur vorangehenden Note von H. Schärf. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. A 54, 223—225, Indag. math. 13, 223—225 (1951).

Verf. erinnert daran, daß er schon früher (dies. Zbl. 35, 327) darauf hinwies, daß bei Anwendung von  $\varepsilon$ -Teilungen bezüglich der Belegungsfunktion der gewöhnliche Typus und der Verfeinerungstypus des Grenzübergangs auf denselben Integralbegriff führen. Es folgt eine Aufzählung der damit verbundenen Vorteile. Neue Formulierung der Sätze von Schärf und Deniston (s. vorsteh. Referat).

*Uwe Timm Bödwadt.*

**Scott, W. R.:** The essential multiplicity function. Duke Math. J. 18, 707—717 (1951).

Let  $f: X \rightarrow Y$ , be a continuous mapping from a closed interval  $X$  of the Euclidean  $x$ -plane into the Euclidean  $y$ -plane  $Y$ . In various ways a multiplicity function  $N(y; f)$  has been recently defined in connection with Lebesgue area, and the several multiplicity functions differ at most in a countable set. For one of these definitions, the multiplicity function  $k(y, f)$  defined by T. Rado (Length and area, New York 1948; this Zbl. 33, 170), the following sufficient condition is proved in order that an arbitrary given function  $g(y)$ ,  $y \in Y$ , is the multiplicity function  $k(y; f)$  of a continuous mapping  $f$ . If (a)  $g(y) = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ; (b) for any  $n$  the set  $G_n$  of the points  $y \in Y$  where  $g(y) \geq n$  is bounded; (c) each component  $c_{nr}$  of  $G_n$  is a simply connected open set with locally connected boundary; (d) for any  $d > 0$  there is at most a finite number of integer pairs  $(n, r)$ ,  $n \geq 1$ ,  $r \geq 1$ , such that  $c_{nr}$  exists and  $\text{diam } c_{nr} < d$ ; then there exists a continuous mapping  $f$  with  $k(y; f) = g(y)$ .

*Lamberto Cesari.*

**Tolstov, G. P.:** Kurven, die eine differenzierbare Parameterdarstellung zulassen. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 3 (43), 135—152 (1951) [Russisch].

Let  $x = x(\theta)$ ,  $y = y(\theta)$  ( $\mu \leq \theta \leq \nu$ ) be a plane curve  $C$ . The functions  $x(\theta)$ ,  $y(\theta)$  are continuous and there is no interval in which the both functions are constant. The question is examined, under what condition there is a continuous mapping  $\theta = \theta(t)$  of an interval  $\langle \alpha, \beta \rangle$  onto  $\langle \mu, \nu \rangle$  such that the functions  $x(\theta(t))$ ,  $y(\theta(t))$  satisfy one of the following conditions: (1)  $dx/dt$  and  $dy/dt$  are continuous and  $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 > 0$  everywhere; (2)  $dx/dt$  and  $dy/dt$  are continuous; (3)  $dx/dt$  and  $dy/dt$  exist everywhere and are bounded in  $\langle \alpha, \beta \rangle$ ; (4)  $dx/dt$  and  $dy/dt$  exist everywhere and are finite. — The following theorems are proved: (I) An increasing function  $\theta(t)$  satisfying (1) exists if and only if  $C$  has a continuous unilateral tangent. (II) An increasing function  $\theta(t)$  satisfying (2) exists if and only if  $C$  is rectifiable and the set  $E$  of singular points of  $C$  is of linear measure null. (A point  $(x(\theta_0), y(\theta_0))$  is singular if there is no neighbourhood of  $\theta_0$  in which the curve has a continuous tangent. The linear measure of a set  $E$  of points of a rectifiable curve  $(\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ , where  $s$  is the length of the arc, is the Lebesgue measure of the set  $[s | (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) \in E]$ ). (III) An increasing function  $\theta(t)$  satisfying (3) exists if and only if  $C$  is rectifiable. (IV) An increasing function  $\theta(t)$  satisfying (4) exists if and only if the functions  $x(\theta)$ ,  $y(\theta)$  are VBG\*. If the set of all points of  $C$  has positive plane measure, the function  $\theta(t)$  does not exist. — In the case (2), (3), (4) we may suppose that  $(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2 > 0$  almost everywhere. Theorems (I—IV) remain true if we omit the word „increasing“. Theorems III and VI are earlier proved by Zahorski [Zagorski, Mat. Sbornik, n. Ser. 22 (64), 3—26 (1948)], but Tolstov's proof is simpler than that of Zahorski.

*Roman Sikorski.*

**Obrechhoff, Nikola:** Sur quelques propriétés des fonctions réelles définies sur tout l'axe réel. C. r. Acad. Bulgare Sci., Sci. math. natur. 3, Nr. 1, 5—8 und französ. Zusammenfassg. 8 (1951) [Russisch].

Let  $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}$  be a sequence of real numbers such that  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow -\infty} x_k = -\infty$ , and let  $f(x)$  be a real function defined on  $(-\infty, +\infty)$ . The following theorems are proved: (I) If  $f^{(n)}(x) \geq 0$  everywhere and if, for some



positive integer  $m < n$ ,  $\lim_{k \rightarrow \pm \infty} \frac{f(x_k)}{x_k^m} = 0$ , then  $f(x)$  is a polynomial of degree  $\leq m - 1$ . (II) If  $f^{(2n)}(x) \geq 0$  everywhere and if  $f(x_k) < K x_k^{2n-2}$  (where  $K = \text{const.}$ ), then  $f(x)$  is a polynomial of degree  $\leq 2n - 2$ . Several corollaries are deduced from these theorems. For instance, if  $f(x)$  is absolutely monotonic in  $(-\infty, +\infty)$  and  $f(x_k) < K \cdot e^{x_k}$ , then  $f(x) = C \cdot e^x$  ( $C = \text{const.}$ ). Analogous theorems hold for sequences  $\{a_k\}_{-\infty}^{+\infty}$ . It is sufficient to replace  $f(x)$  by  $\{a_k\}$ , and  $f^{(n)}(x)$  by  $\Delta^n a_k$  etc., in Theorems (I) and (II).

Roman Sikorski.

Potts, D. H.: A note on Green's theorem. J. London math. Soc. 26, 302—304 (1951).

Verf. beweist den folgenden schon von Verblunsky (dies. Zbl. 35, 154) für den Fall Lebesguescher Integrale bewiesenen Satz unter bloßer Benutzung des Riemannschen Integralbegriffs: Es sei 1.  $M(x, y)$  stetig auf dem abgeschlossenen Bereiche  $D$ , der von einer rektifizierbaren Jordankurve  $C$  begrenzt ist, 2.  $\partial M / \partial x$  integrierbar über  $D$ . 3.  $\iint_R \frac{\partial M}{\partial x} dx dy = \int_P M dy$  für jedes Rechteck  $R$ , das mit seinem Rande  $P$  in  $D$  liegt. Dann gilt  $\iint_D \frac{\partial M}{\partial x} dx dy = \int_C M dy$ . Der Beweis

des Verf. beruht hauptsächlich auf der Ersetzung eines Hilfssatzes von Estermann (dies. Zbl. 7, 312, 9, 24) durch einen Hilfsatz von K. Hu (dies. Zbl. 12, 261).

Georg L. Tautz.

Hsu, L. C.: The asymptotic behaviour of a kind of multiple integrals involving a parameter. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 175—188 (1951).

Let  $f(x_1, \dots, x_n; \lambda) > 0$  be defined for  $x = (x_1, \dots, x_n)$  belonging to a simply connected, finitely bounded domain  $R$  and for  $\lambda > 0$  and such that  $f_k = \partial f / \partial x_k$ ,  $f_{ik} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_k$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ) and  $\partial f / \partial \lambda$  are continuous in  $(x_1, \dots, x_n, \lambda)$ . Suppose that (i)  $f_k(x; \lambda) = 0$  ( $k = 1, \dots, n$ ) has at least one solution for  $\lambda > N$ , and there is an interior point  $\xi \in R$  satisfying  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} f_k(\xi; \lambda) = 0$ ; (ii) the Hessians

$$H_k[-f] = \begin{vmatrix} -f_{11}(x; \lambda) & \dots & -f_{1k}(x; \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ -f_{k1}(x; \lambda) & \dots & -f_{kk}(x; \lambda) \end{vmatrix} \quad (k = 1, \dots, n)$$

are  $> 0$  throughout  $R$  for  $\lambda > N$ ; (iii)  $f_{ik}(x; \lambda) / f_{ik}(\xi; \lambda) \rightarrow 1$  and  $-f_{ik}(x; \lambda) \rightarrow \infty$  as  $(x; \lambda) \rightarrow (\xi; \infty)$ ; (iv)  $0 < N_1 < |f_{ik}(x; \lambda) / f_{11}(x; \lambda)| < N_2$  and  $0 < N_3 < |H_k[-f] / (-f_{11}(x; \lambda))^k| < N_4$  as  $(x; \lambda) \rightarrow (\xi; \infty)$  ( $i, k = 1, \dots, n$ ). Then

$$\int_R \dots \int \exp[f(x; \lambda)] dx_1 \dots dx_n \sim \exp[f(\xi; \lambda)] \left( \frac{(2\pi)^n}{H_n[-f(\xi; \lambda)]} \right)^{\frac{1}{2}}$$

as  $\lambda \rightarrow \infty$ . — For  $n = 1$ , when (iv) is automatically satisfied, this theorem reduces to a previous result of the author (this Zbl. 39, 288), which in turn is a generalization of a theorem of Laplace (cf. Pólya-Szegő, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, Berlin 1925, II. Abschnitt, Aufgabe 201).

János Horváth.

Yih, Chia-shun: An extension of Dehn's theorem on the approximation of a function by a power series. Math. Student 18, 117—122 (1951).

A necessary and sufficient condition is given for the existence of constants  $a_{10}, a_{01}, \dots, a_{n0}, \dots, a_{0n}$  so that

$$f(a+h, b+k) = f(a, b) + a_{10}h + a_{01}k + a_{20}h^2 + a_{11}hk + a_{02}k^2 + \dots \\ \dots + \sum_{l+m=n} h^l k^m [a_{lm} + \varepsilon_{lm}(h, k)],$$

where  $\varepsilon_{lm}(h, k) \rightarrow 0$  as  $(h, k) \rightarrow (0, 0)$ .

János Horváth.

**Orloff, Konstantin:** Sur un théorème des accroissements finis. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 71—73 und französ. Zusammenfassg. 73 (1951) [Serbisch].

L'A. démontre qu'on peut réduire, de trois à deux, le nombre des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction de deux variables réelles  $x$  et  $y$  soit une „ $\xi$  fonction“ au sens de R. Rothe [Math. Zeitschr. 9, 315 (1921)].

Autoreferat.

**Emden, Karl:** Eine Lösung für  $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$ . Z. angew. Math. Phys. 2, 289—292 (1951).

Lösung durch den Ansatz

$$\int e^{b(x+a\cos x)} dx = \frac{1}{b} \left[ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) \right] e^{b(x+a\cos x)} + C.$$

Robert Schmidt.

**Rutishauser, Heinz:** Bemerkungen zur Arbeit von K. Emden „Eine Lösung für  $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$ “. Z. angew. Math. Phys. 2, 292—293 (1951).

Es wird mit Vorteil von der komplexen Schreibweise der reellen trigonometrischen Reihen Gebrauch gemacht.

Robert Schmidt.

**Redheffer, R. M. and R. Steinberg:** The Laplacian and mean values. Quart. appl. Math. 9, 315—317 (1951).

Durch Bildung von Mittelwerten kann man bekanntlich bei Funktionen von drei Veränderlichen zum Laplaceschen Operator gelangen. Die Bedeutung dieser Tatsache wird untersucht, insbesondere in dem Fall einer Menge diskreter Punkte.

Evert Johannes Nyström.

**Kaluza jr., Th.:** Ein allgemeiner Satz über die Existenz von Mittelwertfunktionen. Arch. der Math. 2, 438—440 (1951).

Verf. zeigt, daß es zu jeder reellen Funktion  $f(x)$  Funktionen  $\varphi(x)$  gibt derart, daß es zwischen jedem Zahlenpaar  $(x_1, x_2)$  eine Zahl  $\xi$  gibt für welche  $(x_2 - x_1) \varphi(\xi) = f(x_2) - f(x_1)$  gilt, und daß es für jedes  $y$  zwischen  $\varphi(x_1)$  und  $\varphi(x_2)$  ein  $x$  gibt, für welches  $\varphi(x) = y$ . Die erste Hälfte des Satzes wird durch eine nicht ganz einfache Konstruktion von Abbildungen  $(x_1, x_2) \rightarrow x_{12}$  mit  $x_1 < x_{12} < x_2$  erzielt, die verschiedenen Zahlenpaaren auch verschiedene Zahlen zuordnen, und die Funktion  $\varphi(x)$  wird derart definiert, daß sie in den Punkten  $x = x_{12}$  den Wert  $\varphi(x_{12}) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  annahme (sonst beliebig). Dann werden aus diesen Abbildungen solche ausgewählt, mit denen mittels zweckgemäßer Spezialisierung von  $\varphi(x)$  auch die zweite Hälfte des Satzes erfüllt werden kann.

János Aczél.

**Meulenbeld, B.:** Note on some theorems of Erdős and Grünwald. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 329—334, Indagationes math. 13, 329—334 (1951).

Es wird ein Satz von P. Erdős und T. Grünwald (jetzt T. Gallai) über reelle Polynome mit lauter reellen Nullstellen (dies. Zbl. 21. 395) auf folgende Weise verallgemeinert: Ist  $f(x)$  eine reelle Funktion im Intervall  $(-a, a)$ , für die

$$(1) \quad f(-a) = f(a) = 0, \quad f(x) > 0 \quad \text{für} \quad -a < x < a, \quad \text{Max}_{-a < x < a} f(x) = M$$

und genügt die Funktion  $q(x) = \frac{f(x)}{a^2 - x^2}$  für jedes Paar von  $x_1, x_2$  des Intervalls  $(-a, a)$ , in denen die Gleichung  $f(x_1) = f(x_2)$  gilt, der Ungleichung

$$(2) \quad q(x_1) q(x_2) \leq q^2 \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right), \quad \text{so besteht die Ungleichung} \quad \int_{-a}^a f(x) dx \leq \frac{4}{3} a M.$$

Das Gleichheitszeichen gilt hier nur im Falle  $f(x) = (a^2 - x^2) M a^{-2}$ . — Es werden noch vier weitere ähnliche Sätze bewiesen. So gilt der Satz: Genügt die reelle Funktion  $f(x)$  den Bedingungen (1), ist ferner  $f(x_1) = f(x_2) = D$  ( $0 \leq D < M$ ) und genügt die Funktion  $q(x)$  der Ungleichung (2), so ist  $|x_2 - x_1| \leq 2a \sqrt{1 - D/M}$ . Das Gleichheitszeichen gilt hier nur im Falle  $x_1 = -x_2$ ,  $\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \varphi(0) = M a^{-2}$ .

Gyula Sz. Nagy.



## Allgemeine Reihenlehre:

Faragó, T.: Über das arithmetisch-geometrische Mittel. Publ. math., Debrecen 2, 150—156 (1951).

$a_0, b_0$  seien komplexe Zahlen,  $a_0 b_0 (a_0^2 - b_0^2) \neq 0$ . Bei dem Lagrange-Gaußschen Algorithmus  $a_{n+1} = (a_n + b_n)/2$ ,  $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$  konvergieren die Folgen  $a_n, b_n$  gegen einen gemeinsamen Grenzwert  $\bar{M}(a_0, b_0)$ , der noch von der Vorzeichenbestimmung der Quadratwurzeln abhängt.  $\alpha_n$  sei der (nicht orientierte) Winkel zwischen  $a_n$  und  $b_n$  mit  $0 \leq \alpha_n \leq \pi$ . Ein Algorithmus heiße normal, wenn das Vorzeichen der Quadratwurzeln bei jedem Schritt so bestimmt wird, daß  $b_{n+1}$  im Winkelraum von  $\alpha_n$  liegt. Im allgemeinen ist zu  $a_0, b_0$  der normale Algorithmus eindeutig bestimmt; er führt zum sog. Hauptwert  $\bar{M}(a_0, b_0)$  des arithmetisch-geometrischen Mittels. — Verf. beweist für normale Algorithmen die Ungleichungen

$$\frac{|a_0| + |b_0|}{2} \geq \frac{|a_1| + |b_1|}{2} \geq \dots \geq \frac{|a_n| + |b_n|}{2} \geq \dots \geq |\bar{M}(a_0, b_0)|,$$

$$\sqrt{a_0 b_0} \cos \frac{\alpha_0}{2} \leq \sqrt{a_1 b_1} \cos \frac{\alpha_1}{2} \leq \dots \leq \sqrt{a_n b_n} \cos \frac{\alpha_n}{2} \leq \dots \leq |\bar{M}(a_0, b_0)|$$

von denen die erstere aus  $|\sqrt{a_n b_n}| \leq \frac{1}{2}(|a_n| + |b_n|)$ , die letztere aus dreiecksgeometrischen Betrachtungen gewonnen wird. Ferner gibt Verf. für zwei normale Algorithmen ein notwendiges und hinreichendes Kriterium, das an Gliedern des Algorithmus mit genügend großem Iterationsindex zu entscheiden gestattet, ob  $|\bar{M}(a, b)| > |\bar{M}(a', b')|$  ist. Als Korollar folgt ein Beweis des bereits von Gauß gefundenen Satzes, daß der Hauptwert  $\bar{M}(a, b)$  der absolut größte aller möglichen Werte von  $M(a, b)$  ist.

Alfred Stöhr.

Neville, E. H.: A trigonometrical inequality. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 629—632 (1951).

The inequality is  $\operatorname{cosec}^2 x - \frac{1}{2m+1} < \sum_{-m}^m \frac{1}{(x-r\pi)^2} < \operatorname{cosec}^2 x$ , which is established by an elementary argument and is shown to lead directly to the evaluation of the integral  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ , and to the expression of  $\sin x$  as an infinite product.

(Abstract by the author).

Veen, S. C. van: Asymptotic expansion of the generalized Bernoulli numbers  $B_n(n-1)$  for large values of  $n$  ( $n$  integer). Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 335—341, Indagationes math. 13, 335—341 (1951).

Für die Bernoullischen Zahlen  $B_n(z)$ , die als Koeffizienten der in  $|t| < 2\pi$  konvergierenden Potenzreihe  $\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^z = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!} B_n(z)$  auftreten, gilt im Sonderfall  $z = n - 1 \geq 2$  die Formel

$$(*) \quad \frac{(-1)^n}{n!(n-1)} B_n(n-1) = \sum_{\lambda=1}^m \frac{\sin \lambda \alpha(n)}{\varrho_n^{\lambda+1} \sin \alpha(n)} E_\lambda(n) + \vartheta \frac{1 + |\cos m \alpha(n)|}{2 \varrho_n^{m+2} \sin^2 \alpha(n)} E_{m+1}(n),$$

( $|\vartheta| \leq 1$ ). Die Werte  $E_\lambda(n)$  lassen sich explizite durch die Werte  $S_\times(n) = \sum_{\mu=1}^{n-2} \frac{1}{\mu^\times}$  angeben; beispielsweise ist  $E_1(n) = (n-1)^{-1}$ ,  $E_2(n) = 0$ ,  $E_3(n) = (n-1)^{-1}(\pi^2/3 - S_2(n))$ . Weiter ist  $\varrho_n = \sqrt{\pi^2 + S_1^2(n)}$  und  $\operatorname{tg} \alpha(n) = \pi/S_1(n)$ . Für  $n \rightarrow \infty$  hat (\*) eine gewisse asymptotische Bedeutung, da  $\varrho_n = O(\log n)$ . Der Beweis beruht im wesentlichen auf der Untersuchung komplexer Integrale. Hans Töpfer.

Schmetterer, Leopold: Bemerkungen zur Multiplikation unendlicher Reihen. Math. Z. 54, 102—114 (1951).

Es werden acht nicht kurz zitierbare Sätze bewiesen, bei denen aus dem Wachstum der Glieder zweiseitig unendlicher Reihen und Doppelreihen hauptsächlich auf Konvergenz oder Aequikonvergenz der Cauchyschen, Fourierschen oder Laurentschen Produktreihe geschlossen wird. Sehr zahlreiche Bemerkungen und Literaturangaben ordnen die Ergebnisse in den Bestand und die Probleme der Reihenlehre ein. (Vgl. auch: L. Schmetterer, dies. Zbl. 40, 24.) Theodor Kaluza jr.

Meyer-König, W.: Beziehungen zwischen einigen Matrizen der Limitierungstheorie. Math. Z. 53, 450—453 (1951).

Ergänzungen zu W. Meyer-König, dies. Zbl. 41, 184: Für das Cesàrosche Verfahren  $C_k$  der  $k$ -ten Ordnung und für  $T_\alpha^{(k)} = (1 - \alpha)^{n+k+1} \binom{\nu+k}{n+k} \alpha^{\nu-n}$ ,  $S_\alpha^{(k)} = (1 - \alpha)^{n+k+1} \binom{n+k+\nu}{\nu} \alpha^\nu$  ( $k = 0, 1, \dots$ ;  $0 < \alpha < 1$ ) ist  $C_k T_\alpha^{(0)} = T_\alpha^{(k)} C_k$  und  $C_k S_\alpha^{(0)} = S_\alpha^{(k)} C_k$ . Robert Schmidt.

Hill, J. D.: The Borel property of summability methods. Pacific J. Math. 1, 399—409 (1951).

Ein Limitierungsverfahren  $T = (a_{nk})$  hat die Borelsche Eigenschaft, wenn die Menge der Dualbrüche  $0, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ , für die die Folgen  $\{\alpha_k\}$   $T$ -limitierbar zum Wert  $\frac{1}{2}$  sind, das Maß 1 hat. Für reguläre Verfahren  $T$  wurde die Frage nach kennzeichnenden Bedingungen dafür, daß sie die Borelsche Eigenschaft besitzen, vom Verf. früher [Ann. of Math. II. Ser. 46, 556—562 (1945)] behandelt. Hier wird die gleiche Frage unter Verzicht auf die Voraussetzung der Regularität von  $T$  angeschnitten. Es wird gezeigt: Notwendig ist 1)  $S_n = \sum_k a_{nk}$  konvergent für jedes  $n$ , und  $S_n \rightarrow 1$ , 2)  $A_n = \sum_k a_{nk}^2$  konvergent für jedes  $n$ , 3)  $a_{nk} \rightarrow 0$  mit  $n \rightarrow \infty$  für jedes  $k$ , 4)  $A_n \rightarrow 0$ . Als hinreichend erweist sich die oben genannte notwendige Bedingung 1) zusammen mit der Konvergenz von  $\sum_n A_n^l$  für wenigstens ein  $l > 0$ .

Robert Schmidt.

Szász, Otto: Tauberian theorems for summability  $(R_1)$ . Amer. J. Math. 73, 779—791 (1951).

Eine Reihe  $\sum_0^\infty a_n$  mit Partialsummen  $s_n$  heißt  $(R_1)$ -summierbar zur Summe  $s$ , wenn die Reihe  $\sum_1^\infty s_n \frac{\sin nh}{n}$  für kleine positive  $h$  konvergiert und mit  $h \rightarrow +0$  gegen  $s$  strebt. Dieses Verfahren ist nicht konvergenzerhaltend. Es wird aber bewiesen, daß unter den Voraussetzungen  $\sum_n^{2n} (|a_\nu| - a_\nu) = O(n^{1-\delta})$  ( $\delta > 0$ ) und  $s_n - s = o(1/\log n)$  die  $(R_1)$ -Summierbarkeit aus der Konvergenz folgt. Wenn  $\sum_n^{2n} (|a_\nu| - a_\nu) = O(1)$ , dann folgt die  $(R_1)$ -Summierbarkeit aus der Abel-Summierbarkeit. Es werden noch einige andere Taubersche Sätze ähnlicher Art bewiesen. Für Fourierreihen wird gezeigt, daß die Lebesgue-Konstanten der  $(R_1)$ -Methode beschränkt sind, so daß die Fourierreihe einer Funktion an jeder Stetigkeitsstelle konvergiert. Auch zeigt das Verfahren keine Gibbsche Erscheinung. [Für weitergehende Untersuchung der  $(R_1)$ -Methode, besonders für Fourierreihen, vergleiche Kuttner, dies. Zbl. 13, 261, und Hardy-Rogosinski, dies. Zbl. 29, 25.]

W. W. Rogosinski.

Stuloff, Nicolaus: Absolut konvergente verallgemeinerte Dirichletsche Reihen im Reellen. Math. Z. 54, 329—338 (1951).

Wenn eine Funktion  $f(x)$  für  $x \geq 0$  in eine absolut konvergente Reihe  $\sum a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$  mit reellen  $a_\nu$  und  $\lambda_\nu > 0$  entwickelt werden kann, so ist  $f(x)$  unendlich oft differen-



zierbar und es gilt (1)  $\lim (-e/A)^n f^{(n)}(n/A) = a_\nu$  für  $A = \lambda_\nu$  und  $= 0$  für alle anderen  $A > 0$ . Außerdem gilt (2)  $\lim_{\nu \rightarrow 0} \sum_{\nu=0}^n \binom{n}{\nu} |A^{n-\nu} f(\nu)| = \sum |a_\nu|$ . Wenn umgekehrt eine Funktion diese Bedingungen erfüllt, wenn also z. B. der Grenzwert (1) für alle  $A > 0$  mit Ausnahme von abzählbar vielen (welche  $\lambda_\nu$  genannt werden) verschwindet, und wenn die dann sinnvolle Gleichung (2) richtig ist, so kann  $f(x)$  in eine Reihe  $\sum a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$  entwickelt werden. Verf. beweist diesen Satz, indem er unter Benutzung eines Satzes von Hausdorff  $f(x)$  als Differenz zweier totalmonotoner Funktionen schreibt, auf die dann das Resultat einer früheren Abhandlung des Verf. (dies. Zbl. 39, 66) angewendet wird.

Wilhelm Maak.

Isaacs, G. L.: On a theorem due to M. Riesz. J. London math. Soc. 26, 285—290 (1951).

Es werde, wenn  $A(u)$  in jedem endlichen Intervall  $0 \leq u \leq \omega$  zur Lebesgueschen Klasse  $L$  gehört,  $A_k(u) = [A(u)]_k = (I'(k))^{-1} \int_0^u (u-t)^{k-1} A(t) dt$  ( $k > 0$ ) und  $A_0(u) = [A(u)]_0 = A(u)$  gesetzt. Dann existiert  $A_k(u)$  fast überall in  $u \geq 0$  für  $0 \leq k < 1$ , und überall in  $u \geq 0$  für  $k \geq 1$ . Nach M. Riesz [Acta Litt. Sci. Univ. Hungar., Szeged 2, 18—31 (1924)] gilt: (1) Sei  $C(u)$  von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall  $0 \leq u \leq \omega$  und  $\int_0^\omega e^{-us} dC(u)$  ( $\Re s = \sigma > 0$ ) summierbar ( $C, k$ ) (Cesàrosches Verfahren der Ordnung  $k \geq 0$ ) für  $\omega \rightarrow \infty$ ; dann ist  $C_k(\omega) = o(e^{\omega\sigma} \omega^k)$  für  $\omega \rightarrow \infty$ . Wegen des Beweises wird a. a. O. auf Überlegungen aus G. H. Hardy und M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915 (insbes. S. 40—43) verwiesen. Verf. stellt fest, daß die Übertragung des früheren Beweises auf (1) nicht augenfällig ist, wenn  $k$  nicht ganz ist, und gibt daher einen direkten und ausgeführten Beweis, und zwar des folgenden Satzes (2), der (1) als Spezialfall  $\left(p = 0, C(\omega) = \int_0^\omega e^{us} d\Phi(u)\right)$  enthält: (2) Sei  $\Phi(u)$  von beschränkter Schwankung in jedem endlichen Intervall  $0 \leq u \leq \omega$ , und für reelle Zahlen  $k \geq 0$  und  $p$  (falls  $k$  nicht ganz ist, soll  $p + k + 1 > 0$  sein)  $\left|\int_0^\omega d\Phi(u)\right|_k = o(\omega^{p+k})$  für  $\omega \rightarrow \infty$ ; dann ist  $\left|\int_0^\omega e^{us} d\Phi(u)\right|_k = o(e^{\omega\sigma} \omega^{p+k})$  für  $\Re s = \sigma > 0$ . Beim Beweis schließt Verf. an eine ähnliche Beweisführung von L. S. Bosanquet [dies. Zbl. 31, 296, vgl. insbes. Lemma 1 und 2; Proc. London math. Soc., II. Ser. 49, 40—62 (1945)] an.

Werner Meyer-König.

### Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Korenbljum, B. I.: Sätze vom Tauberschen Typus für eine Klasse Dirichletscher Reihen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 725—727 (1951) [Russisch].

Verf. vergleicht gewisse Abelsche und Rieszsche Verfahren. Sei  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  und  $\sigma_\tau = \sum u_n \exp(-\lambda_n/\tau)$  (Abelsche Transformation),  $\sigma_\tau(r) = \sum_{\lambda_n \leq \tau} (1 - \lambda_n/\tau)^r u_n$  (Rieszsche Transformation) ( $r$  ganz;  $0 < \tau < \infty$ ;  $\sum u_n$  bel.). Aus  $\lambda_{n+r+1}/\lambda_n > k > 1$  ( $r$  fest,  $n = 0, 1, \dots$ ) folgt dann  $\sup |\sigma_\tau(r)| \leq M \cdot \sup |\sigma_\tau|$  (wenn alle  $\sigma_\tau$  erklärt sind) und  $\sup |\sigma_\tau(r)| \leq R \cdot \sup |\sigma_\tau(r+1)|$ , wobei  $M$  und  $R$  nur von  $r$  und  $k$  abhängen. Ferner folgt dann aus der Existenz von  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_\tau$  diejenige von  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \sigma_\tau(r)$ .

— Die Beweise werden angedeutet. — Diese Ergebnisse verallgemeinern einen Mercerschen Satz von Hardy-Littlewood, Proc. London math. Soc., II. Ser. 25, 219 (1926).

Karl Zeller

Korenbljum, B. I.: Über ein Interpolationsproblem. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 991—994 (1951) [Russisch].

Sei  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots \rightarrow \infty$  und  $u_n$  reell. Verf. fragt: Wann gibt es eine Funktion  $f$  mit  $f(\lambda_n) = u_n$ , die in  $0, \infty$  Differenz vollmonotoner Funktionen ist? Gilt mit gewissen  $r$  und  $k$  für  $n = 0, 1, \dots$   $\lambda_{n+r+1}/\lambda_n \geq k > 1$ , so findet Verf. eine notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung, die sich so interpretieren läßt, daß es genügt, ein lösendes  $f$  aus einer gewissen umfangreicheren Funktionenklasse zu finden. Im Falle  $r = 0$  lautet die Bedingung nach Umformung  $\sum |u_n - u_{n+1}| < \infty$ , im Falle  $r = 1$  erhält man einen komplizierteren Ausdruck. — Vgl. das vorsteh. Referat sowie die Arbeiten von Widder und Tamarkin (dies. Zbl. **3**, 122).

Karl Zeller.

Natanson, I. P.: Über eine Klasse von singulären Doppelintegralen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **81**, 737—739 (1951) [Russisch].

Let  $\Phi_n(u)$  and  $\Psi_n(v)$  be continuous positive  $2\pi$ -periodic even functions such that

$$(i) \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u) du = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \Psi_n(u) du \quad (n = 1, 2, \dots); \quad (ii) \lambda_n = \int_0^{\pi} u \Phi_n(u) du \rightarrow 0$$

and  $\mu_n = \int_0^{\pi} v \Psi_n(v) dv \rightarrow 0$  if  $n \rightarrow \infty$ . Let  $f(x, y)$  be a continuous function  $2\pi$ -periodic with respect to each variable, and let

$$f_{n,m}(x, y) = \iint_Q f(u, v) \Phi_n(u - x) \Psi_m(v - y) du dv$$

where  $Q$  is the square  $-\pi \leq u, v \leq \pi$ . Such integrals often appear in the theory of trigonometrical series of two variables. Let  $\omega(\lambda, \mu) = \sup_S |f(u, v) - f(u', v')|$

where  $S$  is the set of all pairs of points  $(u, v)$ ,  $(u', v')$  such that  $|u - u'| \leq \lambda$ ,

$|v - v'| \leq \mu$ , and let  $L_n = \int_0^{\pi} u^2 \Phi_n(u) du$ ,  $M_n = \int_0^{\pi} v^2 \Psi_n(v) dv$ . The following

theorems are proved: (I)  $|f_{n,m}(x, y) - f(x, y)| \leq 5\omega(\lambda_n, \mu_n)$ . (II) If the function  $f(x, y)$  has the continuous partial derivatives of second order, and if, for every

$\sigma > 0$  ( $\sigma < \pi$ ),  $\int_{\sigma}^{\pi} \Phi_n(u) du = o(L_n)$  and  $\int_{\sigma}^{\pi} \Psi_n(v) dv = o(M_n)$ , then  $f_{n,m}(x, y) =$

$$f(x, y) + \frac{L_n}{2} f''_{xx}(x, y) + \frac{M_m}{2} f''_{yy}(x, y) + o(L_n + M_m).$$

Roman Sikorski.

Stečkin, S. B.: Über die absolute Konvergenz von Orthogonalreihen. I. Mat. Sbornik, n. Ser. **29** (71), 225—232 (1951) [Russisch].

Es gehöre  $f(x)$  dem Raume  $L^2[a, b]$  an.  $\{\varphi_n(x)\}$  sei ein in  $(a, b)$  erklärtes Orthogonalsystem und  $\sum c_n \varphi_n(x)$  die zu  $f(x)$  gehörende formale Fourier-Reihe. Verf. untersucht den Zusammenhang der Konvergenz dieser Reihe mit der besten Annäherung von  $f(x)$  durch die Teilsummen der Reihe einerseits und dem Stetigkeitsmodul  $\omega(n^{-1}, f)$  von  $f(x)$  andererseits (Vgl. dazu Verf. dies. Zbl. **42**, 300). Verf.

beweist z. B.: 1. Es ist  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} k^{-\frac{1}{2}} E_n^{(2)}[f, \varphi]$ , wobei  $E_n^{(2)}[f, \varphi]$

$$= \left( \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} c_k \varphi_k(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{ist. 2. Ist } f \in L^2[0, 2\pi], \text{ ist ferner } f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \text{ und } \omega^{(2)}(\delta, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

so ist  $\sum (|a_n| + |b_n|) \leq \text{konst.} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{1}{2}} \omega^{(2)}(n^{-1}, f)$ . (Die ausgesprochenen Sätze sind noch etwas allgemeiner formuliert.) Als bemerkenswerter Spezialfall ergibt sich bei gewöhnlichen Fourierschen Reihen: Die Reihen  $\sum n^{-\frac{1}{2}} E_n(f)$  und  $\sum n^{-\frac{1}{2}} \omega(n^{-1}, f)$  konvergieren und divergieren gleichzeitig. (Im ersten Fall konvergiert die Fourierreihe absolut.)

Wolfgang Hahn.



**Tureckij, A. Ch.:** Über Abschätzungen der Approximationen durch Quadraturformeln für Funktionen, die einer Lipschitzbedingung genügen. *Uspechi mat. Nauk* 6, Nr. 5 (45), 166—171 (1951) [Russisch].

Verf. bestimmt die Güte einer Quadraturformel durch den Ausdruck

$$\sup_{f \in H} \left| \int_a^b p(x) f(x) dx - \sum_{k=1}^n p_k f(x_k) \right| \quad (p(x) \geq 0, p_k, x_k \text{ gegeben});$$

dabei bezeichnet  $H$  die Klasse aller Funktionen, die einer Lipschitzbedingung  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\alpha$  genügen. (Nikol'skij hat die Aufgabe für die Klasse der differenzierbaren Funktionen behandelt, vgl. dies. Zbl. 36, 323.) Die Lösung läßt sich leicht in geschlossener Form angeben. Verf. untersucht sie für einige spezielle Quadraturformeln genauer.

Wolfgang Hahn.

● **Mandelbrojt, S.:** General theorems of closure. (Rice Inst. Pamphlet. Special Issue. Monograph in Mathematics.) Houston, Texas: The Rice Institute 1951. 71 pp.

This is a detailed exposition in form of a monograph of results contained in three previous notes of the author (this Zbl. 37, 325, 42, 73, 297). — The first chapter resumes the classical theory of approximation in  $L^p$  and gives a few results concerning Fourier transforms, especially a theorem of Carleman (L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent, Uppsala 1944, Ch. V.) of which constant use is made later on. The second chapter exposes the work of the author and G. R. MacLane on functions holomorphic in a curvilinear strip (this Zbl. 32, 67). The third chapter brings the main result. This is essentially a combination of the following two facts. 1. If  $f(x) \in L^1$  and  $\Omega(f)$  is the set where the Fourier transform of  $f(x)$  vanishes, if  $g(x) \in L^1$ ,  $\Omega(g)$  is the corresponding set and  $\Omega(g) \supset \Omega(f)$ , then it has been conjectured that  $g(x)$  is contained in the subspace of  $L^1$  spanned by the translations  $f(x + \xi)$  of  $f(x)$ . This has been proved so far only with additional conditions on  $\Omega(f)$  and  $\Omega(g)$  (cf. Mandelbrojt and

Agmon, this Zbl. 36, 352). 2. If  $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)| dx \leq M_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ), and by putting

$c(\sigma) = \max_{n \geq 1} (n\sigma - \log M_n)$  we have  $\int_{-\infty}^{\infty} c(\sigma) e^{-\sigma} d\sigma = \infty$ , then every  $f(x + a)$  is contained in

the subspace of  $L^1$  spanned by the sequence  $f^{(n)}(x)$ . The main theorem now reads as follows.

Let  $\int_{-\infty}^{\infty} |f^{(n)}(x)| dx \leq M_n$  ( $n = 0, 1, \dots$ ),  $g(x) \in L^1$  and  $c(\sigma)$  defined as above. Put

$E = \Omega(g) \cap C\Omega(\bar{f})$  ( $CA$  is the complementary of  $A$  with respect to the real line),  $E_h = \bigcup_{x \in E} [x - h, x + h]$  and let  $\Phi(x)$  be the characteristic function of  $CE_h$ . If there exists

a continuous function of bounded variation  $u(x)$  ( $-\infty < x < +\infty$ ), such that  $0 < A \leq u(x) \leq \frac{1}{2} + \Phi(x) + B\Phi(x)\Phi(-x)$  ( $B > 0$ ) and

$$\int_{-\infty}^{\infty} c(\sigma) \exp \left[ -\int_{-\sigma}^{\sigma} \frac{d\tau}{u(e^{\tau}) + u(-e^{\tau})} \right] d\sigma = \infty,$$

then every  $f(x + a)$  is contained in the subspace of  $L^1$  spanned by the functions  $f^{(n)}(x)$  and  $g(x + \xi)$ . In the fourth chapter the author derives results concerning approximation by weighted polynomials on non-compact sets and the determinacy of moment problems with non-compact „spectrum“ [cf. the third note quoted above].

János Horváth.

**Ghizzetti, Aldo:** Sugli sviluppi in serie di funzioni di Hermite. *Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser.* 5, 29—37 (1951).

Sei  $\omega_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} d^n e^{-x^2} / dx^n$  die  $n$ -te Hermite'sche Funktion. Verf. beweist folgenden Entwicklungssatz: Hinreichend dafür, daß die der Funktion

$f(x)$  zugeordnete Entwicklung  $\sum c_n \omega_n(x)$ , wobei  $c_n = \frac{1}{2^n n! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \omega_n(\xi) d\xi$ ,

in jedem endlichen Intervall gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert, ist, daß sowohl  $f(x)$  als  $f'(x)$  summierbare Norm haben in  $(-\infty, \infty)$ . Für diesen Satz gibt Verf. einen einfachen Beweis und diskutiert den Zusammenhang des Satzes mit Ergebnissen von Stone und Picone.

Karl Prachar.

Touchard, Jacques: Sur une propriété des polynômes orthogonaux. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 2279—2281 (1951).

Sei  $p_n(x)$  das System der orthogonalen Polynome in bezug auf die Massenbelegung  $d\alpha(x)$  im Intervall  $[a, b]$ . Sei ferner  $f_n(x, y) = \int_a^b (x - zy)^n d\alpha(z)$ . Verifiziert den Zusammenhang der  $p_n$  mit den  $f_n$ . Schreibt man  $f_{2n-1}(x, y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(x - \alpha_i y)^{2n-1}$ , was im allgemeinen stets möglich ist, so ist  $\Pi(x - \alpha_i y)$  eine Kovariante von  $f_{2n-1}$  (Kanonizante von  $f_{2n-1}$ , vgl. z. B. Dickson-Bodewig. Höhere Algebra, Leipzig 1929, p. 35). Es gilt:  $y^n p_n(x/y)$  ist bis auf einen konstanten Faktor mit dieser Kovariante identisch. Als Anwendung wird z. B. die folgende Formel über Legendresche Polynome gezeigt:

$$P_{2n-1}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left[ x - \sqrt{x^2 - 1} \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n} \right]^{2n-1}.$$

Karl Prachar.

Spragens, W. H.: On series of Walsh eigenfunctions. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 202—204 (1951).

The author's theorem states that if a Lebesgue-integrable function on the interval  $0 \leq x \leq 1$  be expanded (1) in terms of the eigen-functions of the problem  $u'' + (p^2 - g(x))u = 0$ , with  $u(0) = u(1) = 0$ ,  $g(x)$  being continuous on  $0 \leq x \leq 1$ , and (2) in terms of the functions  $\sqrt{2} \sin k\pi x$ , then the two series are uniformly equiconvergent on the interval. Other results of a similar character had previously been given by J. L. Walsh [Ann. of Math., II. Ser. **24**, 109—120 (1922)] and A. Haar [Math. Ann. **69**, 331—371 (1910)]. The author states that his theorem extends to double series, as considered by J. Mitchell [Amer. J. Math. **65**, 616—636 (1943)]. In proving his theorem the author asserts that the difference-kernels are readily seen to be bounded. This, in the reviewer's opinion, needs further investigation.

Frederick V. Atkinson.

Lorentz, G. G.: Deferred Bernstein polynomials. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 72—76 (1951).

On sait que, si  $f(x)$  est continue dans l'intervalle fermé  $0 \leq x \leq 1$ , les polynômes de Bernstein  $B_n(x; f) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n}\right) \cdot p_{vn}(x)$ , où  $p_{vn}(x) = C_{n,v} x^v (1-x)^{n-v}$ , tendent uniformément dans  $[0, 1]$  vers  $f(x)$  et que la relation  $B_n(x; f) \rightarrow f(x)$  a lieu pour certaines classes de fonctions discontinues [Chlodowsky, Fundamenta Math. **13**, 62—72 (1929) et Herzog et Hill, Amer. J. Math. **68**, 109—124 (1946)]. — Supposons que  $f(x)$  soit périodique de période 1 et posons pour  $a$  quelconque  $f_a(x) = f(x-a)$ . L'A. examine le comportement de la famille de polynômes  $B_n(x; f_a) = \sum_{v=0}^n f\left(\frac{v}{n} - a\right) p_{vn}(x)$  lorsque  $f(x)$  n'est pas bornée; il prouve entre autres que: Si  $f(x)$  est continue dans l'intervalle ouvert  $0 < x < 1$  et remplit dans le voisinage de  $x = 0$  la condition  $|f(x)| = O(\exp[|x|^{-1/(2+\varepsilon)}])$  pour un  $\varepsilon > 0$ , alors la limite  $B_n(x; f_a) \rightarrow f_a(x)$  existe pour  $x \neq a$  et pour presque toutes les valeurs de  $a$ ; si en outre  $f(x) \rightarrow \infty$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , la suite  $\{B_n(x; f_a)\}$  cesse d'être bornée pour chaque  $x \neq a$  et pour certaines valeurs de  $a$  dont l'ensemble est de puissance du continu.

F. Leja.

Kingsley, Edward H.: Bernstein polynomials for functions of two variables of class  $C(k)$ . Proc. Amer. math. Soc. **2**, 64—71 (1951).

Soit  $\Phi(x, y)$  une fonction définie dans le carré  $R \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ . Posons  $\lambda_{n,p}(t) = c_{n,p} t^p (1-t)^{n-p}$  et désignons par  $B_{m,n}(x, y)$  le polynôme

$$B_{m,n}(x, y) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m \Phi\left(\frac{p}{n}, \frac{q}{m}\right) \cdot \lambda_{n,p}(x) \cdot \lambda_{m,q}(y).$$



L'A. étend des résultats connus sur les polynômes de Bernstein d'une seule variable [Commun. Soc. math. Kharkow, II. Ser. 13, Nr. 2—5, p. 49—194 (1912)] et S. Weigert, (ce Zbl. 4, 106) et démontre que: Si  $\Phi(x, y)$  est de classe  $C^{(k)}$  dans  $R$  (c'est-à-dire admet des dérivées partielles continues d'ordre  $k$ ), il existe dans  $R$  la limite

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \frac{\partial^k B_{m, n}}{\partial x^i \partial y^{k-i}} = \frac{\partial^k \Phi}{\partial x^i \partial y^{k-i}} \quad \text{pour } i = 0, 1, \dots, k$$

la convergence étant uniforme dans  $R$ .

F. Leja.

**Heyting, A.:** Note on the Riesz-Fischer theorem. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 35—40, Indagationes math. 13, 35—40 (1951).

Es handelt sich um die intuitionistische Fassung des Riesz-Fischerschen Theorems, daß im Intervall  $[0, 1]$  im Brouwerschen Sinn quadratisch integrierbare Funktionen bezüglich der Metrik  $\int f^2 dx$  einen vollständigen Raum bilden. Verf. führt den Beweis durch Abänderung des von Neumannschen formalistischen Beweises, benützt aber leider wiederholt intuitionistisch allgemein nicht erklärbare Maximum- und Minimumbildungen. Es ist zu hoffen, daß sich der Beweis richtig stellen läßt.

Ernst Witt.

**Boas jr., R. P.:** Partial sums of Fourier series. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 414—417 (1951).

Let  $f(x)$  be a real even integrable function of period  $2\pi$ ,  $a_n$  its Fourier cosine coefficients and  $s_n(x)$  the partial sums of its Fourier series. 1. If  $f(x)$  is constant in a neighbourhood of 0,  $s_n(0) - f(0)$  and  $s_{n+1}(0) - f(0)$  can not have the same sign for a sequence of values of  $n$  which have density 1, or even Pólya maximum density 1. 2. For any  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ , there is an  $f(x)$  satisfying the previous condition and with  $s_n(0) \leq f(0)$  at most for a sequence  $n$  of density  $\varepsilon$ . 3. If  $f(x)$  is analytic for  $|x| \leq \delta$ ,  $\delta > 0$ , and  $s_n(0) - f(0)$  has the same sign as  $s_{n+1}(0) - f(0)$  for all  $n$  except for a sequence of zero density, then  $a_n = O(e^{-n\varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ . 4. If  $f(x)$  has a continuous  $p^{\text{th}}$  derivative for  $|x| \leq \delta$  and  $s_n(0) - f(0)$  has the same sign as  $s_{n+1}(0) - f(0)$  for all but a finite number of  $n$ , then  $a_n = O(n^{-p})$ . — The author announces that more general results will be published soon.

János Horváth.

### Spezielle Orthogonalfunktionen:

**Tricomi, F. G. and A. Erdélyi:** The asymptotic expansion of a ratio of gamma functions. Pacific J. Math. 1, 133—142 (1951).

Verff. geben asymptotische Darstellungen des Quotienten  $\Gamma(z + \alpha)/\Gamma(z + \beta)$  für bel. komplexe  $\alpha$  und  $\beta$  und komplexe  $z$  mit den Einschränkungen  $z \neq -\alpha - \lambda$  und  $z \neq -\beta - \lambda$  für  $\lambda = 0, 1, 2, \dots$  an. Im ersten (größeren) Teil gibt Tricomi eine bereits an anderer Stelle veröffentlichte Ableitung (dies. Zbl. 38, 222). In einem zweiten, kurzen Teil gibt Erdélyi eine andere asymptotische Darstellung

mit Hilfe eines Schleifenintegrals an:  $\frac{\Gamma(z + \alpha)}{\Gamma(z + \beta)} \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^{\alpha - \beta - n}}{\Gamma(\alpha - \beta - n + 1)}$ . Dabei sind

die  $a_n = \frac{1}{n!} \Gamma(1 + \alpha - \beta) B_n^{(\alpha - \beta + 1)}(\alpha)$ . Die  $B_n$  sind verallgemeinerte Bernoullische Polynome. — Durch Spezialisierung werden dann asymptotische Darstellungen für große  $n$  der Ausdrücke  $\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)}$  und  $\binom{x}{n}$  sowie eine Berechnungsmethode der Zahl  $\pi$  angegeben.

Wolfhart Haacke.

**Vălcovici, V.:** Sur l'approximation des formules asymptotiques pour les fonctions de Bessel. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Sti. A 3, 87—94, russische und französ. Zusammenfassg. 95, 95—96 (1951) [Rumänisch].

Les erreurs des expressions asymptotiques des fonctions de Bessel  $J_\nu(z)$ ,  $Y_\nu(z)$ ,  $H_\nu^{(1)}(z)$ ,  $H_\nu^{(2)}(z)$ ,  $K_\nu(z)$  pour des valeurs de  $z$  ayant un module très grand, sont indiquées généralement

par leur ordre de grandeur, p. ex.  $O(z^{-n})$  ce qui ne satisfait pas les exigences des applications. — L'A. établit une limite supérieure du module de l'erreur pour les expressions asymptotiques de toutes ces fonctions, en partant de l'identité

$$H_\nu^{(1)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \frac{e^{i(z-\nu\pi/2-\pi/4)}}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-1/2} \left(1 + \frac{i u}{2z}\right)^{\nu-1/2} du$$

et en remplaçant le binôme  $(1 + i u/2z)^{\nu-1/2}$  par une somme de Taylor, dont il évalue le reste. Il déduit ainsi comme limite supérieure du module de l'erreur, le module du terme qui suit immédiatement dans le développement asymptotique. Cette propriété est valable pour toute valeur (réelle ou complexe) de  $\nu$  et pour tout  $z$  réel (réel et positif quand il s'agit de  $K_\nu$ ).

Autoreferat.

**Mukherjee, B. N. and T. S. Nanjundiah:** On an inequality relating to Laguerre and Hermite polynomials. Math. Student 19, 47—48 (1951).

**Mitra, S. C. and A. Sharma:** On generating functions of polynomials. I. Generalised parabolic cylinder functions of Weber. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 46—50 (1951).

Es handelt sich um erzeugende Funktionen für die polynomischen Teile  $\bar{H}_{km}(y)$  und  $\bar{H}_{k,m+1}(y)$  der von den Verff. (dies. Zbl. 34, 337) eingeführten verallgemeinerten Funktionen des parabolischen Zylinders

$$\bar{H}_{km}(y) = (-1)^m k^m \Gamma(m+1) L_m^{(1/k-1)}\left(\frac{y^k}{k}\right),$$

$$\bar{H}_{k,m+1}(y) = (-1)^m k^m \Gamma(m+1) y L_m^{(1/k)}\left(\frac{y^k}{k}\right),$$

$[L_m^{(\alpha)}(x)$  Laguerresche Polynome], und es werden folgende Entwicklungen bewiesen:

$$(1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\{-(x^k + s^k)/k\} H_{km}(x) \bar{H}_{km}(y) s^{2m+1/k-1}}{k^{2m} \Gamma(m+1/k) \Gamma(m+1)} = (1-s^2) k^{1/k-1} (xy)^{(k-1)/2}$$

$$(2) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\{-(x^k + y^k)/k\} H_{k,m+1}(x) \bar{H}_{k,m+1}(y) s^{2m+1/k}}{k^{2m+1/k} \Gamma(m+1) \Gamma(m+1/k)} = (xy)^{1/2} (1-s^2)^{-1}$$

$$(3) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{-m-1/k} \alpha^{km}}{k^m \Gamma(m+1)} \bar{H}_{km}(x) = (\alpha^k + c)^{-1/k} \exp\{\alpha^k x^k / (k \alpha^k + c)\},$$

$$(4) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{-m-1/k-1} \alpha^{k(m+1)}}{k^m \Gamma(m+1)} \bar{H}_{k,m+1}(x) = \alpha x (\alpha^k + c)^{-1/k-1} \exp\{\alpha^k x^k (\alpha^k + c)^{-1}\}.$$

Otto Volk.

**Bagchi, Hari Das and Phatik Chand Chatterji:** Note on Weber's parabolic cylinder function  $D_n(z)$  and its associated equations (functional and differential). Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis mat., III. Ser. 5, 71—80 (1951).

Mit den assoziierten Gleichungen meinen Verff. die Differentialgleichung, die Rekursionsformel nach  $n$  und die Beziehung zwischen  $D_n$ ,  $D_{n-1}$  und  $D'_n$ . Sie beweisen, daß aus je zwei dieser Relationen die dritte folgt, ein Umstand, der wohl in den meisten der zahlreichen Arbeiten über Zylinderfunktionen benutzt wird, und im übrigen, was Verff. nicht bemerken, für eine viel allgemeinere Klasse von Funktionen gilt. Ebenso trivial sind die weiteren Erörterungen über den Zusammenhang zwischen den Lösungen der Differentialgleichung, der Rekursionsformel und einer erzeugenden Funktion, zumal sich Verff. auf den Fall positiv ganzzahliger  $n$  beschränken, in dem die Webersche Differentialgleichung bekanntlich im wesentlichen die der Hermiteschen Polynome ist.

Wolfgang Hahn.

**Bagchi, Hari Das and Nalini Kanta Chakrabarti:** Note on certain integrals and series involving Tschebyscheff's functions. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 37—40 (1951).

Vorliegende Arbeit befaßt sich mit den zwei Arten Tschebyscheffscher Funktionen  $T_n(z)$  und  $V_n(z)$  und baut auf zwei frühere Arbeiten der Verff. auf (dies.



Zbl. 40, 33). Zweck der Arbeit ist a) die Ableitung einiger bestimmter Integrale, aus denen die obigen Funktionen berechnet werden können; b) die Untersuchung ihrer asymptotischen Werte; c) die bedingte Summierung einiger unendlichen Reihen, deren Glieder die obigen Funktionen enthalten. Die bestimmten Integralausdrücke für die obigen Funktionen, welche hier abgeleitet werden, enthalten im Integranden Polynome und Potenzen trigonometrischer Funktionen. Diese Formeln werden besonders untersucht für große ganze positive Werte der Ordnungszahl  $n$ . Hierbei wird von der Stirlingschen Formel Gebrauch gemacht. Es ergeben sich obere Grenzen für die beiden obengenannten Funktionen. Mit Hilfe der obigen asymptotischen Formeln gelingt dann die bedingte Summierung von unendlichen Reihen, deren Glieder Produkte der obengenannten Funktionen enthalten.

Max J. O. Strutt.

Heuser, P.: Über eine Tschebyscheffsche Eigenschaft der Faberschen Polynome. Math. Z. 54, 339—342 (1951).

Sei  $U$  in der komplexen  $x$ -Ebene eine einfach zusammenhängende Umgebung von  $x = \infty$ , die durch (1)  $t = x + \frac{1}{x} P\left(\frac{1}{x}\right)$  ( $P$  Potenzreihe in  $x^{-1}$ ) auf  $|t| > r_0$  abgebildet wird. Die Faberschen Polynome  $p_n(x)$  zu  $U$  sind definiert durch  $t^n = p_n(x) + \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right)$ . Sei  $C_r$  das Bild von  $|t| = r > r_0$  bei (1). Verf. zeigt folgende Extremaleigenschaft von  $p_n(x)$ : Zu jedem  $q_n(x) = x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n \neq p_n(x)$ ,  $b_i$  beliebig, gibt es ein  $r(q_n) > r_0$ , so daß  $\max_{x \in C_r} |p_n(x)| < \max_{x \in C_r} |q_n(x)|$  für alle  $r > r(q_n)$ .

Karl Prachar.

Campbell, R.: Comportement des fonctions de Mathieu associées pour les grandes valeurs des paramètres. Ann. Inst. Fourier 2, 113—121 (1951).

Ausführliche Darstellung der in dies. Zbl. 29, 30 referierten Arbeit.

Josef Meixner.

## Funktionentheorie:

Stojakovitch, Mirko: Sur une généralisation de la formule de Cauchy. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 35—37 und französ. Zusammenfassg. 37 (1951) [Serbisch].

Garnier, René: Sur le problème de Riemann-Hilbert. Compositio math. 8, 185—204 (1951).

Le présent article a pour but d'étendre une méthode de G. D. Birkhoff [Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 49, 521 (1913)] au moyen du théorème suivant: Hypothèses:  $C$  est une courbe analytique fermée du plan complexe sans points doubles,  $\tau(z)$  une fonction holomorphe de module unité sur  $C$ ,  $p$  un entier non négatif,  $g(z)$  une fonction holomorphe à l'intérieur de  $C$ , continue et lipschitzienne sur  $C$ ,  $a(z)$  une fonction lipschitzienne sur  $C$  [chez G. D. Birkhoff,  $a(z)$  est holomorphe par tronçons]. Conclusion: La fonction  $F(X) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) a(z) g(z)}{z - X} dz$  est holo-

morphe à l'intérieur de  $C$  et il existe un nombre positif  $\eta$ , indépendant de  $g(z)$ , arbitrairement petit pour  $p$  suffisamment grand, tel que  $\max |F(X)| \leq \eta \cdot \max |g(z)|$ . Esquisse de la démonstration:  $s = s(z)$  désigne une abscisse curviligne sur  $C$ ,  $z = z(s)$  la représentation de  $C$  au moyen de  $s$ ,  $l$  la longueur de  $C$ ,  $\theta = 2\pi s/l$ ,  $b(\theta) = a(z(l\theta/2\pi))$ ,  $b_n(\theta)$  la  $n^{\text{ième}}$  somme de Fejér de  $b(\theta)$ ,  $a_n(z) = b_n(2\pi s(z)/l)$ . Lemme: Quel que soit  $\varepsilon$  positif, il existe un entier  $N(\varepsilon)$  tel que, pour  $n > N(\varepsilon)$ ,  $\left| \frac{a_n(z'') - a_n(z')}{z'' - z'} - \frac{a(z'') - a(z')}{z'' - z'} \right|$  soit  $< A\varepsilon$  si  $|z' - z''| > \varepsilon$ ,  $< A$  si  $|z' - z''| \leq \varepsilon$ ,  $A$  représentant une constante de Lipschitz pour  $a(z)$ , indépendante de  $\varepsilon$ . — La fonction  $F(X)$  est prolongée sur  $C$  en posant  $F(x) = \lim_{X \rightarrow x} F(X)$ , c'est-à-dire la limite pour  $X$  tendant vers  $x$  par un chemin quelconque extérieur à  $C$ , n'aboutissant pas en  $x$  tangentielle-

ment à  $C$ ; alors,  $\max |F(X)|$  est  $= \max |F(x)|$ . Posant

$$F_n(x) = \lim_{X \rightarrow x} \text{abél.} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\tau^p(z) (a_n(z) - a_n(x) + a(x)) g(z)}{z - X} dz$$

$$R_n(x) = \lim_{X \rightarrow x} \text{abél.} \frac{1}{2\pi i} \int_C \tau^p(z) \frac{a(z) - a_n(z) - a(x) + a_n(x)}{z - x} \frac{z - x}{z - X} g(z) dz,$$

$F(x)$  est  $= F_n(x) + R_n(x)$ .  $C$  est décomposée en un petit arc  $\gamma'$  contenant  $x$  à son intérieur et la fermeture  $\gamma''$  de son complément. L'uniforme petitesse pour  $p$  grand est établie pour  $R_n(x)$  au moyen du lemme et pour  $F_n(x)$  en remplaçant  $C$  par une courbe intérieure à distance positive de  $C$  et située dans le domaine d'holomorphie de  $\tau(z)$ ,  $a_n(z)$  et  $g(z)$ . (Remarque du Réf.: L'hypothèse d'analyticité de  $C$  semble pouvoir être remplacée par celle de l'existence d'une tangente, sauf peut-être lors du prolongement abélien de  $F$  sur  $C$ .) — Dans la suite, des résultats précis sur  $\eta$  sont obtenus en supposant que  $C$  est la circonférence  $z = e^{i\theta}$  (cas particulièrement important en vue de la possibilité d'y ramener le cas général par représentation conforme). En outre  $a(z)$  est supposée à dérivée lipschitzienne sur  $C$  et  $g(z) = \sum H_n z^n$  holomorphe à l'intérieur de  $C$ , continue et lipschitzienne sur  $C$ . Des théorèmes sur l'approximation des suites de Fourier dus à de la Vallée Poussin (Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, Gauthier-Villars, 1919, p. 23, 24 et 27) appliquées à la série de Fourier (complexe)

de  $a(z)$  permettent d'obtenir une évaluation exacte de  $I_p(x) = \lim_{X \rightarrow x} \text{abél.} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z^p a(z)}{z - X} dz$  pour

$p$  entier non négatif, d'où est déduite pour  $\eta$  l'expression  $K p^{-1} \log p$ , où  $K$  ne dépend que de  $a(z)$ . Sous les mêmes hypothèses une autre méthode basée sur l'approximation par sommes de Fejér fournit une évaluation exacte de  $I_p(x)$  au moyen d'une intégrale contenant la fonction  $b(\theta)$ , d'où sont déduites des évaluations approchées des mêmes  $I_p(x)$  pour  $p$  grand. L'expression obtenue pour les  $I_p(x)$  permet d'établir aisément que les  $I_p(x)$  possèdent une dérivée continue.

Christian Paut.

Dufresnoy, J. et Ch. Pisot: Prolongement analytique de la série de Taylor. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 105—124 (1951).

Verff. wenden die Laplace-Borelsche Transformation an, um einige, im wesentlichen bekannte Relationen zwischen Potenzreihen und ganzen Funktionen vom höchstens mittleren Typus erster Ordnung zu beweisen. Wenn der Konvergenzradius von  $g(\zeta) = a_0 + a_1 \zeta + \dots + a_n \zeta^n + \dots$  nicht null ist, so gibt es Funktionen  $f(z)$  vom höchstens mittleren Typus erster Ordnung derart, daß  $a_n = f(n)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ); und umgekehrt. Sei  $f(z) = \int_{\Gamma} e^{z\sigma} \Phi(\sigma) d\sigma$ , wo  $\Phi(\sigma)$  stetig auf

$\Gamma$  ist, und sei die Laplace-transformierte von  $f(z) \cap l(s) = \int_{\Gamma} \frac{\Phi(\sigma) d\sigma}{s - \sigma}$  regulär und

eindeutig außerhalb einer Kurve  $L$ , welche die Kurve  $\Gamma$  umkreist und deren Transformierten durch die Translationen von der Größe  $2k\pi i$  ( $k$  ganz) außerhalb  $L$

liegen. Dann ist  $\alpha(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(n)|}{n}$ , wo  $\alpha(\varphi) = \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log |f(re^{i\varphi})|}{r}$  bezeichnet. Wenn  $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$  für  $f(z)$  ist, so ist  $\alpha(0) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log |f(n_r)|}{n_r}$ ,

wo  $\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{n_r}{r} = 1$ . Ist insbesondere  $f(n_r) = 0$ , so ist  $f(z) \equiv 0$ . Diese Sätze erlauben, die analytische Fortsetzung zu studieren. U. a. wird folgender Satz bewiesen: Damit die Funktion  $g(\zeta) = \sum a_n \zeta^n$  sich in das Äußere seines Konvergenzkreises analytisch fortsetzen läßt, ist es notwendig und hinreichend, daß  $a_n = b_n + c_n$ , wo  $\sum b_n \zeta^n$  einen größeren Konvergenzkreis als  $g(\zeta)$  hat und  $\sum c_n \zeta^n$  radial bis  $\zeta = \infty$  fortsetzbar ist. Die obigen Sätze werden noch verallgemeinert und präzisiert. Einige Anwendungen werden gegeben.

Kaarlo Veikko Paatero.

Wilson, R.: Some extensions of Piranian's theorem. Duke math. J. 18, 643—651 (1951).

Sei (1)  $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$  regulär analytisch für  $|z| < |z_0|$  mit Ausnahme von Polen  $z_r (\neq 0)$ ,  $r = 1, 2, \dots, r$ . Die einzige Singu-



larität von  $f(z)$  auf dem Kreise  $|z| = |z_0|$  sei eine gewöhnliche algebraisch-logarithmische Singularität vom Gewicht  $[\sigma, k]$  im Punkte  $z_0$ . Ein Satz von Piranian [Duke math. J. 11, 147—153 (1944)] gibt für  $\sigma$  und  $k$  Ausdrücke als Funktionen der Koeffizienten von (1). Der Satz ist schon früher für den Fall verallgemeinert, wo  $z_0$  eine transzendente algebraisch-logarithmische Singularität (H. G. Eggleston und R. Wilson, dies. Zbl. 39, 305) oder ein isolierter wesentlich singulärer Punkt von endlicher exponentieller Ordnung ist (A. J. Macintyre und R. Wilson, dies. Zbl. 31, 300), oder wo es mehrere algebraisch-logarithmische Singularitäten auf dem Kreise  $|z| = |z_0|$  gibt. Verf. entwickelt jetzt eine allgemeine Methode, nach welcher die oben erwähnten Resultate als Spezialfälle erhalten werden.

Kaarlo Veikko Paatero.

Seleznëv, A. I.: Über universelle Potenzreihen. Mat. Sbornik, n. Ser. 28 (70), 453—460 (1951) [Russisch].

Sei die Menge der Funktionen  $f(z)$  der komplexen Veränderlichen  $z$ , von denen jede auf einer ihr zugehörigen nicht leeren Menge  $\mathcal{E}_f$  der komplexen Zahlenebene als konvergente Summe einer Polynomreihe definiert ist. Gehört  $\mathcal{E}_f$  zu  $f(z) \in S$ , so soll mit  $\mathcal{E}_f^*$  bezeichnet werden die zugehörige Menge der Punkte der Regularität, d. h. der Punkte  $z \in \mathcal{E}_f$ , für die es eine Umgebung  $\Delta_z$  gibt, so daß auf dem Durchschnitt von  $\mathcal{E}_f$  und  $\Delta_z$  die  $f(z)$  darstellende Reihe gleichmäßig konvergiert.  $S_1$  sei die Menge der in  $S$  gelegenen reellen Funktionen  $f(x)$  der reellen Veränderlichen  $x$ . Stets wenn  $z = 0$  (oder  $x = 0$ ) nicht zu  $\mathcal{E}_f$  gehört, sei  $f(0) = 0$  gesetzt. Zu  $S_1$  gehört z. B. jede auf einem abgeschlossenen Intervall der  $x$ -Achse stetige reelle Funktion (Weierstraß); zu  $S$  gehört z. B. jede Funktion  $f(z)$ , die stetig ist auf einem nirgends dichten und die  $z$ -Ebene nicht zerlegenden Kontinuum (M. A. Lavrentieff, dies. Zbl. 10, 264; 17, 206). Verf. zeigt

durch Konstruktion: Es existieren Potenzreihen  $(1) \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} z^{\nu}$  mit folgender Eigenschaft: Zu

jedem  $f(z) \in S$  und jedem  $z = 0$  und  $z = \infty$  verbindenden Jordanschen Kurvenbogen  $\gamma$  gibt es eine Teilfolge der Folge der Partialsummen von (1), die auf  $\mathcal{E}_f$  gegen  $f(z) - f(0)$  konvergiert, und zwar so, daß jeder nicht auf  $\gamma$  gelegene Punkt von  $\mathcal{E}_f^*$  bezüglich dieser Teilfolge ein Punkt der Regularität ist (so daß also die Teilfolge auf jeder abgeschlossenen, beschränkten und zu  $\gamma$  fremden Teilmenge von  $\mathcal{E}_f^*$  gleichmäßig konvergiert). Eine Reihe (1) mit dieser Eigenschaft

wird universell genannt. Weiter existieren Potenzreihen  $(2) \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} x^{\nu}$  mit reellen Koeffizienten,

genannt universell im reellen Gebiet, mit folgender Eigenschaft: Zu jedem  $f(x) \in S_1$  gibt es eine Teilfolge der Partialsummen von (2), die auf  $\mathcal{E}_f$  gegen  $f(x) - f(0)$  konvergiert, und zwar so, daß jeder von  $x = 0$  verschiedene Punkt von  $\mathcal{E}_f^*$  bezüglich dieser Teilfolge ein Punkt der Regularität ist. Es gilt zudem: 1. Ist  $R$  eine abzählbare und überall dichte Punktmenge der komplexen

Zahlenebene, so ist jede Potenzreihe  $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} z^{\nu}$  (auf unendlich viele Weisen) zerlegbar in die Summe

zweier universeller Reihen (1) und  $\sum_{\nu=1}^{\infty} (a_{\nu} - \alpha_{\nu}) z^{\nu}$  derart, daß für jedes  $\nu = 1, 2, \dots$  einer der

Koeffizienten  $\alpha_{\nu}$  und  $a_{\nu} - \alpha_{\nu}$  zu  $R$  gehört. Ein ganz analoger Satz 2 gilt bei Beschränkung auf das reelle Gebiet. Durch Anwendung der oben genannten Sätze von Weierstraß und Lavrentieff gewinnt Verf. weitere folgende Aussage. 3. Die Reihe (1) sei universell, und es sei  $f(z)$  auf der beschränkten meßbaren Menge  $E$  der  $z$ -Ebene definiert und meßbar [d. h. Real- und Imaginärteil von  $f(z)$  seien dort meßbar]; dann gibt es eine Teilfolge von Partialsummen von (1) und eine Folge  $F_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) abgeschlossener Teilmengen von  $E$  mit  $F_1 \subset F_2 \subset \dots$  und  $\mu(F_1 + F_2 + \dots) = \mu E$ , so daß die Teilfolge fast überall auf  $E$  gegen  $f(z)$  konvergiert, und zwar gleichmäßig auf jeder Menge  $F_n$ . Eine ganz entsprechende Aussage 4 gilt, wenn gegeben sind eine im reellen Gebiet universelle Reihe (2) und eine reelle Funktion  $f(x)$  der reellen Veränderlichen  $x$ , die auf einer beschränkten meßbaren Menge  $E_1$  der  $x$ -Achse definiert und meßbar ist. — Verf. verweist auf die Sätze von D. E. Meňšov [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 49, 79—82 (1945); ferner dies. Zbl. 41, 192] über universelle trigonometrische Reihen, zu denen 1. bis 4. in Analogie stehen.

Werner Meyer-König.

Chow, Hung Ching: A note on the summability of a power series on its circle of convergence. J. London math. Soc. 26, 290—294 (1951).

Die Potenzreihe  $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} z^{\nu}$  habe den Konvergenzradius 1. Es handelt sich um die

Cesàrosche  $(C, \alpha)$ - bzw.  $\{C, \alpha\}$ -Summierbarkeit ( $\alpha > -1$ ) der Reihe  $(1) \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{\nu} e^{i\nu\theta}$  ( $\theta$  reell),

die in einer Reihe von Fällen gesichert ist, wenn, was im folgenden stets vorausgesetzt wird,  $f(z)$  für reelle Zahlen  $p > 0$  und  $k(0 < k \leq 1)$  zur (komplexen) Klasse  $\text{Lip}(k, p)$  gehört, d. h. wenn  $M_p(r, f'(z)) \leq K(1-r)^{-1+k}$  für  $r \rightarrow 1-0$  ist ( $K$  von  $r$  unabhängig), wobei  $M_p(r, f) = \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$  gesetzt ist. Ist nämlich  $p > 1$ ,  $k p > 1$ ,  $\alpha > -k$ , so ist (1)  $(C, \alpha)$ -summierbar gleichmäßig in  $\theta$ ; ist  $p \geq 1$ ,  $k p = 1$ ,  $\alpha > -k$ , so ist (1)  $(C, \alpha)$ -summierbar für fast alle  $\theta$ ; ist  $0 < p \leq 1$ ,  $k = 1$ ,  $\alpha = p^{-1} - 1$ , so ist (1)  $|C, \alpha|$ -summierbar für fast alle  $\theta$ ; ist  $p > 1$ ,  $k p > 1$ , so ist (1)  $|C, \alpha|$ -summierbar für alle  $\theta$ , sofern  $\alpha > p^{-1} - k$  für  $1 < p \leq 2$  bzw.  $\alpha > 2^{-1} - k$  für  $p \geq 2$  ist [G. H. Hardy und J. E. Littlewood, Math. Ann. **79**, 159–209 (1926), Math. Z. **28**, 612–634 (1928); Verf., dies. Zbl. **18**, 17, 120, J. London math. Soc. **17**, 17–23 (1942); zum Teil ist mehr bekannt, als hier angegeben ist]. Verf. studiert die restlichen Fälle und erhält folgende Resultate: 1. Ist  $p > 0$ ,  $k p < 1$ , so ist (1)  $(C, \alpha)$ -summierbar für fast alle  $\theta$ , sofern  $\alpha > p^{-1} - 1 - k$  für  $0 < p \leq 1$  bzw.  $\alpha > -k$  für  $p \geq 1$  ist. 2. Ist  $p > 0$ ,  $k = 1$ ,  $k p \leq 1$ , so ist (1)  $|C, \alpha|$ -summierbar für fast alle  $\theta$ , sofern  $\alpha > p^{-1} - k$  für  $0 < p \leq 2$  bzw.  $\alpha > 2^{-1} - k$  für  $p \geq 2$  ist. In einer zusätzlichen Bemerkung weist Verf. darauf hin, daß ein mit dem Fall  $1 < p \leq 2$  von 2. äquivalentes Resultat unabhängig von N. Matsuyama (dies. Zbl. **41**, 193) angegeben wurde. Werner Meyer-König.

**Lelong, Pierre:** On a problem of M. A. Zorn. Proc. Amer. math. Soc. **2**, 12–19 (1951).

Eine von M. A. Zorn (dies. Zbl. **31**, 296) und R. Ree (dies. Zbl. **32**, 404) bearbeitete Frage wird in wesentlich erweiterter Form gestellt und in eleganter Weise beantwortet. Es sei  $F = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} x^i y^j$  eine Potenzreihe in den komplexen Veränderlichen  $x$  und  $y$  ( $a_{ij}$  komplex),  $S_{ab}$  die Substitution  $x = at$ ,  $y = bt$  ( $a, b, t$  komplex),  $F_{a,b}(t)$  die durch Anwendung von  $S_{ab}$  auf  $F$  und formales Zusammenfassen nach Potenzen von  $t$  entstehende Potenzreihe in  $t$ , und es sei  $F = \sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij} x^i y^j|$ . Unter einer Klasse  $[S_{ab}]$  werde eine Menge von Substitutionen  $S_{ab}$  verstanden, deren zugehörige Paare  $(a, b)$  einer gegebenen Menge von Paaren komplexer Zahlen angehören, wobei  $(0, 0)$  als Paar stets ausgeschlossen sein soll. Eine gegebene Klasse  $[S_{ab}]$  heißt normal, wenn für sie der folgende Satz richtig ist: Besitzt bei beliebigem, sodann festgehaltenem  $F$  für jedes  $S_{ab} \in [S_{ab}]$  das zugehörige  $F_{a,b}(t)$  einen nicht verschwindenden Konvergenzradius, so ist  $F$  für hinreichend kleine Werte von  $|x|$  und  $|y|$  konvergent. Die Klasse  $[S_{ab}]$ , die zur Menge aller Paare komplexer  $a, b$  gehört, ist normal (M. A. Zorn), ebenso die Klasse  $[S_{ab}]$ , die zur Menge aller Paare reeller  $a, b$  gehört (R. Ree). Verf. beweist: Die Klasse  $[S_{ab}]$  ist dann und nur dann normal, wenn ihr in der vollen komplexen Zahlenebene gelegenes Bild  $E(\beta)$ , nämlich die Menge aller Zahlen  $\beta = b/a$  für alle zu  $[S_{ab}]$  gehörigen Paare  $(a, b)$ , nicht enthalten ist in einer Menge, welche Summe von abzählbar vielen beschränkten und abgeschlossenen Mengen ist und verschwindende Kapazität besitzt. Zum Kapazitätsbegriff vgl. z. B. R. Nevanlinna, Eindeutige analytische Funktionen, Berlin 1936 (dies. Zbl. **14**, 163), S. 114. Beim Beweis wird die Theorie des Potentials und der subharmonischen Funktionen (vgl. z. B. T. Radó, Subharmonic functions, Berlin 1937, dies. Zbl. **16**, 249) benutzt, ferner greift Verf. auf einen früheren Satz über Polynomfolgen (dies. Zbl. **23**, 240) zurück, der jetzt erweitert wird. Werner Meyer-König.

**Ullman, J. L.:** Hankel determinants whose elements are sections of a Taylor series. I. Duke math. J. **18**, 751–756 (1951).

Es sei  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{k-1}$  für  $|z| > R$  ( $0 \leq R < \infty$ ) konvergent. Aus den Teilsummen  $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{k-1}$  werden für ganze Zahlen  $p \geq 0$  und  $n \geq 1$  die (Hankelschen) Determinanten  $S_{n,p}(z) = (s_{n+i+j-2}(z))$  gebildet ( $i$  Zeilen-,  $j$  Spaltenindex;  $i, j = 1, 2, \dots, p+1$ ). Es handelt sich dann um die Lage der Nullstellen von  $S_{n,p}(z)$  im Zusammenhang mit den Nullstellen von  $f(z)$ , worüber man im Fall  $p = 0$ , d. h.  $S_{n,p}(z) = s_n(z)$ , klassische Sätze von A. Hurwitz und R. Jentzsch (vgl. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin 1929, S. 90–95) kennt. Der kleinste Kreis  $|z| = r_p$  von der Eigenschaft, daß  $f(z)$  außerhalb regulär ist abgesehen von Polen, deren gesamte Vielfachheit (= Summe der Vielfachheiten der einzelnen Pole)  $p$  nicht übersteigt, sei mit  $\Sigma_p$  bezeichnet. Dann gilt bei festem  $p$ : (1) Sei  $z = \beta$  außerhalb  $\Sigma_p$  gelegen und  $f(\beta) = 0$ ; dann ist  $\beta$  Häufungspunkt der Menge  $M$  der Nullstellen der  $S_{n,p}(z)$  [ $n = 1, 2, \dots$ ; eine Stelle, die Nullstelle unendlich vieler  $S_{n,p}(z)$  ist, ist unendlich oft zu zählen]. (2) Die gesamte Vielfachheit der außerhalb  $\Sigma_p$  gelegenen Pole von  $f(z)$  sei genau gleich  $p$ ; dann ist jeder Punkt von  $\Sigma_p$  Häufungspunkt von  $M$ . Zum Beweis benützt Verf. Eigenschaften normaler Funktionenfamilien, ferner Formeln von J. Hadamard, in denen Produkte von Beträgen von Polstellen von  $f(z)$  mit den Determinanten  $(a_{n+i+j-2})$  ( $i, j = 1, \dots, p+1$ ) verknüpft werden (vgl. Encyclopädie math. Wiss. **11**, **3**, **1**, Leipzig 1909).



1921, S. 473–474). — Verf. kündigt an, daß in Teil II der Arbeit folgender Satz (3) bewiesen werden wird: (3) Sei  $p$  fest,  $\varepsilon > 0$  fest, und die Voraussetzung zu (2) erfüllt; die in  $|z| > r_p + \varepsilon$  gelegenen (endlichen) Nullstellen von  $f(z)$  seien  $\beta_i$  mit  $i = 1, \dots, n_\varepsilon$ ;  $\varepsilon' (0 < \varepsilon' < \varepsilon)$  werde so gewählt, daß sich die Kreise  $|z| = r_p + \varepsilon$  und  $|z - \beta_i| = \varepsilon'$  nicht schneiden, und die Herausnahme der zugehörigen abgeschlossenen Kreisscheiben aus der  $z$ -Ebene liefere das Gebiet  $R_\varepsilon$ . Dann hat  $S_{n,p}(z)$  bei genügend großem  $n$  keine (endliche) Nullstelle in  $R_\varepsilon$ . Ferner ist für jedes genügend große  $n$  die gesamte Vielfachheit der in  $|z - \beta_i| < \varepsilon'$  ( $i$  fest) gelegenen Nullstellen von  $S_{n,p}(z)$  gleich der Vielfachheit der Nullstelle  $\beta_i$  von  $f(z)$ .  
*Werner Meyer-König.*

**Newns, W. F.:** A note on basic sets of polynomials. *Duke math. J.* 18, 735—739 (1951).

Verf. bemerkt, daß ein von Boas (dies. Zbl. 31, 211) formulierter Satz falsch ist; er wird aber richtig, wenn man ein Zeichen  $<$  durch  $\leq$  ersetzt. Der berichtigte Satz besagt (für die Bezeichnungen vgl. Whittaker, *Sur les séries de base de polynomes*, Paris 1949, dies. Zbl. 38, 228): Es sei  $p_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} p_{nk} z^k$  eine

Polynombasis,  $|p_{nk}| \leq \beta_{n-k}$ ,  $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k R^{-k} \leq 1$ . Dann ist die Basis effektiv in  $|z| \leq R$ .

*Wolfgang Hahn.*

**Lochin, I. F.:** Über die Vollständigkeit eines Funktionensystems von der Form  $\{F_n(\lambda_n z)\}$ . *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 81, 141—144 (1951) [Russisch].

Die Arbeit schließt an einen bekannten Satz von Carleman an [Ark. Mat. Astr. Fys. 17, Nr. 9 (1923), insbes. p. 6] und hat dessen Verallgemeinerung zum Ziel: Sei  $F(z)$  eine ganze Funktion 1. Ordnung vom Normaltyp (V) mit der Entwicklung  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$  ( $a_n \neq 0$ ). Sämtliche Singularitäten ihrer Laplace-Trans-

fornierten  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}}$  mögen in  $(-1, 1)$  liegen. Die Folge  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  erfülle die

Carlemansche Bedingung (1)  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sum_{\lambda_j < R} \lambda_j^{-1}}{\log R} = \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Dann ist  $F(\lambda_n z)$  voll-

ständig in  $\mathfrak{F}(z)$ ,  $< \alpha \pi$  für die Funktionen aus  $L^2$ . Hierfür dient ein Hilfssatz, welcher aus (1) und den Bedingungen (V) für  $F(z)$  und  $F(\lambda_n) = 0$  für  $n = 1, 2, \dots$  sowie  $h(\pm \pi/2) < \alpha' \pi$ ,  $\alpha' < \alpha$ ,  $h(\varphi) < \infty$  für  $\varphi \neq \pm \pi/2$  [ $h(\varphi)$  ist der Indikator. Wir gebrauchen die Bezeichnung aus Doetsch, *Laplace-Transformation*, S. 76, dies. Zbl. 18, 129] vermöge eines Carlemanschen Hilfssatzes  $F(z) \neq 0$  erschließt. Damit wird die Behauptung des Hauptsatzes unschwer auf die Vollständigkeit von  $\{z^k\}$  zurückgeführt. Auf gewisse Berührungspunkte mit Überlegungen von Steinhaus und Kaczmarz, *Orthogonalreihen*, S. 145 ff., dies. Zbl. 13, 9 sei hingewiesen.

*Leo Schmetterer.*

**Shah, S. M.:** On exceptional values of entire functions. *Compositio math.* 9, 227—238 (1951).

Verf. verallgemeinert in seiner Arbeit zahlreiche Theoreme aus der Theorie der ganzen Funktionen endlicher Ordnung. Neben den bekannten Ausnahmewerten im Sinne von Borel [abgekürzt (e. v.) B], von Nevanlinna (e. v.) N, sowie von Valiron (e. v.) V, wird noch ein weiterer Ausnahmewert (e. v.) E erklärt.  $\alpha$  heißt (e. v.) E für  $f(z)$ , wenn  $\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\log M(r)}{n(r, \alpha) \cdot \varphi(r)} < 0$ , wobei  $\varphi(x)$  eine positive, nicht

fallende Funktion bedeutet, für die das Integral  $\int_A^\infty \frac{dx}{x \cdot \varphi(x)}$  konvergiert. Es wird

bewiesen, daß ein (e. v.) B auch ein (e. v.) E und ein (e. v.) E auch ein (e. v.) N ist. Die Relation in umgekehrtem Sinne wird an Beispielen widerlegt. Im folgenden werden Sätze über Borelsche Ausnahmewerte ganzer Funktionen übertragen auf Ausnahmewerte im oben angegebenen Sinne (e. v.) E, wobei i. a. entsprechende Resultate erhalten werden. Auch die Beweismethode weicht nicht wesentlich von

derjenigen der bekannten Sätze ab. Zum Schlusse zeigt Verf., daß eine meromorphe Funktion endlicher Ordnung  $\rho$  höchstens 2 Ausnahmewerte (e. v.) E aufweisen kann und, falls es genau deren 2 sind, die Ordnung  $\rho$  ganzzahlig wird. *H. P. Künzi.*

**Mitrović, Dragiša:** Sur une égalité d'intégrales. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 6, 193—199 und französ. Zusammenfassg. 200 (1951) [Kroatisch].

**Théorème:** Soit  $f(z)$  une fonction méromorphe dans le demi-cercle  $|z| \leq R$ ,  $\text{Im } z \geq 0$ . Soient  $\alpha_\nu$  les zéros d'ordre  $\alpha_\nu$ ,  $\beta_\mu$  les pôles d'ordre  $\beta_\mu$  de  $f(z)$  à l'intérieur de ce demi-cercle;  $r = 1, 2, \dots, n$  et  $\mu = 1, 2, \dots, p$ . On suppose qu'il n'y ait ni de zéros ni de pôles de  $f(z)$  sur le contour. Si  $H(z)$  est la dérivée de la fonction  $h(z)$  holomorphe dans le domaine considéré et réelle sur l'axe des  $x$ , on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^R [H(x) \log |f(x)| + H(-x) \log |f(-x)|] dx$$

$$- \text{Im} \left\{ \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi e^{i\theta} H(R e^{i\theta}) \log f(R e^{i\theta}) d\theta \right\} = \text{Im} \left\{ \sum_1^n \alpha_\nu h(\alpha_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(\beta_\mu) \right\};$$

$$\text{et } \frac{1}{2\pi} \int_0^R [H(x) \arg f(x) + H(-x) \arg f(-x)] dx$$

$$+ \text{Re} \left\{ \frac{R}{2\pi} \int_0^\pi e^{i\theta} H(R e^{i\theta}) \log f(R e^{i\theta}) d\theta \right\} = (N - P) h(R) - \text{Re} \left\{ \sum_1^n \alpha_\nu h(\alpha_\nu) - \sum_1^p \beta_\mu h(\beta_\mu) \right\},$$

$N$  et  $P$  y désignant respectivement le nombre des zéros et le nombre des pôles (chacun d'eux étant compté un nombre de fois égal à son ordre de multiplicité).

(Aus der französ. Zusammenfassg.)

**Dugué, Daniel:** Sur les valeurs exceptionnelles de Julia et un problème qu'elles soulèvent. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 841—842 (1951).

L'A. énonce, pour les fonctions méromorphes, des propriétés des ensembles de valeurs exceptionnelles de Picard relatifs aux voisinages de plusieurs singularités. Il présume que des propriétés analogues sont vérifiées pour les valeurs exceptionnelles de Julia d'une fonction méromorphe dans tout le plan.

*Jacques Dufresnoy.*

**Sasaki, Yasuharu:** On the Hauptsehne of the region to which the unit-circle is mapped by the bounded function. Proc. Japan Acad. 27, 216—218 (1951).

Soit  $w = F(z)$  une fonction analytique univalente dans le cercle  $|z| < 1$ ,  $F(0) = 0$ ,  $F'(0) = 1$  et  $B$  le domaine parcouru par  $w$  lorsque  $z$  varie dans  $|z| < 1$ . Désignons par  $l$  la longueur d'une corde quelconque du domaine  $B$  passant par le point  $w = 0$ . On sait que  $l \geq 1$ . Dans le cas où  $F(z)$  est bornée,  $|F(z)| \leq M$ ,  $M \geq 1$ , l'A. prouve que  $l \geq 2M(M - \sqrt{M^2 - 1})$  et que l'égalité est atteinte pour certaines fonctions  $F(z)$ .

*F. Leja.*

**Ilieff, Ljubomir:** Über die Abschnitte der 3-symmetrischen schlichten Funktionen. C. r. Acad. Bulgare Sci., Sci. math. natur. 3, 9—11 und russische Zusammenfassg. 11—12 (1951).

Die Funktion  $f_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \dots$  sei für  $|z| < 1$   $k$ -symmetrisch, schlicht und regulär. Der  $(n+1)$ -te Abschnitt von  $f_k(z)$  sei  $\sigma_n^{(k)}(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + \dots + a_n^{(k)} z^{nk+1}$ . Verf. hat früher bewiesen, daß  $\sigma_n^{(2)}(z)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) im Kreise  $|z| < 1/\sqrt{3}$  schlicht ist. Jetzt beweist er, daß  $\sigma_n^{(3)}(z)$  für  $n = 1$  und  $n > 4$  im Kreise  $|z| < \sqrt[3]{3}/2$  schlicht ist.

*Kaarlo Veikko Paatero.*

**Tehen-Yang, Vincent Ou:** Valeurs déficientes d'une fonction algébroïde. C. r. Acad. Sci., Paris 232, 2073—2075 (1951).

Die vom Verf. als neu angezeigten Ergebnisse über die Wertverteilung algebraischer Funktionen  $f(x)$  sind in schärferer und allgemeinerer Gestalt schon 1930



vom Ref. in seiner Marburger Habilitationsschrift niedergelegt und veröffentlicht worden [Akad. Wiss. Wien, math. naturw. Kl., Anzeiger 68, 27—31 (1931) und J. reine angew. Math. 167, 198—220 (1931); dies. Zbl. 1, 147 und 3, 212]. Das gilt insbesondere für die Schätzung der Charakteristik nach unten auf Grund der Verzweigthheit  $N_{\mathfrak{X}}(r)$  der  $k$ -blättrigen Riemannschen Fläche  $\mathfrak{X}_r$ , auf welcher  $f(x)$  eindeutig ausgebreitet ist,  $N_{\mathfrak{X}}(r) \leq (2k - 2) T(r, f)$ ; hieraus konnten bei festgehaltenen  $\mathfrak{X}$  für die Klasse aller auf  $\mathfrak{X}$  eindeutigen Algebroiden Lückensätze gegeben werden (Funktionen mit Wachstum „unter“  $N_{\mathfrak{X}}(r)$  fehlen), während für stark wachsende  $T(r, f)$  die Defektschranke den Wert 2 nicht überschreiten kann. Nur bei solchen  $T$ , die in obiger Verzweigththeitsungleichung asymptotisch an der unteren Wachstumsgrenze bleiben, ist das Remoundossche  $2k$  als Defektschranke anzuerkennen und auch realisierbar. Das ist dem Verf. entgangen. Ebenso ist der allgemeine Beweis des II. Hauptsatzes von der Schätzung für  $T(r, f')$  nach beiden Seiten aus möglich, wie Ref. das zuerst 1929 (S. Ber. preuß. Akad. Wiss., phys. math. Kl. 1929. 592—608) gegeben hat. — Verf. geht statt dessen einen zunächst spezielleren und milder tragfähigen Weg, indem er  $f(x)$  in eine geeignete, linear polymorphe Funktion einsetzt; soweit er dies andeutet, erhält er daraus eine Verallgemeinerung des Schwarzschen Lemmas, ohne schon die Methodik von Frithjof Növanlinna [Acta math. 50, 159—188 (1927)] der Tragweite nach zu erreichen, die von Henrik L. Selberg [Math. Z. 31. 709—728 (1929)] für Algebroiden nutzbar gemacht ist.

Egon Ullrich.

**Röhrli, Helmut:** Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen. I. Math. Ann. 123, 53—75 (1951).

Die Grundlagen zu einer umfassenden Theorie der Differentialsysteme wurden in verschiedenen Arbeiten von R. König und H. Schmidt geschaffen. Sie gestatten die einheitliche Behandlung der meisten gebräuchlichen speziellen Funktionen. Das wesentliche Hilfsmittel bei diesen Untersuchungen ist die von R. König entwickelte Klassentheorie. Die vorliegende Arbeit schließt sich in ihrem Aufbau an die bekannten Methoden an, liefert jedoch wesentlich allgemeinere Ergebnisse. Insbesondere werden bei den Klassenfunktionen auch Unbestimmtheitsstellen in Form von exponentiellen Singularitäten zugelassen. Durch strikte Beachtung der Dualität zwischen Funktionen und Differentialen, sowie zwischen Klassen und komplementären Klassen wird eine sehr übersichtliche Darstellung erzielt. Verf. untersucht zunächst die arithmetischen Eigenschaften der Klasse. Es folgen die Behandlung der Elementarfunktionen und Elementardifferentiale von zwei Variablen, die Herleitung von Ableitungssätzen, Vertauschungstheoremen und Reduktionssätzen. Bei allen Untersuchungen treten offensichtliche Analogien zur Theorie der algebraischen Funktionen in Erscheinung. Hans-Joachim Kowalsky.

**Basoco, M. A.:** On a certain arithmetical identity related to the doubly periodic functions of the second and third kinds. Gaz. Mat., Lisboa 12, Nr. 50, 11—13 (1951).

Mit  $e^{\pi i \tau} = q$  werde für  $|q| < 1$

$$(1) \quad \sum_{h=-\infty}^{+\infty} q^{h^2} e^{-z i h v} \operatorname{ctg}(u - h \pi \tau) = \chi(u, v)$$

gesetzt und durch  $\vartheta_1$  die ungerade, durch  $\vartheta_3$  eine gerade elliptische Thetafunktion bezeichnet. Die Umordnung der Darstellung (1) nach steigenden Potenzen von  $q$  führt mit  $n = r^2 + t^2$  auf Summanden wie

$$q^n \sum_{r, t \geq 0} \sin[r x + (r - t) z]$$

so daß ein Vergleich der Beiwerte auf arithmetische Aussagen führt, wie sie erstmals durch Liouville bearbeitet und durch I. V. Uspensky auf finiter Grundlage bewiesen worden sind.

Wilhelm Maier.

**Apostol, T. M.: Remark on the Hurwitz zeta function.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 690—693 (1951).

Von M. Lerch [Acta math. **11**, 19—24 (1887)] wurde für

$$\Phi(x, a, s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{2\pi i n x} / (a + n)^s \quad \text{mit } 0 < a \leq 1, \operatorname{Re}(s) > 1 \quad \text{die Relation}$$

$$\Phi(x, a, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} [e^{\pi i (s/2 - 2ax)} \Phi(-a, x, s) + e^{\pi i (-s/2 + 2a(1-x))} \Phi(a, 1-x, s)]$$

(gültig für  $0 < x < 1$ ,  $0 < a \leq 1$ ) angegeben. Hiervon ausgehend leitet der Verf. die Funktionalgleichung der Hurwitzschen Zetafunktion, in die  $\Phi$  für alle

ganzzahligen  $x$  übergeht, her. Der Beweis geht davon aus, daß  $\sum_{t=1}^{k-1} \Phi\left(\frac{t}{k}, a, s\right)$  durch Hurwitzsche Zetafunktionen dargestellt werden kann. Heinz Unger.

**Tsuji, Masatsugu: On meromorphic functions with essential singularities of logarithmic capacity zero.** Tôhoku math. J., II. Ser. **3**, 1—6 (1951).

Mit  $M$  bezeichnet Verf. eine Massenbelegung, deren logarithmische Kapazität  $= 0$  sei.  $w(z)$  ist eine außerhalb  $M$  meromorphe eindeutige Funktion und  $\omega$  eine transzendente Singularität der inversen Funktion  $z(w)$  mit der Projektion in  $a_0$ .  $K: |w - a_0| < \rho$  sei eine Kreisscheibe und  $F_\rho$  ein zusammenhängendes Gebiet der Riemannschen Fläche, das  $\omega$  auf seiner Berandung enthalte. Indem man  $F_\rho$  auf  $\Delta$  in der  $z$ -Ebene abbildet ( $\tilde{\Delta} = \Delta + \text{Rand}$ ) werden über  $F_\rho$ ,  $\Delta$  und  $\tilde{\Delta}$  Sätze bewiesen, die als Verschärfungen von früheren Resultaten des Verf. sowie von Noshiro betrachtet werden können. Es wird bewiesen, daß  $F_\rho$  jeden Punkt über  $K$  unendlich oft überdeckt, ausgenommen eine Punktmenge der log. Kapazität 0. Weiter zeigt Verf., daß, wenn  $\tilde{\Delta}$  von endlichem Zusammenhang ist,  $F_\rho$  die Punkte von  $K$  unendlich oft überdeckt, mit Ausnahmen von höchstens 2 Werten. Dasselbe gilt für  $\Delta$ , wobei nur ein Ausnahmewert auftritt. — Zum Schluß verschärft Verf. noch ein in dieser Richtung von Julia aufgestelltes Theorem. — Zum Beweise werden vorwiegend potentialtheoretische Methoden verwendet sowie ein Überdeckungssatz von Ahlfors. H. P. Künzi.

**Tsuji, Masatsugu: Some theorems on open Riemann surfaces.** Nagoya math. J. **3**, 141—145 (1951).

It is shown that single-valued harmonic functions on a subdomain of a parabolic Riemann surface are uniquely determined by their values on the relative boundary (compact or not). The maximum principle remains valid. On every open Riemann surface there is a single-valued harmonic function whose only singularity is  $\log |z - z_0|$ . Leo Sario.

**Ohtsuka, Makoto: Dirichlet problems of Riemann surfaces and conformal mappings.** Nagoya math. J. **3**, 91—137 (1951).

The Perron-Brelot method is first discussed and some extensions of statements concerning subharmonic functions on Riemann surfaces given. A surface  $R$  is defined to be parabolic if there are no non-constant continuous subharmonic functions bounded above on  $R$ . Existence problems on open Riemann surfaces are then studied. Single-valued harmonic functions bounded near the ideal boundary and having prescribed singularities are constructed. The images of accessible boundary points of  $R$  in the map of the universal covering surface onto the unit circle are considered. Connections of ideal boundary components with parabolic and hyperbolic fixed points are found. The main part of the paper deals with the Dirichlet problem for subdomains  $D$  of  $R$  such that the transfinite kernel of  $R - D$  is not void, and for covering surfaces with relative boundary. Conformal mapping of a Riemann surface with a rectifiable boundary is investigated with respect to cluster sets, measurability, continuity of the mapping functions and correspondence of



null-sets. The number of different problems, notions and results considered in this paper is unusually large. (References to 71 papers of other authors are made.)

*Leo Sario.*

**Nevanlinna, Rolf:** Über den Gauß-Bonnetschen Satz. Festschr. Akad. Wiss. Göttingen 1951, math.-phys. Kl., 175—178 (1951).

The author re-establishes the generalized Gauss-Bonnet formula (Ahlfors, this Zbl. 17, 36) for Riemann domains with analytic boundary,  $K + 2\pi \sum (\nu - \mu) + \int d\tau = -2\pi \chi$ . Here  $K$  is the curvatura integra of the domain,  $2\pi (\nu - \mu)$  corresponds to the zeros and poles of the metric,  $d\tau$  is the differential of the geodesic total curvature of the boundary and  $\chi$  is the Euler characteristic. Some special metrics, closely related to Bergman's invariant metric [The kernel function and conformal mapping, New York 1950, p. 32; this Zbl. 40, 190], are considered. The formula is then interpreted as an integral formula for Abelian differentials. These results are published by the author also in his paper [Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A. I Nr. 100, 1—11 (1951)].

*Leo Sario.*

**Fourès, Léonce:** Sur la théorie des surfaces de Riemann. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 1—64 (1951).

This thesis is concerned with three subjects: 1. Bieberbach's theory of welding (Verschmelzung, raccordement), 2. topological trees of certain covering surfaces, 3. division of a Riemann surface into sheets. — The method of welding was introduced by Bieberbach (Lehrbuch der Funktionentheorie II, 2d ed., Leipzig-Berlin 1931) to perform the uniformization by geometric methods, without using harmonic functions. The author deals with the following general welding problem: Let  $A, B$  be disjoint circular discs with subregions  $A', B'$  resp. in conformal correspondence  $\zeta = \varphi(z)$ . The problem is to determine functions  $w = f(z)$  and  $w = \varphi(\zeta)$ , meromorphic and univalent on  $A$  and  $B$ , coinciding at  $z \in A', \varphi(z) \in B'$  and taking different values at any other couple  $z \in A, \zeta \in B$ . The author performs the welding in a number of different cases, depending on the conformal configuration of  $A'$  and  $B'$ . Boundary relations are thoroughly investigated. A second kind of welding is treated. In the proofs, use is made of Montel's normal families and Bieberbach's distortion theorem. The results are applied to overlapping regions on abstract Riemann surfaces which are defined by parameter discs. The classical uniformization theorems are reproved. Covering surfaces, defined axiomatically, are studied in the special case with branch points over a finite number of projection points on the complex plane. In the class of regularly branched topological trees, a subclass is characterized where each surface, represented by the three, is a covering surface of another surface. Finally, the domain of univalence of the inverse function of the uniformizer of a simply connected Riemann surface is studied. A method is indicated which consists of embedding the transcendental singularities in domains of decreasing diameters.

*Leo Sario.*

**Noshiro, Kiyoshi:** Open Riemann surface with null boundary. Nagoya math. J. 3, 73—79 (1951).

Consider an arbitrary Riemann surface  $F$  and its exhaustion  $\{F_n\}$ . In  $F_{n+1} - F_n$ , let  $x$  be the harmonic function with constant values 0 and  $\log \sigma_n$  on the boundaries  $\beta_n$  and  $\beta_{n+1}$  of  $F_n$  and  $F_{n+1}$  respectively, such that  $\int_{\beta_n} d\bar{x} = 2\pi$ . It was proved by the reviewer (this Zbl. 35, 50) that, if there exists an exhaustion  $\{F_n\}$  with  $\Pi \sigma_n = \infty$ , then  $F$  is of parabolic type. The author shows, by two lemmas, that this condition is also necessary. [The same result was, slightly later, found also by T. Kuroda, Tôhoku Math. J., II. Ser. 3, 182—186 (1951)]. It is further shown that the parabolic surfaces have Gross' property and can be regularly exhausted. Some relations concerning the distribution of values are given. The results remain valid for quasi-analytic functions.

*Leo Sario.*

**Heins, Maurice:** Interior mapping of an orientable surface into  $S^2$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 951—952 (1951).

Verf. gibt einen sehr einfachen Beweis eines Satzes, welchen Ref. in seinen „Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques“, Paris 1938, Seite 78 (dies. Zbl. 17, 378) durch einen nicht ganz durchgeführten Beweis festgestellt hat. Es handelt sich darum, jede gegebene orientierbare Fläche als

Riemannsche Überlagerung der zweidimensionalen Sphäre darzustellen. Verf. zeigt etwas mehr, nämlich daß man die Überlagerung so wählen kann, daß die Verzweigungspunkte nur über drei Punkte der Sphäre fallen. *Simion Stoilow.*

**Huber, Heinz:** Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebiete. *Compositio math.* **9**, 161—168 (1951).

Désignons par  $R$  un domaine ouvert et borné, doublement connexe, par  $M$  son module (logarithme du rapport des rayons d'une couronne circulaire de centre  $z = 0$  sur laquelle  $R$  est représenté conformément). Si  $f(z)$  est une fonction analytique régulière dans  $R_1$  et dont les valeurs sont dans  $R_2$ , désignons par  $2\pi j$  la variation de  $\arg. f(z)$  quand  $z$  décrit, en sens direct, dans  $R_1$  une courbe simple fermée entourant le continu frontière intérieur de  $R_1$  et soit  $H_j$  l'ensemble des  $f$  ayant le même indice  $j$ . — L'A. démontre que, pour  $R_1$  et  $R_2$  donnés, l'ensemble des fonctions  $f$  se décompose en classes d'homotopie correspondant biunivoquement aux valeurs de  $j$  telles que  $|j| < |M_2/M_1|$ . Si, de plus,  $M_2/M_1 = m$  est un entier, les classes correspondant à  $j = \pm m$  se confondent, respectivement, avec les ensembles des représentations conformes (directes ou inverses) de  $R_1$  sur la surface recouvrant  $m$  fois, sans ramification, le domaine  $R_2$ . La démonstration se fait pour le cas de deux couronnes circulaires, auquel se réduit, par représentation conforme, le cas général.

*Simion Stoilow.*

**Lelong-Ferrand, Jacqueline:** Sur une classe de représentations canoniques. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 544—546 (1951).

Anwendung der „preholomorphen“ Funktionen [Verf. (J. Ferrand) *Bull. Sci. Math.*, **68**, 152—180 (1944)] auf die konforme Abbildung eines beliebigen Bereiches auf einen kanonischen Bereich (Rechteck mit Schlitten parallel zu einer Seite). Die Methode beruht auf dem Minimumprinzip von Hilbert und liefert eine Näherungsmethode durch Lösen eines linearen Gleichungssystems.

*Adolf Kriszten.*

**Specht, E. J.:** Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. *Trans. Amer. math. Soc.* **71**, 183—196 (1951).

Nach Marchenko gilt für die Funktion  $f(z)$ , die das Innere des Einheitskreises unter der üblichen Normierung  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) > 0$  auf das Innere der sternigen Jordankurve mit der Polargleichung  $\varrho = \varrho(\varphi)$  abbildet, eine Abschätzung  $|f(z) - z| \leq K\varepsilon$  für  $|z| \leq 1$ , sofern  $1 \leq \varrho \leq 1 + \varepsilon$  ist und  $\varrho(\varphi)$  einer Lipschitzbedingung genügt; wird dabei die Lipschitzkonstante mit  $M\varepsilon$  bezeichnet, so hängt  $K$  nur von  $M$  ab. Verf. macht über die Jordankurve schärfere Voraussetzungen und kann die Existenz höherer Ableitungen von  $f(z)$  am Rande beweisen und diese Ableitungen abschätzen. Vorausgesetzt wird etwa  $n$ -malige stetige Differenzierbarkeit von  $\varrho(\varphi)$ , Kleinheit der zweiten Ableitung von  $\log \varrho$  nach  $\varphi$  und Kleinheit des

Integrals 
$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\omega^{(n-1)}(\varphi) - \omega^{(n-1)}(\varphi_0)}{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)} \right| d\varphi$$
 mit  $\omega(\varphi) = -\arctan \varrho'/\varrho$ . Dann folgt

die Stetigkeit von  $f^{(n)}(z)$  am Rande sowie eine Abschätzung für diese Ableitung.

*Walter Brödel.*

**Meschkowski, Herbert:** Beziehungen zwischen den Normalabbildungsfunktionen der Theorie der konformen Abbildung. *Math. Z.* **55**, 114—124 (1951).

Es seien  $A(z, u)$  und  $B(z, u)$  die Funktionen, die den gegebenen Bereich  $D$  mit dem Rande  $C = \sum_{i=1}^n C_i$  auf einen Parallelschlitzbereich mit Schlitten parallel zur reellen bzw. imaginären Achse so abbilden, daß  $u \in D$  in  $\infty$  übergeht (mit dem Residuum 1).  $\omega_i(z)$  sei das harmonische Maß der Randkomponente  $C_i$ ,  $\bar{\omega}_i(z)$  die konjugierte Potentialfunktion. Verf. gibt die Darstellungen der Normalabbildungs-



funktionen durch die Funktionen  $M(z, u) = \frac{1}{2}(A(z, u) + B(z, u))$ ,  $N(z, u) = \frac{1}{2}(A(z, u) - B(z, u))$ ,  $w_i(z) = \omega_i(z) + i \omega_{\bar{i}}(z)$ . Verf. behandelt zuerst den Fall, daß  $D$  so auf einen Radialschlitzbereich abgebildet wird, daß  $z_1 \in D$  in  $0$ ,  $z_2 \in D$  in  $\infty$  übergeht (mit dem Residuum 1). Weiter wird der Fall der Abbildung auf einen Kreisschlitzbereich, auf das Innere des Einheitskreises und auf einen Vollkreisbereich erledigt.

*Jerzy Gorski.*

**Behnke, Heinrich und Karl Stein: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete.** Math. Ann. 124, 1—16 (1951).

Die nächstliegende Übertragung des Begriffes der (abstrakten) Riemannschen Fläche in die Funktionentheorie von mehreren Variablen führt zu dem Begriff der  $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit: das sind Hausdorffsche Räume mit abzählbarer Basis, deren Punkte  $2n$ -dimensionale, euklidische, mit komplexen Koordinaten  $(z_1, \dots, z_n)$ ,  $(z'_1, \dots, z'_n) \dots$  so versehene Umgebungen besitzen, daß die bei Koinzidenz entstehenden Koordinatentransformationen komplex analytisch sind. Aber dieser Begriff ist noch zu speziell, um für die Zwecke der Funktionentheorie brauchbar zu sein; denn bei der natürlichen Topologisierung der Menge der Funktionselemente, die durch analytische Fortsetzung eines regulären Elementes entstehen, treten im allgemeinen Punkte auf, die sich nicht topologisch, geschweige denn analytisch, lokal uniformisieren lassen, d. h. deren Umgebungen nicht mit euklidischen Umgebungen homöomorph sind (Beispiel: die Funktion  $|z_1 \cdot z_2|$  an der Stelle  $z_1 = z_2 = 0$ ). Dieser Umstand zwingt zu einer Verallgemeinerung des Begriffes der komplexen Mannigfaltigkeit; eine solche, übrigens nicht einfache Verallgemeinerung wird in einem vorbereitenden Teil der vorliegenden Arbeit durchgeführt; die Räume, zu denen man gelangt, und die als „Riemannsche Gebiete“ bezeichnet werden, sind spezielle Pseudomannigfaltigkeiten, in spezieller Weise mit komplex-analytischen Strukturen versehen; durch Weglassung der singulären Punkte entstehen komplexe Mannigfaltigkeiten. Begriffe wie „reguläre Funktion“, „analytisches Gebilde“ (lokal durch analytische Gleichungen definiert) usw. haben in den Riemannschen Gebieten einen natürlichen Sinn. [Das Wort „Gebiet“ bezeichnet hier also nicht, wie sonst allgemein üblich, den bekannten Relativbegriff in bezug auf einen umfassenden Raum (eine offene zusammenhängende Teilmenge), sondern einen selbständigen Raum.] — Unter einer „Modifikation“ einer  $2n$ -dimensionalen komplexen Mannigfaltigkeit oder, allgemeiner, eines Riemannschen Gebietes  $G^{2n}$  soll der Prozeß verstanden werden, der sich ungefähr folgendermaßen beschreiben läßt und der leicht zu präzisieren ist: man nimmt aus  $G^{2n}$  eine abgeschlossene Menge  $N$  heraus und setzt in das entstandene Loch eine andere Menge  $N^*$  so ein, daß, ohne daß an der komplexen Struktur von  $G^{2n} - N$  etwas geändert wird, ein neues Riemannsches Gebiet  $*G^{2n} = (G^{2n} - N) + N^*$  entsteht. Z. B. kann man, wenn  $N$  ein gewöhnlicher Punkt ist, für  $N^*$  das Bündel der komplexen Linienelemente in  $N$ , also einen projektiven Raum der komplexen Dimension  $n-1$  nehmen (für  $n=2$  also eine komplexe projektive Gerade, d. h. eine reelle Kugelfläche). Für  $n=1$ , also für Riemannsche Flächen, liefert diese spezielle Modifikation nichts Neues, da dann auch  $N^*$  ein Punkt ist, und es ist nicht schwer, zu zeigen, daß dies für  $n=1$  so sein muß: es gibt, wenn  $n=1$  und  $N$  ein Punkt ist, nur die triviale Modifikation, bei der auch  $N^*$  ein Punkt ist und also alles beim Alten bleibt; diese Tatsache ist der einfachste Spezialfall des Satzes, der das Ziel der Arbeit ist; Satz: „Ist (bei beliebigem  $n$ ) die Menge  $N$  kompakt und existiert in einer Umgebung  $U$  von  $N$  eine reguläre Funktion  $f$ , die überall auf  $N$ , aber nicht überall in  $U$  verschwindet, so besteht  $N^*$  aus Stücken eines analytischen Gebildes in  $*G^{2n}$ .“ — Der Satz ist eine leichte Folge aus dem nachstehenden Satz 1, der den eigentlichen Kern der Arbeit bildet: „In dem echten Teilgebiet  $G'$  des Riemannschen Gebietes  $G^{2n}$  sei  $f$  eine reguläre Funktion, deren Werte bei Annäherung an den Rand  $R'$  von  $G'$  gegen 0 streben; dann ist  $f$  in ganz  $G^{2n}$  hinein regulär fortsetzbar. Es ist also entweder  $f=0$ , oder  $R'$  gehört zu dem Nullstellengebilde einer nicht identisch verschwindenden regulären Funktion und ist daher höchstens  $(2n-2)$ -dimensional, woraus weiter folgt, daß  $G^{2n} = G' + R'$  ist.“ — Wenn  $n=1$ ,  $G^2$  eine schlichte Gebiet der  $z$ -Ebene und  $G'$  ein einfach zusammenhängendes echtes Teilgebiet von  $G^2$  ist, so ist  $R'$  eindimensional (da nulldimensionale Randstücke durch den einfachen Zusammenhang ausgeschlossen sind), also muß  $f=0$  sein; dieser Spezialfall des Satzes 1 ist ein Lemma von T. Radó [Math. Z. 20, 1—6 (1924)]. Das Lemma wird hier zunächst noch einmal bewiesen und dann zum Beweis des Satzes 1 für den Fall  $n=1$  mit schlichtem  $G^2$  benutzt; hieraus wird dann weiter die Gültigkeit des Satzes für beliebiges  $n$ , aber schlichte Teilgebiete  $G^{2n}$  des  $(z_1, \dots, z_n)$ -Zahlenraumes erschlossen; und daraus ergibt sich schließlich durch lokale Betrachtungen in der Nähe von  $R'$  der vollständige Satz.

*Heinz Hopf.*

**Hirzebruch, Friedrich: Über eine Klasse von einfach-zusammenhängenden komplexen Mannigfaltigkeiten.** Math. Ann. 124, 77—86 (1951).

Man sagt, daß zwei komplexe Mannigfaltigkeiten (zur Definition vgl. man das vorsteh. Referat) dieselbe komplexe Struktur haben, wenn man sie eineindeutig und beiderseits analytisch

aufeinander abbilden kann. In dieser Arbeit wird eine Reihe 4-dimensionaler, geschlossener, einfach zusammenhängender Mannigfaltigkeiten  $\Sigma_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , mit folgenden Eigenschaften konstruiert: Je zwei  $\Sigma_n$  haben verschiedene komplexe Strukturen, aber  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$  sind miteinander homöomorph (haben dieselbe topologische Struktur), wenn  $m \equiv n \pmod{2}$  ist. Insbesondere sind die  $\Sigma_n$  mit geradem  $n$  dem cartesischen Produkt  $S^2 \times S^2$  zweier Kugelflächen  $S^2$  homöomorph; dies darf darum als merkwürdig gelten, als die  $S^2$  selbst nur eine einzige komplexe Struktur gestattet (je zwei geschlossene Riemannsche Flächen vom Geschlecht 0 sind konform äquivalent). Die komplexe Struktur von  $\Sigma_0$  entsteht durch die natürliche Produktbildung aus derjenigen der  $S^2$ . Die Mannigfaltigkeit  $\Sigma_1$  erhält man durch eine „Modifikation“ (vgl. vorsteh. Referat) der komplexen projektiven  $(z_1:z_2:z_3)$ -Ebene  $P$ , indem man den Punkt  $(0:0:1)$  in geeigneter Weise durch das Bündel der in ihm sitzenden komplexen Linienelemente, also durch eine projektive komplexe Gerade (eine reelle Kugelfläche) ersetzt;  $\Sigma_1$  kann als Riemannsche Fläche der Funktion  $f_1 = z_1 \cdot z_2^{-1}$  gelten, da durch Übergang von  $P$  zu  $\Sigma_1$  die Singularität von  $f_1$  beseitigt wird. Die  $\Sigma_n$  mit  $n > 1$  sind definiert als die Riemannschen Flächen der

Funktionen  $f_n = \sqrt[n]{f_1}$ , die in übersichtlicher Weise über  $\Sigma_1$ , und damit über  $P$ , liegen. Die Verschiedenheit der komplexen Strukturen von  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$ ,  $m \neq n$ , wird durch Betrachtung der Schnittzahlen 2-dimensionaler Zyklen in diesen Mannigfaltigkeiten unter Benutzung der Tatsache gezeigt, daß für analytische Zyklen die Schnittzahlen nie negativ sind. Die Nicht-Homöomorphie von  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$ ,  $m \neq n \pmod{2}$ , folgt aus der Nicht-Isomorphie der Schnittringe; die Homöomorphie von  $\Sigma_m$  und  $\Sigma_n$  für  $m \equiv n \pmod{2}$  wird durch direkte Konstruktion topologischer Abbildungen nachgewiesen. Es wird ferner gezeigt, daß die komplexen Strukturen aller  $\Sigma_n$  auf gewissen Regelflächen im projektiven Raum realisiert werden, welche untereinander (und mit der Ebene  $P$ ) birational äquivalent sind. — Die  $\Sigma_n$  besitzen komplex-analytische Faserungen, wobei sowohl die Fasern als auch die Basen mit Kugelflächen homöomorph sind; ihre Betrachtung ist daher auch instruktiv für die, noch recht ungeklärte Theorie der komplexen Faserungen.

Heinz Hopf.

**Springer, George:** Pseudoconformal transformations onto circular domains. Duke math. J. 18, 411—424 (1951).

St. Bergman hat in einer Reihe von Abhandlungen [Math. Ann. 102, 430—446 (1929); ferner dies. Zbl. 36, 51—52] Repräsentantenbereiche schlichter Gebiete im Raume zweier komplexer Veränderlicher untersucht und die Frage gestellt, wann ein vorgegebenes Gebiet auf einen vorgegebenen Repräsentantenbereich analytisch abbildbar ist. In der vorliegenden Arbeit werden weitere Beiträge zu dieser Frage gegeben. Die vom Verf. betrachteten Repräsentantenbereiche sind spezielle Reinhardtsche Körper  $\mathfrak{K}$ , deren Rand eine besondere Darstellung gestattet. Wesentlich ist das Verhalten der pseudokonformen Invariante

$$I_{\mathfrak{K}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = K_{\mathfrak{K}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) / (T_{1,\bar{1}} T_{2,\bar{2}} - |T_{1,\bar{2}}|^2),$$

wo  $K_{\mathfrak{K}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$  die Bergmansche Kernfunktion von  $\mathfrak{K}$  ist und

$$T_{m,\bar{n}} = \partial^2 \log K_{\mathfrak{K}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) / \partial z_m \partial \bar{z}_n.$$

In den betrachteten Fällen ist der Mittelpunkt  $M$  von  $\mathfrak{K}$  als stationärer Punkt besonderer Art von  $I_{\mathfrak{K}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$  ausgezeichnet. Damit sich das Gebiet  $\mathfrak{G}$  auf  $\mathfrak{K}$  analytisch abbilden läßt, muß  $I_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$  notwendig einen einzigen Punkt  $P$  entsprechenden stationären Verhaltens in  $\mathfrak{G}$  besitzen. Ist die Abbildung möglich, so ist  $P$  das Urbild von  $M$ , und die Abbildungsfunktionen lassen sich nach Bergman durch Extremaleigenschaften kennzeichnen und explizit bestimmen. Verf. zeigt ferner, wie aus dem Verhalten von  $I_{\mathfrak{G}}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)$  Schlüsse auf Verzerrungseigenschaften analytischer Abbildungen von  $\mathfrak{G}$  gezogen werden können, wenn  $\mathfrak{G}$  gewisse spezielle Reinhardtsche Körper als innere und äußere Vergleichsgebiete besitzt.

Karl Stein.

**Oka, Kiyoshi:** Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII. Lemme fondamental. J. math. Soc. Japan 3, 204—214 (1951).

Verf. hatte früher (dies. Zbl. 36, 52) den Begriff des regulären Ideals mit unbestimmten Gebieten eingeführt und in besonderen Fällen die Existenz lokaler Pseudobasen bewiesen. Diese Begriffe und Ergebnisse stehen in engem Zusammenhang mit der von H. Cartan (dies. Zbl. 24, 233; 35, 171; 38, 237) entwickelten Theorie der Ideale und Moduln analytischer Funktionen. Einem regu-



lären Ideal  $I$  mit unbestimmten Gebieten entspricht ein Idealbündel  $I^*$  im Sinne von H. Cartan, und die Existenz einer lokalen Pseudobasis zu  $I$  im Punkte  $P$  ist mit der Kohärenz von  $I^*$  in  $P$  äquivalent. — In der vorliegenden Arbeit führt Verf. den Begriff der Projektion  $J$  eines Ideals  $I$  mit unbestimmten Gebieten im Raume  $R^{2(n+m)}$  der komplexen Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$  auf den Raum  $R^{2n}$  der Veränderlichen  $x_1, \dots, x_n$  ein.  $J$  ist ein Ideal mit unbestimmten Gebieten im  $R^{2n}$ ; es enthält solche Funktionen  $f$ , die zu  $I$  gehören, aber nur von den Variablen  $x_1, \dots, x_n$  abhängen, wobei die  $f$  jeweils in geeignet zu erklärenden Gebieten zu betrachten sind. Unter einer besonderen (jedoch nicht wesentlich einschränkenden) Voraussetzung über  $I$  wird sodann bewiesen: Besitzt  $I$  lokale Pseudobasen, so besitzt auch die Projektion  $J$  lokale Pseudobasen. *Karl Stein.*

### Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Fischer, Wilhelm: On Dedekind's function  $\eta(\tau)$ . Pacific J. Math. 1, 83—95 (1951).

Für die Dedekindsche Modulfunktion  $\eta(\tau) = \exp \left\{ \frac{\pi i \tau}{12} \right\} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - \exp \{2\pi i m \tau\}) = \sqrt[24]{\Delta(\tau)}$  gilt bei Modulsstitutionen die Transformationsformel

$$\eta \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right) = \varepsilon \sqrt{-i(c\tau + d)} \eta(\tau); \quad c \geq 0, \Re(\sqrt{-i(c\tau + d)}) > 0.$$

Dabei bezeichnet  $\varepsilon$  eine gewisse, durch die Substitutionsmatrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  eindeutig bestimmte 24-ste Einheitswurzel. Die genaue Kenntnis von  $\varepsilon$  ist u. a. bekanntlich in der von Hardy-Ramanujan begründeten analytischen Theorie der partitionum von großer Bedeutung. — Verf. leistet diese explizite Bestimmung von  $\varepsilon$  in Abhängigkeit von den Koeffizienten  $a, b, c, d$  durch Zurückgehen auf die bekannte Eulersche Reihendarstellung

$$\eta(\tau) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\infty} (-1)^{\lambda} \exp \left\{ \frac{2\pi i \tau}{24} (\lambda - 1)^2 \right\}.$$

Die Anwendung der Thetatransformationsformel auf die transformierte Reihe für  $\eta \left( \frac{a\tau + b}{c\tau + d} \right)$  liefert nach einigen Rechnungen für  $\varepsilon$  eine Darstellung durch Gaußsche Summen und damit dann auch, nach Eintragung der bekannten Werte für diese Summen, die explizite Formel für  $\varepsilon$  als 24-ste Einheitswurzel selbst. — Diese Art der Bestimmung von  $\varepsilon$  ist jedoch keineswegs neu. Sie findet sich bereits bei Th. Molien, der auf methodisch gleichem, dabei formal durchsichtigerem Wege den expliziten Wert von  $\varepsilon$  ermittelt [Berichte sächs. Ges. Wiss. Leipzig 37, 25—38 (1885)]; s. auch H. Rademacher, dies. Zbl 3, 351 und E. Hecke, Math. Ann. 119, 266—287 (1944). — Druckfehler: S. 92, Zeile 4 v. o. lies (2.91); S. 93, Z. 3 v. u. lies (3.73); S. 94, Z. 2 v. u.

lies  $\eta(\tau + 1) = \exp \left\{ \frac{\pi i}{12} \right\} \eta(\tau)$ ; S. 95, Z. 1 v. o. lies  $\eta(\tau^*) = \varepsilon^* \sqrt{-i(c\tau + d)} \eta(\tau)$  —

$\exp \left\{ \frac{\pi i}{12} \right\} \eta(\tau') = \exp \left\{ \frac{\pi i}{12} \right\} \varepsilon \sqrt{-i(c\tau + d)} \eta(\tau)$ ; S. 95, Z. 2 v. o. lies  $\varepsilon = \exp \left\{ -\frac{\pi i}{12} \right\} \varepsilon^*$ ; S. 95,

Z. 5 v. o. lies (4.4); S. 95, Z. 8 v. o. in Formel (4.6) lies  $a \frac{c_1 - c}{4}$ ; S. 95, Z. 12 v. o. lies pp. 146—187;

S. 95, Z. 12 v. u. lies independent. — Ferner: Die auf S. 94, Zeile 7 v. u. ausgesprochene und dann auf S. 95, Zeile 3/4 v. o. wiederholte Behauptung der Allgemeingültigkeit von Formel (4.4) ist nicht stichhaltig, somit auch die Endformel (4.6) nur bedingt richtig. Der Ausnahmefall  $c$  gerade,  $b$  ungerade wird durch (4.6) nicht erfaßt. *Curt Meyer.*

Jessen, Borge: Mean motions and almost periodic functions. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 76—92 (1951).

Eine klare und bündige Übersicht der Theorie der mittleren Bewegung. Hat eine Bohrsche fastperiodische (fp.) Funktion  $F(t)$  einen stetigen und in der Form (\*)  $\arg F(t) = ct + o(t)$  darstellbaren Argumentzweig, so heißt  $c$  die mittlere Bewegung von  $F(t)$ . Für  $F(t) = \sum_{n=1}^N a_n e^{i\lambda_n t}$

rührt die Frage nach der Existenz der mittleren Bewegung von Lagrange her und wurde in vollem Umfang erst vom Verf. bejahend beantwortet. (\*) gilt auch immer, wenn  $\inf |F(t)| > 0$ . — Ausführlicher werden in dieser Hinsicht die analytischen fp. Funktionen behandelt. Für eine im Streifen  $(\alpha < \sigma < \beta)$  holomorphe und fp. Funktion  $f(s) = f(\sigma + it)$  ist das Problem der mittleren Bewegung auf Vertikalgeraden eng mit der Frage über die Häufigkeit

der Wurzeln in Vertikalstreifen verknüpft: ist die (immer vorhandene) zu  $f(s)$  gehörende konvexe sog. Jensensche Funktion  $\varphi(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \log |f(\sigma + it)| dt$  für ein  $\sigma_0$  differenzierbar, so ist  $\varphi'(\sigma_0)$  die mittlere Bewegung von  $f(\sigma_0 + it)$ ; existieren  $\varphi'(\sigma_1)$  und  $\varphi'(\sigma_2)$  ( $\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta$ ) und bedeutet  $N(T)$  die Anzahl der Wurzeln von  $f(s)$  im Rechteck  $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ ,  $0 < t < T$ , so ist  $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N(T)}{T} = \frac{1}{2\pi} [\varphi'(\sigma_2) - \varphi'(\sigma_1)]$ . Es wird das Verhalten der mittleren Bewegung auf den Geraden  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  besprochen, falls  $\varphi'(\sigma_0)$  nicht existiert. Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen dafür aufgestellt, daß eine konvexe Funktion die Jensensche Funktion einer analytischen fp. Funktion sei. Ausgesondert wird eine Klasse analytischer fp. Funktionen, welche auf jeder Vertikalgeraden aus einem Streifen eine mittlere Bewegung und in jedem schmalen Vertikalstreifen eine bestimmte Häufigkeit der Wurzeln besitzen. Mittels dieser Methoden ergeben sich Verschärfungen früherer Resultate in bezug auf die Werte Verteilung der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion. — Verf. berücksichtigte Ergebnisse verschiedener Autoren, hauptsächlich diejenigen von H. Bohr, A. Wintner, H. Weyl, P. Hartman und seine eigenen. Die Beweise werden nicht ausführlich erbracht, wohl aber derart angedeutet, daß dem Leser ein Einblick in die Beweismethoden gewährt wird. Reichliche Literaturangaben. *S. Hartman.*

**Hunt, G. A.: Random Fourier transforms.** Trans. Amer. math. Soc. **71**, 38—69 (1951).

Man bilde mit zufällig gewählten Koeffizienten  $X_n$  die Reihe  $Z(t) = \sum_1^n X_n e^{i\lambda_n t}$  [d. h. man faßt die  $X_n$  als meßbare Funktionen  $X_n(\omega)$  der Elemente  $\omega$  eines Raumes  $\Omega$  auf, in dem ein Maß  $W$  mit  $W(\Omega) = 1$  erklärt ist. Bekanntlich ist  $E(X_n) = \int_{\Omega} X_n d\omega$  der Erwartungswert von  $X_n$ ]. Wir verlangen: 1. Die  $X_n$  seien voneinander unabhängig. 2. Es sei  $E(X_n) = 0$ . 3. Es sei  $\sum_1^{\infty} E(|X_n|^2) < +\infty$ . Gilt dann für die Exponenten  $1 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$  und gilt für die

Koeffizienten  $X_n$  statt 3. sogar  $\sum_1^{\infty} E(|X_n|^2) (\log \lambda_n)^{1+\varepsilon} < +\infty$  für irgendein  $\varepsilon > 0$ , dann konvergiert  $\sum_1^{\infty} X_n(\omega) e^{i\lambda_n t} = Z(t, \omega)$  gleichmäßig in jedem endlichen  $t$ -Intervall für fast jede

Wahl der  $X_n(\omega)$  (d. h. für fast alle  $\omega$ ). Es ist also  $Z(t, \omega)$  fast stets stetige Funktion von  $t$ . Sie ist fastperiodisch im Sinne von Besicovich ( $B^2$ -f. p.). Als Spezialfälle umfaßt dieser Satz einen Satz von Paley und Zygmund [Proc. Cambridge philos. Soc. **26**, 337—357, 458—474 (1930), **28**, 190—205 (1932); s. dies. Zbl. **6**, 198] bezüglich Reihen  $\sum \pm a_n e^{i\lambda_n t}$  mit zufällig gewählten Vorzeichen, sowie einen ähnlichen Satz von Jessen (dies. Zbl. **10**, 200), bei dem statt zufälligen Vorzeichen zufällige Faktoren vom Betrage 1 zugelassen sind. — Die beim Beweis benutzten Hilfsmittel stellen sich als geeignet heraus zum Beweis entsprechender Sätze über Fourierintegrale. Unter ähnlichen Voraussetzungen bez. der Funktionen  $X(\lambda, \omega)$  [wie im Falle der Reihen bez. der  $X_n(\omega)$ ] existiert für fast alle  $\omega$   $Z(t, \omega) = \int X(\lambda, \omega) e^{i\lambda t} d\lambda$  gleichmäßig in jedem endlichen  $t$ -Intervall und  $Z(t, \omega)$  ist für fast alle  $\omega$  stetige Funktion von  $t$ . Nimmt man an, daß  $X(\lambda, \omega)$  für fast alle  $\omega$  in jedem endlichen  $t$ -Intervall bis auf endlich viele Sprünge konstant ist, so ist  $Z(t, \omega)$  fastperiodisch. — Die weiteren Sätze geben u. a. Auskunft über das Maß der Stetigkeit der Funktionen  $Z(t, \omega)$  in Abhängigkeit vom Verhalten der  $X$  und über das Wachstum von  $Z(t, \omega)$  für  $t \rightarrow \infty$ . Bezüglich der weiteren Sätze (insgesamt 13) und Hilfssätze (insgesamt 17) verweise ich auf die Abhandlung. — Die Beweise sind z. T. lang und in einigen Fällen wird es dem Leser überlassen, Beweise vorangegangener Sätze neuen Gegebenheiten anzupassen. *Wilhelm Maak.*

**Métral, Paul: Définition des fonctions presque automorphes et presque  $\theta$ .** C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 1798—1800 (1951).

Fortsetzung einer Reihe von Noten (dies. Zbl. **34**, 247, **39**, 90), in denen Verf. Funktionen definiert, die „fast“ zu einer der klassischen Funktionenklassen gehören. Die vorliegende Note erscheint Ref. noch verworrener als die früher referierten. Resultate werden nicht angegeben. *Wilhelm Maak.*

### Gewöhnliche Differentialgleichungen. Differenzengleichungen:

**Gnanadoss, Adaikalam A.: Linear difference equations with periodic coefficients.** Proc. Amer. math. Soc. **2**, 699—703 (1951).



Bewiesen wird der Satz:  $u(x)$  sei eine in allen ganzzahligen  $x$  existierende Lösung der linearen Differenzengleichung  $n$ -ter Ordnung  $\sum_{v=0}^n a_v(x) u(x+v) = 0$ , in welcher die in allen ganzzahligen  $x$  definierten Funktionen  $a_v(x)$  periodisch mit der ganzzahligen Periode  $\omega$  sind:  $a_v(x+\omega) = a_v(x)$  ( $v = 0, 1, \dots, n$ ). Dann genügt  $u(x)$  zugleich der linearen Differenzengleichung (\*)  $\sum_{v=0}^n c_v u(x+v\omega) = 0$ , wobei die  $c_v$  geeignet gewählte Konstanten sind. — Dieses ist von T. Fort für einen Fall bei  $n = 2$  hergeleitet worden. Beim Beweis wird von geschickt gewählten linearen Transformationen  $n$ - bzw.  $\omega$ -dimensionaler Vektoren Gebrauch gemacht. — Zum Schluß wird gezeigt, daß die Lösungen von (\*) aus Gliedern der Art

$$\varrho^x x^j \left( A \cos \frac{2\pi j x}{\omega} + B \sin \frac{2\pi j x}{\omega} \right)$$

bestehen, wobei  $\varrho^\omega = z$  die Wurzeln der Gleichung  $\sum_{v=0}^n c_v z^v = 0$  und  $A$  sowie  $B$  willkürliche Konstanten sind;  $j$  nimmt alle ganzen Zahlen von 0 bis  $\omega - 1$  an und  $i$  durchläuft alle ganzen Zahlen von 0 bis  $p - 1$ , wobei  $p$  die Vielfachheit der jeweiligen Wurzel  $z$  ist.

Hans Töpfer.

● **Phillips, H. B.:** *Differential equations*. — 3rd ed., revised. New York: John Wiley and Sons, Inc.; London: Chapman and Hall, Ltd., 1951. VIII, 149 p. 24 s. net.

**Barbuti, Ugo:** Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive che non dipende dalla condizione di Lipschitz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 150—157 (1951).

Si, dans le domaine  $R$ :  $0 \leq x \leq a$ ,  $|y_i| < \infty$ , le système différentiel  $y'_i = F_i(x, y_1, \dots, y_m)$ ,  $i = 1, \dots, m$ , vérifie les conditions  $|F_i(x, y_1^1, \dots, y_m^1) - F_i(x, y_1^2, \dots, y_m^2)| \leq x^{-1} \max_i |y_1^1 - y_1^2|$ , les fonctions  $F_i$  étant toutes continues,

il admet une solution unique issue du point  $x = 0$ ,  $y_i = 0$ . L'A. prouve que les fonctions  $y_i$  de cette solution sont les limites uniformes des suites  $\{y_i^n\}$  définies par  $y_i^n = \int_0^x F_i(x, y_1^{n-1}, \dots, y_m^{n-1}) dx$ , où les  $y_i^0$  sont des fonctions continues

arbitraires définies dans  $R$ .

André Revuz.

**Karapandžić, Djordje:** Une remarque sur les intégrales singulières des équations différentielles ordinaires. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 65—69 und französ. Zusammenfassg. 69 (1951) [Serbisch].

Considérons une équation différentielle (1)  $f(x, y, y') = 0$  qui peut être transformée par une transformation de contact (2)  $x_1 = X(x, y, y')$ ,  $y_1 = Y(x, y, y')$ ,  $y'_1 = Y'(x, y, y')$  en équation (3)  $F(x_1, y_1, y'_1) = 0$  et dont l'intégrale générale est de la forme  $I(x_1, y_1, c) = 0$ ,  $c$  étant une constante d'intégration. Pour obtenir l'intégrale générale V. P. Ernakoff a formé le système

$$(I) \quad y_1 = y + \varphi - \psi x_1, \quad \frac{y_1^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{2} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + C, \quad \frac{\alpha x_1 + \beta}{y_1^n} = -\psi.$$

En éliminant  $x_1$  et  $y_1$  du système (I) on obtient l'intégrale générale de l'équation (1), la fonction  $H(x, y, c) = 0$ . L'A. montre que, pour obtenir l'intégrale singulière de l'équation (1), il suffit de former le système  $y_1 = y + \varphi - x_1 \psi$ ,  $-y_1^n \psi + \alpha x_1 + \beta = 0$ ,  $\alpha + n y_1^{n-1} \psi^2 = 0$ . Dans le cas où l'équation transformée (3) ne contient pas la dérivée  $y'_1$ , nous formons le système  $y_1 = y - \psi x_1$ ,  $y_1 + \ln x_1 + k = 0$ ,  $x_1^{-1} - \psi = 0$ , où  $y'_1$  doit s'exprimer au moyen des formules (2) en fonction de  $x, y, x_1, y_1$ .

Autoreferat.

**Miller, Kenneth S.:** Selfadjoint factorizations of differential operators. Proc. Amer. math. Soc. 2, 704—705 (1951).

Zerlegung von linearen Differentialoperatoren in Produkte selbstadjungierter Faktoren. Verf. beweist den folgenden Satz:  $L = p_0(x) \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + p_r(x)$  sei ein linearer Differentialoperator der Ordnung  $n = 2r$ . Die Ko-

effizienten  $p_i(x)$  seien  $(n-i)$ -mal stetig differenzierbar, und es sei  $p_0(x) > 0$  in einem abgeschlossenen endlichen Intervall  $[a, b]$ . Dann gibt es ein Teilintervall von  $[a, b]$  derart, daß  $L$  eine Zerlegung der Form  $L = f(x) P_1 \cdots P_r$  besitzt, wobei die  $P_\sigma$  selbstadjungierte Differentialoperatoren zweiter Ordnung sind. Die  $P_\sigma$  werden mittels vollständiger Induktion aus einem Fundamentalsystem von Lösungen von  $Lu = 0$  konstruiert.

*Hans-Joachim Kowalsky.*

**Sears, D. B.:** On the spectrum of a certain differential equation. J. London math. Soc. **26**, 205—210 (1951).

This paper describes various criteria for the discreteness of spectra belonging to eigenvalueproblems of  $(1) y'' + (\lambda - q(x)) y = 0$ , where  $q(x)$  is continuous for  $0 < x \leq b$ . In particular, the criterion due to Friedrichs (this Zbl. **35**, 344) is refined in the following way: (1) with usual boundary conditions has a discrete spectrum if  $q(x) + (4x^2)^{-1} > M$  holds for some constant  $M$  and all sufficiently small  $x$ . Some criteria for the limit circle case at  $x = 0$ , hence for discrete spectra, are also given.

*Göran Borg.*

**Kneser, Hellmuth:** Die Reihenentwicklung bei schwach singulären Stellen linearer Differentialgleichungen. Arch. der Math. **2**, 413—419 (1951).

Es wird ein System von Differentialgleichungen  $y'_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) y_j(x)$  ( $i = 1, \dots, N$ ) in der Umgebung einer schwach singulären Stelle  $x = a$  betrachtet, d. h. einer Stelle, wo  $a_{ij}(x)$  höchstens einfache Pole haben. Verf. gibt einen neuen Beweis des bekannten Satzes, daß es  $N$  linear unabhängige Lösungen des Systems gibt, die sich in der Umgebung der Stelle  $x = a$  in Reihen der Gestalt

$\sum_{m=0}^p \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} [\ln(x-a)]^m (x-a)^n$  entwickeln lassen. Die Rechnungen werden, gegenüber den früheren Beweisen, viel übersichtlicher zusammengefaßt. Im Abschnitt I der Arbeit werden einige Hilfssätze bewiesen, die eine Teilaussage von der Jordanschen Normalform der Umlaufsubstitution enthalten und die Existenz von Polynomvektoren feststellen, durch die eine Vektordifferentialgleichung gelöst wird. Auf Grund der Hilfssätze folgt im Abschnitt II die formale Herstellung der Reihen und im Abschnitt III der Beweis ihrer Konvergenz nach dem klassische Majorantenschema.

*Jacek Szarski.*

**Schäfke, Friedrich Wilhelm:** Zur Parameterabhängigkeit bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen mit singulären Stellen der Bestimmtheit. Math. Nachr. **6**, 45—50 (1951).

Author considers the differential equation  $Fy = \lambda G_1 y + \lambda^2 G_2 y + \cdots + \lambda^k G_k y$  where  $F, G_i$  are linear differential operators of orders  $n, m_i$  respectively ( $n > m_i$ ). The parameter  $\lambda$  does not appear in the indicial equation at a point  $a$ . The author, improving a result of Poincaré's, has previously shown that the solutions (corresponding to fixed initial conditions) and their derivatives are integral functions of order  $\rho$  not exceeding all the values  $i/(n - m_i)$ , when  $a$  is an ordinary point of the differential equation. This result is now extended to regular singularities. If a set of roots of the indicial equation differ by integers, the result is proved only for the solution corresponding to the largest index of that set. The relevance of this result to eigenwert problems is indicated by two examples.

*W. W. Sawyer.*

**Basov, V. P.:** Über die Lösungen einer Klasse von Systemen linearer Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 301—304 (1951) [Russisch].

Let

$$\begin{aligned} \dot{x}_s &= t^{-\alpha} \sum_{\sigma=1}^m r_{s\sigma} x_\sigma + t^\beta \sum_{\sigma=m+1}^n r_{s\sigma} x_\sigma \quad (s = 1, \dots, m) \\ &= t^{-\alpha} \sum_{\sigma=1}^m r_{s\sigma} x_\sigma + t^\beta \sum_{\sigma=m+1}^n (p_{s\sigma} + q_{s\sigma}) x_\sigma \quad (s = m+1, \dots, n). \end{aligned}$$



Assume:  $r_{s\sigma}, q_{s\sigma}$  continuous and bounded for  $t \geq T > 1$ ;  $q_{s\sigma} \rightarrow 0$  for  $t \rightarrow \infty$ ;  $p_{s\sigma}$  constants; the characteristic roots of the matrix  $(p_{s\sigma})$  have non-vanishing real parts;  $\alpha > 1$ ,  $\beta > -1$ . Then  $m$  independent solutions exist  $x_s = \delta_s^{(i)} + t^{1-\alpha} u_s^{(i)}$  ( $s = 1, \dots, m$ ),  $= t^{-\alpha-\beta} u_s^{(i)}$  ( $s = m+1, \dots, n$ ),  $i = 1, \dots, m$ , where  $\delta_s^{(i)}$  are the Kronecker deltas,  $u_s^{(i)}$  functions bounded for  $t \geq T$ . This theorem is applied to

the study of the system  $\dot{x}_s = \sum_{\sigma=1}^n (p_{s\sigma} + t^{-\gamma} q_{s\sigma}) x_\sigma$ , where  $\gamma > 0$  and  $p_{s\sigma}$  are constants,  $q_{s\sigma}$  real continuous functions bounded for  $t \geq T$ . To each real characteristic root of the matrix  $(p_{s\sigma})$  which is different from the real parts of the other roots corresponds a solution whose asymptotic behavior is described by means of several formulas, according to the range of values of  $\gamma$ . *José L. Massera.*

**Donskaja, L. I.:** Über die Struktur der Lösungen eines Systems von drei linearen Differentialgleichungen in der Umgebung des irregulären singulären Punktes  $t = \infty$ . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 321–324 (1951) [Russisch].

Asymptotic behavior of the solutions of the system  $\dot{X} = XP$ , where  $P = \sum_{m=0}^{\infty} P^{(m)} t^{-m}$ ,  $P^{(m)}$  constant matrices of the third order,  $X$  unknown matrix. The results are too complicated to be stated here. *José L. Massera.*

**Letov, A. M.:** Schranken für die kleinste charakteristische Zahl einer Klasse von regulierten Systemen. Priklad. Mat. Mech. **15**, 591–600 (1951) [Russisch].

Let  $\dot{\eta}_k = \sum_{\alpha=1}^n b_{k\alpha} \eta_\alpha + n_k \xi$ ,  $\dot{\xi} = f(\sigma)$ ,  $\sigma = \sum_{\alpha=1}^n p_\alpha \eta_\alpha - \xi$  be the equations of a controlled system where  $b_{k\alpha}$  are parameters of the regulated system and  $n_k, p_k$  parameters of the regulator;  $f(0) = 0$ ,  $\sigma f(\sigma) > 0$ . Bounds for the characteristic exponents are determined as the smallest and largest roots of a pair of algebraic equations of degree  $n+1$ . It is then possible to select the parameters  $p_k$  so that the lower bound be as large as possible. *José L. Massera.*

**Krejn, M. G.:** Über einige Probleme zum Maximum und Minimum der charakteristischen Zahlen und über die Ljapunovschen Stabilitätszonen. Priklad. Mat. Mech. **15**, 323–348 (1951) [Russisch].

Let  $E(M, H, l)$  denote the class of functions  $\varrho(x)$  ( $0 \leq x \leq l$ ) satisfying the conditions  $0 \leq \varrho(x) \leq H$ ,  $\int_0^l \varrho(x) dx = M$ , where  $0 < M \leq Hl$ . Let  $\lambda_n(\varrho)$  denote the  $n$ -th characteristic number of the problem  $y'' + \lambda \varrho(x) y = 0$ , with  $y(0) = y(l) = 0$ ; the  $\lambda_n(\varrho)$  may be interpreted in terms of the frequencies of a stretched string with mass-distribution  $\varrho(x)$ . In §§ 1–3 of this work the author finds precise upper and lower bounds for  $\lambda_n(\varrho)$  for  $\varrho \in E(M, H, l)$ , in fact

$$\max \lambda_n(\varrho) = \frac{\pi^2}{M d} n^2, \quad \min \lambda_n(\varrho) = \frac{4 n^2}{M d} \chi\left(\frac{d}{l}\right)$$

where  $d = MH^{-1}$  and  $\chi(t)$  is defined for  $0 \leq t \leq 1$  as the least positive root of  $\sqrt{\chi} \tanh \sqrt{\chi} = t(1-t)$ . The actual  $\varrho(x)$  for which these extrema are attained are also given. In the case  $H = \infty$  the lower bound was already known (I. M. Rapoport, this Zbl. **41**, 57). § 4 gives without proof results for the case when  $\varrho(x)$  is also bounded positively from below, and discusses other generalisations. § 5 uses the previous results to obtain approximations to  $\lambda_1(\varrho)$  involving the moment of inertia of the string. Finally he uses his bounds for characteristic values to sharpen results of G. Borg (this Zbl. **31**, 306) and others on Liapounoff zones of stability. *Frederick V. Atkinson.*

• **Myškis, A. D.:** Lineare Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. (Moderne Probleme der Mathematik.). Moskau-Leningrad: Staatsverlag für technisch-theoretische Literatur 1951. 255 S. R. 8,80 [Russisch].

Il s'agit d'une monographie, où l'A. reprend en partie les résultats qu'il a

publiés dans divers périodiques (voir ce Zbl. 35, 178—179). — Dans le cas d'une équation du premier ordre déjà, on peut envisager des retards „localisés“, c. à d. une équation  $y'(x) = \sum a_k(x) y(x - \alpha_k(x)) + f(x)$ , mais aussi plus généralement des retards „distribués“, d'où une équation de la forme  $y'(x) = \int_{s=0}^{+\infty} y(x-s) dr(x, s)$

+  $f(x)$ ; ces équations, et les systèmes d'équations de cette nature, se rencontrent dans d'importantes applications (réglages automatiques). — L'A. établit des théorèmes d'existence et d'unicité (avec conditions initiales); il étudie, dans diverses conditions, le comportement asymptotique des intégrales. L'ouvrage est clairement écrit, il contribuera heureusement à faire connaître certains aspects de cet intéressant domaine de l'analyse. —

Table des matières: Chap. 1. Propriétés générales des équations différentielles avec argument retardé. Ch. 2. Propriétés générales des solutions des équations du 1-er ordre. Ch. 3. Equations linéaires homogènes du 1-er ordre, type instable. Ch. 4. Equations linéaires homogènes du 1-er ordre, type stable. Ch. 5. Equation linéaire homogène du 2-ème ordre, type non-périodique. Appendice 1. Fonctions à variation bornée et intégrale de Stieltjes. App. 2. Quelques inégalités à propos de l'intégrale de Stieltjes. App. 3. Suites récurrentes. App. 4. Equation différentielle linéaire générale à coefficients et retards constants. Bibliographie. *Charles Blanc.*

Esipovič, E. M.: Über die Stabilität der Lösungen einer Klasse von Differentialgleichungen mit retardiertem Argument. Priklad. Mat. Mech. 15, 601—608 (1951) [Russisch].

The solutions of a linear homogeneous differential equation with constant coefficients and retarded argument are stable if the roots of an equation of the form  $a_0 z^k + \dots + a_k + (b_0 z^l + \dots + b_l) e^{-z} = 0$  have negative real parts. The author corrects and extends a formula by Svirskii (Izvestiya Kazanskogo Filiala AN SSSR, Seriya Fiz.-Mat. i Tehn., 1948) giving the number of roots which lie in the halfplane  $x \geq 0$ . Under certain assumptions he derives a method to find a  $\delta > 0$  such that the strip  $-\delta \leq x \leq 0$  contains no roots, which gives an estimate for the degree of damping of the solutions. *José L. Massera.*

Malkin, I. G.: Lösung einiger kritischer Fälle des Problems der Stabilität einer Bewegung. Priklad. Mat. Mech. 15, 575—590 (1951) [Russisch].

L'A. résout le problème de la stabilité des solutions d'un système différentiel dans deux cas singuliers: 1) cas où l'équation caractéristique — de degré  $n + 4$  — admet  $n$  racines à parties réelles négatives et deux couples de racines imaginaires pures:  $\pm \lambda_1 i$ ,  $\pm \lambda_2 i$  ( $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont réels et leur quotient est irrationnel), 2) cas où l'équation caractéristique, de degré  $n + 3$ , admet  $n$  racines à parties imaginaires négatives, une racine nulle et un couple de racines  $\pm \lambda_1 i$  ( $\lambda_1$  est réel). — Le même problème est étudié dans le cas des mouvements périodiques. Deux exemples illustrent la théorie. *Julien Kravtchenko.*

Antosiewicz, H. A.: A note on asymptotic stability. Quart. appl. Math. 9, 317—319 (1951).

Gegeben sei das Differentialgleichungssystem  $d\mathbf{x}/dt = A(t)\mathbf{x}$ , in welchem alle Elemente der Matrix  $A(t) \equiv (a_{ij}(t))$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) reelle, stetige und für alle positiven  $t \geq t_0$  gleichmäßig beschränkte Funktionen sind.  $\lambda_1(t)$  bzw.  $\lambda_2(t)$  seien größter bzw. kleinster Eigenwert der Matrix  $\frac{1}{2}(A(t) + A'(t))$  und  $x(t)$  die (eukli-

dische) Länge des Vektors  $\mathbf{x}(t)$ . Falls  $\int \lambda_1(t) dt < \infty$  und  $\int \lambda_2(t) dt < \infty$ , gilt nach A. Wintner (dies. Zbl. 37, 63) für jede nichttriviale Lösung  $x(t) \rightarrow x \neq 0$  für  $t \rightarrow \infty$ . Aus den Integrabilitätsbedingungen für  $\lambda_1, \lambda_2$  im Intervall  $(t_0, \infty)$

folgt  $\int \operatorname{sp} A(t) dt < \infty$ , womit der Fall  $A(t) = \text{const.}$ , falls  $A(t) = \text{const.} \neq 0$  nicht schief-symmetrisch ist, ausgeschlossen wird. Um sich von dieser Einschränkung zu befreien, beweist Verf. unter Benutzung eines Resultates von I. G. Malkin (Amer. math. Soc., Translation No. 20, 1950: Certain questions on the theory of motion in



the sense of Liapounoff; translated from Sbornik naučn. Trudov Kazan. avjacon. Inst. Baranov Nr. 7, 1937) folgenden Satz: Wenn  $\int_t^{\infty} \lambda_1(\tau) d\tau \rightarrow -\infty$ ,  $\int_t^{\infty} \lambda_2(\tau) d\tau \rightarrow -\infty$  für  $t \rightarrow \infty$ , dann gilt für jede nichttriviale Lösung  $x(t) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$ , so daß die triviale Lösung  $x(t) \equiv 0$  im Liapounoffschen Sinne asymptotisch stabil ist. Bei den hier genannten Integrabilitätsbedingungen für  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  divergiert  $\int_0^{\infty} \operatorname{sp} A(t) dt$ .

Herbert Bilharz.

**Ascoli, Guido:** *Ricerche asintotiche sopra una classe di equazioni differenziali non lineari.* Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 1—28 (1951).  
Data l'equazione differenziale

$$(A) \quad d^2x/dt^2 + x = f(x, t^{-1}),$$

dove la funzione  $f(x, u)$  è olomorfa nelle variabili  $x$  e  $u$  nell'intorno del punto  $x = 0$ ,  $u = 0$ , e nulla per  $x = 0$  e per  $u = 0$ , oggetto principale della Memoria è la ricerca di espressioni asintotiche per gli integrali limitati della (A). A tale scopo occorre premettere la dimostrazione dell'esistenza di tali integrali; ciò porge l'occasione di dimostrare un teorema generale di stabilità per i sistemi canonici:  $dx_i/dt = \partial H/\partial y_i$ ,  $dy_i/dt = -\partial H/\partial x_i$ , con  $H(x_i, y_i, t) = U(x_i, y_i) + \psi(x_i, y_i, t)$ , e  $U$  e  $\psi$  soddisfacenti convenienti ipotesi. Si trova che ogni soluzione limitata della (A) ha un andamento, che è detto dall'A. quasi-sinoidale (cioè ammette infiniti zeri, infiniti estremi e infiniti flessi e la differenza di due zeri consecutivi tende a  $\pi$  per  $t \rightarrow \infty$ ). Viene poi ottenuta la seguente espressione asintotica di una soluzione limitata della (A)  $x = x(t)$

$$(1) \quad x(t) = \gamma \sin\left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \lg t - \mu\right) + O\left(\frac{1}{t}\right),$$

dove  $\mu$  e  $\gamma$  sono costanti e  $\varphi(\gamma) = \frac{1}{\gamma} \int_0^{2\pi} f'_u(\gamma \sin \sigma, 0) \sin \sigma d\sigma$ . Si ottengono pure espressioni asintotiche per la derivata  $x'(t)$ , per gli zeri  $t_n$  e per gli estremi  $t'_n$  di  $x(t)$ . In seguito è ricavata una formula di seconda approssimazione della  $x(t)$ ; essa completa la parte principale  $\gamma \sin\left(t - \frac{\varphi(\gamma)}{2\pi} \lg t - \mu\right)$  della (1) con un termine, di struttura complessa, che è  $O(t^{-1})$ . Infine i metodi sono estesi, limitandosi alla prima approssimazione, all'equazione  $d^2x/dt^2 + x = f(x, t^{-1/2})$ .

Maria Cinquini-Cibrario.

**Haag, Jules:** *Sur certains systèmes différentiels à solution périodique lentement variable.* Bull. Sci. math., II. Sér. 75<sub>I</sub>, 15—21 (1951).

In una precedente Nota (questo Zbl. 34, 351) l'A. ha considerato il sistema di equazioni differenziali ordinarie  $dx_i/dt = \lambda f_i(x_1, \dots, x_m, t)$  ( $i = 1, \dots, m$ ), ove le  $f_i$ , come funzioni di  $t$ , sono periodiche con periodo  $T$ , ma non continue. Oggetto della presente Nota è il sistema (\*)  $dx_i/dt = \lambda f_i(x_1, \dots, x_m, t, \theta)$  ( $i = 1, \dots, m$ ), [ove il parametro  $\theta$  varia in  $(0, +\infty)$ ], quando si considerino soluzioni relative a dati iniziali  $x_i(0) = a_i$ , analoghi a quelli che condurrebbero asintoticamente a una soluzione periodica, se le funzioni  $f_i$  non dipendessero da  $\theta$ ; per le ipotesi relative alle funzioni  $f_i(x_1, \dots, x_m, t, \theta)$  l'A. rinvia alla precedente Nota, soggiungendo che le derivate parziali  $\partial f_i/\partial \theta$  sono continue e soddisfano a una condizione di Lipschitz. Posto  $F_i(x_1, \dots, x_m, \theta) = \int_0^T f_i(x_1, \dots, x_m, \theta) dt$ , l'A. dimostra che le soluzioni stabili del sistema (\*) si possono ottenere calcolando le soluzioni  $y_i = Q_i(\theta)$  del sistema  $F_i(y_1, \dots, y_m, \theta) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), soddisfacenti alle ordinarie condizioni di stabilità; e sotto opportune condizioni, per le quali rinviamo alla Nota in questione, è  $x_i(t) = Q_i(t) + O(\lambda)$ . Silvio Cinquini.

Graffi, D.: Forced oscillations for several nonlinear circuits. Ann. of Math.. II. Ser. 54, 262—271 (1951).

Der Autor beweist die Existenz mindestens einer periodischen Lösung mod  $T$  folgender nichtlinearer Differentialgleichungen elektrischer Schwingungskreise:

$$(1) L \frac{d^2x}{dt^2} + g'(x) \frac{dx}{dt} + f(x) = e(t) \text{ und } (2) L_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} + M \frac{d^2x_2}{dt^2} + g'_1(x_1) \frac{dx_1}{dt} + \frac{x_1}{C_1} = e_1(t),$$

$$M \frac{d^2x_1}{dt^2} + L_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} + g'_2(x_2) \frac{dx_2}{dt} + \frac{x_2}{C_2} = e_2(t). \text{ Dabei sind } L, L_1, L_2, M, C_1, C_2 \text{ positive}$$

Konstante.  $e(t)$ ,  $e_1(t)$  und  $e_2(t)$  sind mod  $T$  periodisch; weiter sei  $f(0) = g(0) = g_1(0)$

$$= g_2(0) = 0 \text{ und } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{C} > 0, \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = R > 0, \lim_{|x_1| \rightarrow \infty} \frac{g_1(x_1)}{x_1} = R_1 > 0,$$

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{g_2(x_2)}{x_2} = R_2 > 0, \text{ schließlich sei } M^2 < L_1 L_2 \text{ und } \frac{M^2}{L_1 L_2} < 4 \frac{R_1 C_1 R_2 C_2}{(R_1 C_1 + R_2 C_2)^2}.$$

Unter diesen Voraussetzungen wird der Beweis mit Hilfe des Brouwerschen Theorems geführt. Dazu wird gezeigt, daß jeweils eine quadratische Form in  $x$  und einer Hilfsveränderlichen  $y$  als Funktion von  $t$  monoton fällt. Wolfhart Haacke.

### Partielle Differentialgleichungen. Potentialtheorie:

Herbst, Robert Taylor: Passive total systems with constant coefficients. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 710 (1951).

Sloovere, Henri de: Sur le nombre d'invariants distincts, fonctions de tenseurs, d'après la méthode de Lie et De Donder. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 583—598 (1951).

Calcul des commutateurs pour deux systèmes complets.

Th. Lepage.

Haimovici, M.: Contributions à la théorie des systèmes d'équations à dérivées partielles. II. Sur les conditions dans lesquelles on peut ajouter à un système de Pfaff en involution, une équation de Pfaff de façon que le système obtenu soit aussi en involution. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 3, 41—46, russische und französ. Zusammenfassgn. 46—47, 47—48 (1951) [Rumänisch].

L'A. considère le système de Pfaff  $\theta_\alpha = 0$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s$ , en involution à  $p$  variables indépendantes, aux caractères  $s_\alpha$ , et cherche les conditions dans lesquelles on peut associer à ce système une équation  $\omega = 0$  dans les mêmes variables, de façon que le système (3)  $\theta_\alpha = 0$ ,  $\omega = 0$  soit aussi en involution à  $p$  variables indépendantes. On suppose que les éléments linéaires intégraux vérifiant l'équation  $\omega = 0$  ne sont pas tous singuliers. — § 1. Considérons un élément linéaire intégral, dont les coordonnées soient  $\omega_i(d_1)$ . Pour qu'un second élément linéaire soit intégral et associé au premier, il doit satisfaire aux conditions (5)  $\theta_\alpha(d_2) = 0$ ,  $\sum_{i,j} A_{\alpha ij} \omega_i(d_1) \omega_j(d_2) = 0$ ,

où  $d\theta_\alpha = \sum_{i,j} A_{\alpha ij} [\omega_i, \omega_j] \pmod{\theta_\alpha}$ ,  $A_{\alpha ij} + A_{\alpha ji} = 0$ . Désignons par  $E_{q-1}$  ( $q = n - s$ ) l'élément

plan défini en chaque point par le système (3). Si nous demandons, que les éléments linéaires  $E_1(d_1)$  et  $E_1(d_2)$  soient contenus dans  $E_{q-1}$ , il est possible, que le nombre d'équations indépendantes en  $\omega_i(d_2)$  contenus dans le système (5) se réduise d'une unité. Dans ce cas, il y a par chaque point  $\infty^{q-3}$  éléments linéaires intégraux singuliers, contenus dans  $E_{q-1}$  formant un cône

algébrique de degré  $s_1$  non contenu dans un cône de  $\infty^{q-2}$  éléments singuliers. — § 2. Soit un élément intégral  $E_r(d_1, \dots, d_r)$  ( $r < p$ ) contenu dans  $E_{q-1}$  et un élément intégral  $E_{r-1}(d_1, \dots, d_{r-1})$  contenu dans  $E_r$ . Un élément intégral  $E_1(d_{r+1})$  associé à l'élément intégral  $E_r$  doit satisfaire aux conditions  $\theta_\alpha(d_{r+1}) = 0$ ,  $d\theta_\alpha(d_q, d_{r+1}) = \sum_{i,j} A_{\alpha ij} \omega_i(d_q) \omega_j(d_{r+1}) = 0$ ,

$q = 1, \dots, r$ . Si l'on impose la condition que  $E_1(d_{r+1}) \subset E_{q-1}$  il est possible que le nombre des équations indépendantes de  $(C_{r+1})$  se réduise d'une unité (et d'une seule, si l'on suppose que les éléments intégraux  $E_r$  de  $E_{q-1}$  ne sont pas tous singuliers). Dans ce cas, étant donné un  $E_{r-1} \subset E_{q-1}$  quelconque, il existe des éléments linéaires intégraux, qui, avec  $E_{r-1}$ , déterminent un  $E_r$  intégral singulier et tous ces éléments linéaires forment un cône de degré  $s_r$  contenu dans l'élément plan défini par les équations  $(C_r)$  et  $\omega = 0$  et non contenu dans un autre cône à un nombre plus grand de dimensions. — § 3. Dans ce cas, dans chaque  $E_{r+1}$  intégral, il y a par chaque  $E_{r-1}$  un élément  $E_{r+r-1}$ , dont tous les éléments  $E_r$ , qui contiennent  $E_{r-1}$ , sont singuliers. Les coordonnées d'un élément intégral  $E_{r+2}$ ,  $E_{r+3}$ ,  $\dots$  vérifient des conditions telles que  $(C_{q+2})$ . Si nous imposons que ces éléments soient contenus dans  $E_{q-1}$ , cela ne réduit plus la nombre



de ces conditions. — § 4. Si l'équation  $\omega = 0$  satisfait aux conditions décrites plus haut pour un  $r \leq p$ , et  $d\omega = 0$  est indépendante des  $(C_r)$ , pour que le système (3) soit en involution à  $p$  variables indépendantes, il faut encore et il suffit, que soit satisfaite  $s' + s'_1 + \dots + s'_p + p = n$ , où  $s'_i$  sont les caractères du système (3), et cela veut dire que  $\omega = 0$  est contenue dans le système dérivé de (3). Autoreferat.

**Sugawara, Masao:** On a system of differential equations. J. math. Soc. Japan 3, 181—194 (1951).

Le R. croit avantageux de présenter les résultats de cet article sous la forme suivante, modifiant ainsi l'ordre adopté par l'A. et précisant certains de ses énoncés.  $U, V, F, \dots$  sont des matrices de type  $(m, n)$  dont les coefficients sont des fonctions réelles continuellement dérivables dans un domaine  $D$  d'un espace euclidien et sur sa frontière  $\Gamma$ . L'A. pose  $[U, V] = \int_D UV' dv$ ,  $[U, U] = [U]$  où  $V'$  est la transposée de  $V$ .  $H$  étant une matrice constante, définie positive de type  $(n, n)$ , l'A. prouve l'existence d'une suite de matrices  $U_1, \dots, U_i, \dots$  telle que toute solution de l'équation  $dF/dn + FH = 0$  sur  $\Gamma$ , où  $d/dn$  est le symbole de la dérivation normale, possède un développement de la forme  $F = \sum_{i=1}^{\infty} [F, U_i] U_i$  développement qui converge en ce sens que les coefficients de la matrice  $\left[ F - \sum_{i=1}^n [F, U_i] U_i \right]$  tendent uniformément vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$  (Le R. signale que si l'on désigne par  $a_{ij}$  les coefficients d'une matrice  $[F]$ ,  $\sum_i \sqrt{a_{ii}}$  est une norme pour l'espace vectoriel des  $F$  et que la convergence indiquée ci-dessus est alors la convergence selon cette norme). L'A. définit les  $U_i$  par récurrence:  $U_i$  est solution du problème suivant: rendre minimum  $\text{Sp}\{U\}$  où  $\{U\} = \int_{\Gamma} UHU' dw + \int_D \sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial U'}{\partial x_i} dv$  sous les conditions  $[U]_i = E$  (matrice unité),  $[U_i, U_j] = 0$ ,  $1 \leq j < i$ . Appliquant le calcul des variations classique l'A. montre que  $U_i$  satisfait au système

$$\sum_k \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k^2} + K_i U_i = 0 \text{ dans } D, \quad \frac{dU_i}{dn} + U_i H = 0 \text{ sur } \Gamma$$

avec  $K_i = \{U_i\}$ . L'A. appelle les  $U_i$  fonctions matricielles propres normales et les  $K_i$  valeurs propres normales. Se fondant sur ces égalités, l'A. montre comment on peut de proche en proche calculer tous les coefficients de toutes les matrices  $U_i$  et aboutir par là d'une part à l'existence du minimum de  $\text{Sp}\{U_i\}$  et d'autre part au théorème sur le développement des  $F$ . L'essence de la méthode est de substituer aux équations sur les matrices des équations équivalentes sur les coefficients et de déduire le développement de  $F$  de ceux de ses coefficients. André Revuz.

**Germay, R. H.:** Sur une extension d'un théorème de Jacobi pour l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de forme résolue par rapport à la dérivée en  $x_1$ . Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér. 65, 103—108 (1951).

Data l'equazione alle derivate parziali del primo ordine

$$(1) \quad p_1 = f(x_1, x_2, \dots, x_n, z, p_2, \dots, p_n) \quad (p_i = \partial z / \partial x_i),$$

dove  $f$  è funzione olomorfa dei suoi argomenti in un certo campo, si introduce un sistema di equazioni alle derivate parziali

$$(2) \quad \frac{\partial W_j}{\partial x_1} + \frac{\partial W_j}{\partial z_1} F_1 + \frac{\partial W_j}{\partial z_2} F_2 + \dots + \frac{\partial W_j}{\partial z_k} F_k = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

dove  $F_1, F_2, \dots, F_k$  dipendono dalle  $n+k$  variabili  $x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k$  e dalle derivate delle incognite  $W_j$  rispetto a  $x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k$ , e si considera il sistema di integrali del sistema (2), che soddisfano le condizioni

$$W_j(x_1^0, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k) = V_j(x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k) \quad (j = 1, 2, \dots, k),$$

dove le  $V_j$  sono funzioni olomorfe assegnate di  $x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k$ . Si dimostra che, se il sistema di equazioni  $V_j(x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) definisce le  $k$  funzioni implicite  $z_i = \chi_i(x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), il sistema di equazioni  $W_j(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_k) = 0$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) definisce  $k$  integrali della (1)  $z_i = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), che soddisfano le condizioni iniziali  $\psi_i(x_1^0, x_2, \dots, x_n) = \chi_i(x_2, \dots, x_n)$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).

Maria Cinquini-Cibrario.

Myškis, A. D. und V. E. Abolinja: Über die Eindeutigkeit der Lösung eines gemischten Problems für partielle Differentialgleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 533—536 (1951) [Russisch].

The author proves a theorem and several corollaries on the uniqueness of the solutions of a system

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n B_{1k} \frac{\partial i}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n C_{1k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + D_1 i + F_1 u &= h_1 \\ A_2 \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{k=1}^n B_{2k} \frac{\partial u}{\partial x_k} + \sum_{k=1}^n C_{2k} \frac{\partial i}{\partial x_k} + D_2 u + F_2 i &= h_2 \end{aligned}$$

under the conditions  $i|_{t=0} = f(x)$ ,  $u|_{t=0} = \varphi(x)$  ( $x \in G$ ),  $u|_{x \in \Gamma} = \psi(x, t)$ ,  $0 \leq t < T$ .  $A_1, \dots, F_2$  are  $m^{\text{th}}$  order matrices defined as functions of  $(x, t)$  in the cylinder  $x \in G$ ,  $0 \leq t < T$  ( $0 < T \leq \infty$ ), where  $G$  is a bounded region,  $\Gamma$  its boundary,  $i, u$  are column matrices. The precise statements are too lengthy to be reproduced here.

José L. Massera.

Kapilevič, M. B.: Über das Cauchysche Problem für die Gleichung  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{a}{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \sigma} - b^2 u = 0$ . Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 13—16 (1951) [Russisch].

An explicit formula in terms of Bessel functions is given for the solution of the differential equation in question, ( $a$  and  $b$  constants,  $0 < a < 1$ ), in the triangle with corners  $(x, \sigma) = (0, 0)$ ,  $(1, 0)$  and  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  respectively, the values of  $u$  and  $\partial u / \partial y$ , ( $y = -(\sigma^{-1}(1-a))^{a-1}$ ) being prescribed when  $\sigma = 0$ . The Riemann function is discussed.

Lars Gårding.

Gillis, Paul P.: Équations de Monge-Ampère à six variables indépendantes. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 229—240 (1951).

L'A. montre que le problème de Dirichlet pour certaine équation, non linéaire, à six variables, possède tout-au-plus une solution.

Th. Lepage.

Caccioppoli, Renato: Limitazioni integrali per le soluzioni di un'equazione lineare ellittica a derivate parziali. Giorn. Mat. Battaglini, IV. Ser. 80, 186—212 (1951).

Für die lineare elliptische partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit  $n$  unabhängigen Variablen  $x_1, \dots, x_n$ :

$$(*) \quad \sum_{i,k=1}^n A_{ik}(x_j) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_{i=1}^n B_i(x_j) \frac{\partial u}{\partial x_i} + C(x_j) u = f; \quad \|A_{ik}\| = 1$$

sind in bekannten Arbeiten (S. Bernstein, J. Schauder und Verf.) Schranken der Lösungen, deren Ableitungen sowie Hölderkonstanten abgeleitet worden. Verf. beschäftigt sich mit der Abschätzung der Quadratintegrale der Ableitungen 1. und 2. Ordnung der Lösungen von (\*) in einem Gebiet  $D$  der Berandung  $S$ ; in speziellen Fällen liegen bereits Resultate vor. Es wird gesetzt:

$$J_D = \iint_D u^2 d\tau; \quad J_D = \iint_D \sum \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d\tau; \quad J_D^2 = \iint_D \sum \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 d\tau.$$

Bezeichnen  $J_S, J_S^1, J_S^2$  die entsprechenden über  $S$  erstreckten Integrale, so ergibt sich u. a.:  $J_D^1 + J_D^2 \leq K \left\{ \int_D f^2 d\tau + J_D + J_S + \bar{J}_S^1 + \bar{J}_S^2 \right\}$  und mit  $D' \subset D$ :



$J_D + J_D \leq K' \left\{ \int_D f^2 d\tau + J_D \right\}$ ;  $K, K'$  sind Konstante. Wenn das Dirichlet-Problem eindeutig lösbar ist ( $C \leq 0$ ), läßt sich  $J_D$  rechts noch abschätzen durch:  $\int_D f^2 d\tau$  und  $J_S$ .

Im Falle  $n = 2, 3$  werden noch Schranken für die Hölderkonstanten der Lösungen durch die Quadratintegrale ermittelt. Es ist interessant, daß die Hauptabschätzungen auch bei bloßer Stetigkeit der Koeffizienten von (\*) gelten.

*Herbert Beckert.*

**Zernov, N. V.: Über die Lösung der instationären Randwertaufgaben der Elektrodynamik.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **80**, 33—35 (1951) [Russisch].

The problem seems to be that of a sinusoidal wave, commencing at time  $t = 0$ , impinging upon a coordinate surface of general form. The author shows that a Fourier transform reduces this non-stationary problem to a stationary one. He then discusses the possibility of making deductions concerning the non-stationary problem from solutions of the corresponding stationary problem, when such solutions are available.

*Frederick V. Atkinson.*

**Ladyženskaja, O. A.: Über die Lösung eines gemischten Problems für hyperbolische Gleichungen.** Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **15**, 545—562 (1951) [Russisch].

\* Proofs of results announced earlier (this Zbl. **39**, 322).

*Lars Gårding.*

**Savin, S. A.: Die Bildung von Integralen der dreidimensionalen Laplaceschen Gleichung mittels einer Funktion von viergliedrigen Argumenten und einige ihrer Anwendungen.** Priklad. Mat. Mech. **15**, 621—624 (1951) [Russisch].

L'A. cherche des intégrales de l'équation de Laplace  $\nabla^2 F(x, y, z) = 0$  sous la forme de fonctions de 2 combinaisons linéaires de  $x, y, z$  et  $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ . Il trouve une intégrale  $F = F_0(u) + F_1(v)$ , où  $F_0$  et  $F_1$  sont deux fonctions arbitraires,  $u = \varrho(\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z) - \varrho_0(\alpha x + \beta y + \gamma z)$ ,

$$v = (\alpha_0 x + \beta_0 y + \gamma_0 z + \varrho_0 r) / (\alpha x + \beta y + \gamma z + \varrho r)$$

avec  $\varrho_0^2 = \alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2$  et  $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ . — Dans le cas d'une seule combinaison linéaire, on a l'intégrale  $F = C \ln(\alpha x + \beta y + \gamma z + \varrho r)$ , avec  $\varrho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ . — Ces intégrales contiennent comme cas particuliers des intégrales déjà connues et utilisées dans la théorie de l'élasticité.

*Charles Blanc.*

**Martin, M. H.: The fundamental solution of  $\Delta \varphi + e(y)\varphi_y = 0$ .** Duke math. J. **18**, 845—858 (1951).

Es handelt sich um eine Methode für die Bestimmung der Grundlösungen, d. h. von Lösungen der Form  $\varphi = P(x, y) \log r + W(x, y)$ , [ $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ ,  $P$  und  $W$  regulär] der im Titel angegebenen und allgemeineren Gleichungen; eine Methode, welche im Falle  $e(y) = \frac{p}{y} + \frac{2(1-p)}{y + Cy^p}$  ( $p \neq -1$ ),  $e(y) = \frac{1}{y} + \frac{2}{y \log y + Cy}$  ( $p = 1$ ) ( $C = \text{Konst.}$ ) zu ganz expliziten Ergebnissen führt. Es kommen darin Legendresche Funktionen zweiter Art vor. — Vorher waren nur der Fall  $e(y) = 1/3y$  von Ref. [Mem. Accad. Lincei, V. Ser. **14**, 133—247 (1923)] und der Fall  $e(y) = p/y$  ( $p$  beliebig) von A. Weinstein [s. insb. dies. Zbl. **38**, 262] behandelt worden. — Die Methode besteht hauptsächlich darin, daß Verf. anstatt die gegebene Gleichung direkt in die neuen Veränderlichen  $\xi = r$ ,  $\eta = y$  zu bringen — sich fragt: Welches sind die Bedingungen dafür, daß eine allgemeine, partielle, lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung durch die angedeutete Transformation in eine bestimmte (trennbare) Differentialgleichung überführt wird? — Außerdem enthält die Arbeit den expliziten, strengen Ausdruck der Funktion  $e(y)$  für die Strömung eines einatomigen Gases und manche interessanten geometrischen Betrachtungen über trennbare Identitäten, d. h. über Identitäten der Form

$$\sum_{\mu=1}^n F_{\mu}(\xi) G_{\mu}(y) \equiv 0.$$

*F. G. Tricomi.*

**Myrberg, Lauri:** Über die vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 103, 8 S. (1951).

Auf  $|z| = 1$  sei  $E = \{E_n\} = \{A_n\} + \{B_n\}$  eine beliebige abzählbare Menge punktfremder offener Bögen mit der Eigenschaft, daß die Komplementärmenge  $\bar{E}$  die Kapazität Null hat. Die Funktion  $A(s) = A(e^{i\varphi})$  sei auf den Bögen  $A_n$  beschränkt und auf Teilbögen  $\bar{A}_n$ , die  $A_n$  bis auf eine Menge  $M_1$  der Kapazität Null überdecken, stetig. Auf  $B_n$  ist eine beschränkte und  $L$ -integrierbare Funktion

$B(s)$  gegeben, die dann  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} B(t) dt = B(s)$  auf  $B_n$ , von einer Menge  $M_2$

vom linearen Maß Null abgesehen, erfüllt. Verf. konstruiert unter diesen Annahmen eine in  $|z| < 1$  beschränkte harmonische Funktion  $u(z)$ , die den folgenden Be-

dingungen genügt: (a)  $\lim_{z \rightarrow s} \frac{\partial u}{\partial r} = A(s)$  für  $s \in \{A_n\} - M_1$ ,  $\lim_{z \rightarrow s} u(z) = B(s)$  für

$s \in \{B_n\} - M_2$ , und zeigt weiter, daß  $u(z)$  auch die einzige beschränkte Lösung der gemischten Randwertaufgabe (a) ist. Die Konstruktion ist auch noch möglich, wenn  $E$  von positiver Kapazität ist. Dann ist aber durch die Bedingungen (a)  $u(z)$  i. a. nicht eindeutig festgelegt, wie für die beiden Fälle, 1.  $\bar{E}$  hat positives lineares Maß und 2.  $\bar{E}$  ist vom linearen Maß Null aber von pos. Kapazität, näher ausgeführt wird.

Hans Wittich.

**Slobodjanskij, M. G.:** Bestimmung der Ableitungen der gesuchten Funktionen bei der Lösung von Aufgaben nach der Methode der endlichen Differenzen. Priklad. Mat. Mech. 15, 245—250 (1951) [Russisch].

Bei einer oder mehreren partiellen Differentialgleichungen

$$L_j \{w_1(x_1, \dots, x_n), \dots, w_m(x_1, \dots, x_n)\} = P_j(x_1, \dots, x_n)$$

mit zugehörigen, etwa homogenen Randbedingungen auf dem Rande  $S$  eines Gebietes  $D$  werden die Lösungen in der Gestalt

$$w_i = \int_D \sum_j P_j(\xi_v) G_{ij}(x_v, \xi_v) d\xi_v$$

dargestellt, wobei die Greenschen Funktionen  $G_{ij} = g_{ij}^0 + g_{ij}$  in einen in  $x_v = \xi_v$  singulären Bestandteil  $g_{ij}^0$  und einen in  $D$  regulären Anteil  $g_{ij}$  zerlegt sind. Eine gesuchte Ableitung

$$w_i^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots} w_i}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots}$$

wird durch Differentiation unter dem Integral gebildet:

$$w_i^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)} = \int_D \sum_j P_j g_{ij}^{0(\alpha_1, \alpha_2, \dots)} d\xi_v + \int_D \sum_j P_j g_{ij}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)} d\xi_v.$$

Hier enthält das erste Integral keine Unbekannte mehr; das zweite Integral braucht häufig nur mit geringerer Genauigkeit berechnet zu werden; dazu genügt es, die  $g_{ij}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots)}$  aus Randwertaufgaben angenähert z. B. mit Hilfe des Differenzenverfahrens zu ermitteln. Es folgen zwei numerische Beispiele (Torsion eines Stabes von quadratischem Querschnitt und Spannungen in einer ringsum eingespannten, gleichmäßig belasteten Platte).

Lothar Collatz.

**Bergman, S. and M. Schiffer:** A majorant method for non-linear partial differential equations. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 744—749 (1951).

Für die Differentialgleichung  $\Delta u = P(x, y) u + \sum_{i=2}^{\infty} a_i u^i$ , wo  $P(x, y)$  eine in einem endlichen, einfach-zusammenhängenden Gebiet  $D$  positive und stetige Funktion bedeutet und die stetigen Funktionen  $a_i(x, y)$  in  $D$  der Bedingung  $|a_i| < K e^i / i!$  ( $K > 0, 1 > 0$ ) genügen, wird das folgende Randwertproblem be-



trachtet: Gesucht eine Lösung der Differentialgleichung  $u(x, y)$ , die auf dem Rande  $C$  von  $D$  die Randwerte  $\mu(s)$  annimmt, wo  $s$  die Bogenlänge auf  $C$  bedeutet. Die Lösung  $u$  wird als Funktional von  $\mu(s)$  aufgefaßt. Sei  $u(x, y, t)$  die entsprechende Lösung mit den Randwerten  $t\mu(s)$ , dann wird bewiesen, daß die Reihe  $u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k t^k$  eindeutig bestimmt ist und konvergiert für  $|t| \leq 1$ , falls das Max  $|\mu(s)|$  und  $P(x, y)$  genügend klein sind. Die Randwerte der  $u_k$  verschwinden auf  $C$  mit Ausnahme derjenigen von  $u_1$ , die gleich  $\mu(s)$  sind. Die Funktionen  $u_k$  genügen linearen Differentialgleichungen, deren Behandlung bekannt ist. Die Majorisierung, die schließlich auf eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung führt, wird bezüglich der Greenschen Funktion der Differentialgleichung  $\Delta u = Pu$  und ihrer Abhängigkeit von  $P(x, y)$  und vom Gebiet  $D$  geführt.

Adolf Kriszten.

**Lax, Peter D.:** A remark on the method of orthogonal projections. Commun. pure appl. Math. 4, 457—464 (1951).

Ist  $f(x, y)$  in einem endlichen Bereich  $G + S$  (Rand  $S$  von beschränkter Krümmung) stetig und in  $G$  zweimal stetig differenzierbar, so beschäftigt sich Verf. mit dem Problem, nach der Methode der orthogonalen Projektion eine Lösung der Potentialgleichung  $\Delta u = 0$  zu finden, deren Randwerte mit denen von  $f(x, y)$  übereinstimmen. Wird  $f = u + v$  gesetzt, und bedeutet  $u(x, y)$  die Projektion von  $f(x, y)$  in den bez. der Dirichlet-Metrik vollständigen Raum der harmonischen Funktionen, so ist zu beweisen, daß längs  $S$   $v$  verschwindet, was in der Arbeit gezeigt wird.

Herbert Beckert.

**Choquet, Gustave:** Les capacités, fonctions alternées d'ensemble. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 904—906 (1951).

Im Rahmen potentialtheoretischer Betrachtungen werden für die Kapazität (bezüglich einer Greenschen Funktion eines Gebietes des euklidischen Raumes) als Funktion auf einer Folge von beschränkten kompakten Teilmengen Ungleichungen aufgestellt, welche analog sind zu jenen, welche die vollständig monotonen Funktionen einer Veränderlichen kennzeichnen. Das System dieser Ungleichungen besitzt gewisse Vollständigkeitseigenschaften.

Georg Aumann.

**Bucerus, H.:** Zu Dirichlets Ableitung des Ellipsoidpotentials. Astron. Nachr. 279, 238—240 (1951).

Verf. leitet in Anlehnung an die Dirichletsche Methode die Formel für das Newtonsche Potential eines homogenen Ellipsoidkörpers ab, indem er wesentlich von einer komplexen Formulierung des Diskontinuitätsfaktors Gebrauch macht. Die von Dirichlet selbst benutzte reelle Form des diskontinuierlichen Faktors gestattet nur die Herleitung der Attraktionskomponenten.

Karl Maruhn.

## Integralgleichungen. Integraltransformationen:

**Fridlander, V. R.:** Untersuchung des Problems von Kowalewski-Goursat für eine Klasse linearer Differential-Operatorenungleichungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 76, 363—365 (1951) [Russisch].

Verallgemeinerung der Ergebnisse der Arbeiten von Salechov [dies. Zbl. 31, 28 und 41, 64] auf die partielle Differentialgleichung  $\partial^p z / \partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_s^{\alpha_s} = f(x_1, \dots, x_s) L(z) + F(x_1, \dots, x_s; y_1, \dots, y_t)$  ( $p = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ ) mit den Anfangsbedingungen  $\partial^k z / \partial x_i^k x_{j=0} = \varphi_{ik}(x, y)$  ( $i = 1, 2, \dots, s; k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1$ ). Diese sollen den Forderungen der Übereinstimmung genügen:  $\partial^q \varphi_{ik} / \partial x_j^q x_{j=0} = \partial^k \varphi_{ja} / \partial x_i^k x_{i=0}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, s; i \neq j; k = 0, 1, \dots, \alpha_i - 1; q = 0, 1, \dots, \alpha_j - 1$ ). Dabei bedeutet  $L(z)$  einen Integrodifferentialoperator im Raume  $G$ , der im abgeschlossenen Bereich  $\mathfrak{M}$  stetigen Funktionen  $z(x, y)$  als Funktionen von  $y_1, \dots, y_t$ . — Die Problemstellung ist die gleiche wie bei Salechov, d. h. es wird untersucht, unter welchen kennzeichnenden Bedingungen für die Struktur der gegebenen Anfangswerte  $\varphi_{ik}(x, y)$  die Differentialgleichung eine eindeutig bestimmte Lösung  $z(x, y)$  hat, die in der Umgebung des Punktes  $x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0$  in  $x$  analytisch ist und welche Eigenschaften der Lösung als Funktion der  $y$  zukommen. Dabei werden bestimmte naturgemäße

Voraussetzungen über die gegebenen Ausdrücke  $f$ ,  $F$  und  $L$  gemacht. In dem sich ergebenden Satz spielt eine Hauptrolle eine Verallgemeinerung des Begriffes der Klasse einer im allgemeinen nicht analytischen Funktion im Jevreyschen Sinn, wie sie schon Salechov verwendet. Die kennzeichnende Bedingung ist dann die, daß die Funktionen  $\varphi_{ik}(x, y)$  in  $x$  in obiger Umgebung analytisch sein und bezüglich  $y$  in  $\mathfrak{M}$  zu einer Klasse  $\alpha \leq p$  gehören müssen. Ist das erfüllt, so hat die Lösung als Funktion der  $y$  selbst die letztere Eigenschaft. Sind dabei  $f$ ,  $F$  und  $\varphi_{ik}$  ganze Funktionen der  $x$ , so hat die Lösung  $z$  dieselbe Eigenschaft. — Vom Beweis sagt der Verf. selbst, daß er äußerst kompliziert sei und in einer Verfeinerung der Methoden von S. Kowalewski und Salechov bestehe.

Erik Svenson.

**Kokareva, I. A.: Einige Sätze über die Existenz analytischer Lösungen für Integro-Differentialgleichungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 13–16 (1951) [Russisch].

Das Problem des vorstehenden Referates wird in einem noch allgemeineren Rahmen aufgerollt. Das Glied  $f(x_1, \dots, x_s) L(z)$  wird durch eine  $m$ -fache Summe solcher Glieder  $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) L_{\gamma_1 \dots \gamma_m}(z)$  ersetzt, wobei der Integrodifferentialoperator  $L(z)$  außer auf einen Teil der Veränderlichen  $y, y_{n+1}$  bis  $y_s$  [ $z = z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s); 0 \leq n \leq s$ ] auch noch auf die Veränderlichen  $x$  ausgeübt wird, während die Koeffizientenfunktionen, wie angegeben, nicht nur von den  $x$ , sondern noch von den übrigen Veränderlichen  $y, y_1$  bis  $y_n$ , abhängen. Außerdem werden in den Kreis der Bedingungen, die zur Erzeugung einer in der Umgebung des Punktes  $x_1 = \dots = x_m = 0$  eindeutigen analytischen Lösung  $z$  der Differentialgleichung dienen, nicht nur die gegebenen Anfangswerte einbezogen, sondern er wird auch auf die Koeffizientenfunktionen  $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m}(x, y)$  und  $F(x, y)$  ausgedehnt. — In dieser Allgemeinheit ist dann die Aufstellung kennzeichnender Bedingungen für die Analytizität der Lösung in  $x$  derartig kompliziert, daß die Verf. sich auf die Angabe von hinreichenden Bedingungen beschränkt, die immer noch reichlich kompliziert ausfallen. Im wesentlichen bestehen sie wieder in der Zugehörigkeit der Anfangswerte  $\varphi_i^{(\kappa_i)}(x, y)$  und jetzt auch der Funktionen  $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m}(x, y)$  und  $F(x, y)$  zu gewissen Klassen nicht zu hoher Ordnung im Jevreyschen Sinn bzw. in dem von Salechov verallgemeinerten Sinn. — Hier sei als Beispiel nur der speziellere Satz angegeben: Für die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^p z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_m^{p_m}} = \sum_{\gamma_1=0}^{r_1} \dots \sum_{\gamma_m=0}^{r_m} \sum_{(\lambda)=q} A_{\gamma_1 \dots \gamma_m \lambda_1 \dots \lambda_{s-n}}(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) \cdot \frac{\partial^{\gamma_1 + \dots + \gamma_m + \lambda} z(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)}{\partial x_1^{\gamma_1} \dots \partial x_m^{\gamma_m} \partial y_{n+1}^{\lambda_1} \dots \partial y_s^{\lambda_{s-n}}} + F(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s)$$

mit  $0 \leq n \leq s$ ,  $p, q$  natürliche Zahlen,  $r_i < p_i$  ( $i = 1, \dots, m$ ),  $\lambda = \sum_{j=1}^{s-n} \lambda_j$ ,  $p = \sum_{j=1}^m p_j$ ,

$r = \sum_{j=1}^m r_j$ , lauten die Bedingungen:  $A_{\gamma_1 \dots \gamma_m}$ ,  $F$  und  $\varphi_i^{(\kappa_i)}$  seien in der Umgebung des Nullpunktes in  $x$  analytisch, in einem abgeschlossenen Bereich in  $y_1, \dots, y_n$  stetig, und in  $y_{n+1}, \dots, y_s$  sollen die Funktionen  $F$  und  $\varphi_i^{(\kappa_i)}$  zu Klassen  $\alpha$  bzw.  $\beta_i^{(\kappa_i)}$  im Jevreyschen Sinn gehören von einer Ordnung, die nicht höher als das „Gewicht“  $\delta = (p - r)/q$  der Gleichung ist. Dann ist die in  $x$  eindeutige analytische Lösung bezüglich  $y_{n+1}, \dots, y_s$  auch von einer Klasse, die  $\delta$  nicht übertrifft, und sie ist außerdem eine ganze Funktion der  $x$ , wenn alle gegebenen Funktionen

es sind. Daraus folgt z. B., daß die Gleichung  $\frac{\partial^p z(x, y)}{\partial x^p} = \sum_{\gamma=0}^r A_\gamma(x) \frac{\partial^{\gamma+q} z(x, y)}{\partial x^\gamma y^q}$  ( $r < p$ ) bei

Erfüllung der Bedingungen des Satzes nichtanalytische Lösungen in der Veränderlichen  $y$  besitzt.

Erik Svenson.

**Voskresenskij, E. P. und V. J. Sobolev: Über eine Klasse von nichtlinearen Integralgleichungen.** Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 717–718 (1951) [Russisch].

Die nicht-lineare Integralgleichung:  $\mu x(t) = \int_B K(t, s) g(s, x(s)) ds$  besitzt unter den folgenden Voraussetzungen über  $K$  und  $g$  mindestens abzählbar unendlich viele normierte Lösungen:  $B$  sei ein Gebiet des  $n$ -dimensionalen euklidischen Raumes: Es sei  $K(t, s) = a(t) b(s) Q(t, s)$ ; hierin bezeichne  $Q$  einen nicht ausgearteten, symmetrischen Kern mit über  $B$  integrierbarem Quadrat.  $a(t)$  und  $b(t)$  seien meßbare, beschränkte, positive Funktionen auf  $B$ .  $g(t, u)$  sei definiert für  $t \in B$  und  $-\infty < u < \infty$ , ferner bei jedem  $u$  meßbar auf  $B$ . stetig in  $u$  für fast



alle  $t \in B$ . Es gelte  $g(t, u) \cdot u > 0$  für  $u \neq 0$ . Der Operator:  $Fx = g(t, x(t))$  bilde den Funktionalraum  $L_2(B)$  in sich ab. — Beweise fehlen. *Walter Thimm.*

**Ganin, M. P.:** Über ein allgemeines Randwertproblem für analytische Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 921–924 (1951) [Russisch].

Es sei  $S^+$  ein endliches  $(\nu + 1)$ -fach zusammenhängendes, ebenes Gebiet, das von  $\nu + 1$  einfachen, geschlossenen, punktfremden, glatten Kurven  $L_\mu$ ,  $\mu = 0, \dots, \nu$  begrenzt wird. Es sei  $L = L_1 + L_2 + \dots + L_\nu$ ,  $S^-$  sei das Komplement von  $S^+ \cup L$  in der  $z$ -Ebene. — Gesucht werden  $n$  Paare von Funktionen  $\varphi_p^+(z)$ ,  $\varphi_p^-(z)$ ,  $p = 1, 2, \dots, n$ , die in den Gebieten  $S^+$  bzw.  $S^-$  analytisch sind und auf  $L$  dem folgenden System von Gleichungen genügen:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{n_p} a_{kpq}(t) \{ \varphi_p^{(n_p-q)}(\alpha_{p,n_p-q}(t)) \}^+ + \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{m_p} b_{kpq}(t) \{ \varphi_p^{(m_p-q)}(\alpha_{p,m_p-q}^*(t)) \}^- \\ & + \int_L \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{n_p} c_{kpq}(t, \tau) \{ \varphi_p^{(n_p-q)}(\alpha_{p,n_p-q}(\tau)) \}^+ d\tau \\ & + \int_L \sum_{p=1}^n \sum_{q=0}^{m_p} d_{kpq}(t, \tau) \{ \varphi_p^{(m_p-q)}(\alpha_{p,m_p-q}^*(\tau)) \}^- d\tau = g_k(t), \quad k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Hier sind  $n_p$ ,  $m_p$ ,  $p = 1, \dots, n$ , ganze Zahlen;  $a_{kpq}$ ,  $b_{kpq}$ ,  $c_{kpq}$ ,  $d_{kpq}$ ,  $g_k$  sind auf  $L$  gegebene Funktionen, die noch gewissen (Stetigkeits-) Bedingungen genügen müssen. Es seien  $\text{Det. } |a_{kp0}| \neq 0$ ,  $\text{Det. } |b_{kp0}| \neq 0$  überall auf  $L$ . Die Funktionen  $\alpha_{p,n_p-q}$ ,  $\alpha_{p,m_p-q}^*$  sollen  $L$  umkehrbar eindeutig auf sich abbilden und den Umlaufsinns erhalten; ferner sollen sie bestimmten Stetigkeitsanforderungen genügen. Die Lösung dieser Aufgabe wird auf die Lösung eines Systems von singulären Integralgleichungen zurückgeführt. — Beweise nur skizziert. *Walter Thimm.*

**Elliott, Joanne:** On some singular integral equations of the Cauchy type. Ann. of Math., II. Ser. **54**, 349–370 (1951).

Verf. bestimmt die Lösung der Integralgleichung (1)  $\Phi(z) = \pi^{-1} \cdot \text{H.W.}$

$\int_C \frac{f(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$  ( $z$  auf  $C$ , Integral als Cauchyscher Hauptwert für die Bogenlänge als

Parameter) für sehr umfassende Funktionenklassen  $\Phi$  und Kurven  $C$ . Drei Typen von Bedingungen werden betrachtet, von denen wir den ersten hier wiedergeben:

a) Für gewisse  $p > 1$  gelte  $\Phi(z(t)) \in L_p[-\infty, +\infty]$  bzw.  $\in L_p[C]$  ( $z(t)$  Parameterdarstellung von  $C$ ) und  $\Phi(z(t)) \log(t) \in L_p[|t| > 1]$ . b) Die Krümmung von  $C$  existiere überall und sei nach oben beschränkt. c) Die sehr wichtige Sehnenbedingung: Das Verhältnis einer beliebigen Sehne zum zugehörigen Bogen bleibt über einer positiven Schranke (naheliegende Modifikation bei endlichen geschlossenen Kurven). — Resultate: Im Falle geschlossener (endlicher, wie durch  $\infty$  gehender) Kurven gelten dann genau die Hilbertschen Reziprozitätsformeln, d. h. die Lösung von (1) hat die Form (2)  $f(z) = -\pi^{-1} \cdot \text{H.W.} \int_C \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z}$ . Bei Kurven mit freien

Enden (z. B. in der Tragflügeltheorie) treten gewisse Abänderungen auf (besondere Bedingungen für  $\Phi$  an den Intervallenden erforderlich). — In jedem Falle gilt (was funktionentheoretisch von Interesse ist), auch wenn (2) wegen eventueller Nichtexistenz von (1) keine Lösung darstellt, die Gleichung  $\frac{1}{\pi i} \int_C \frac{\Phi(\zeta) d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi + i f}{\zeta - z} d\zeta$ .

— Einige Versehen: S. 349, Z. 7 v. unten  $\Phi + i f$ ; S. 354, Formel (4. 1), es fehlt: „is in  $L_p[-\infty, \infty]$ “; S. 365, Fo. (9. 2), S. 366, Fo. (11. 1b), S. 368, Fo. (12. 4) außerhalb des  $\int$ -Zeichens „ $t$ “ statt „ $s$ “.

*Georg L. Tautz.*

**Tricomi, Francesco G.:** The airfoil equation for a double interval. Z. angew. Math. Phys. **2**, 402–406 (1951).

H. Söhngen (dies. Zbl. 20, 362) gab unter bestimmten Voraussetzungen die Lösung der bekannten Tragflügelgleichung  $\frac{1}{\pi} \int_{-b}^{*b} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x) \quad (-b \leq x \leq b,$

$\int$  Cauchyscher Hauptwert) in geschlossener Form an. Im Anschluß an eine andere Arbeit des Verf., in der die Voraussetzungen Söhngens verringert werden konnten, wird im Vorliegenden eine Erweiterung der Söhngenschen Lösungsformel für den Fall gegeben, daß das Integral in (1) über zwei getrennte Intervalle erstreckt wird. In der Lösung sind zwei willkürliche Konstanten enthalten. Die Untersuchung findet Anwendungsmöglichkeiten bei den sogen. „Swept-back“-Flugzeugen.

Karl Maruhn.

Parodi, Maurice: Sur une méthode de résolution de certaines équations intégrales. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1253–1254 (1951).

Verf. gewinnt die Lösung der Integralgleichung

$$f(s) = 2s \int_0^{\infty} \frac{F(t) dt}{(s^2 + t^2)^{\nu+3/2}} \quad (\nu > -1 \text{ und ganzzahlig})$$

mittels Laplace-Transformation in der Form

$$F(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 3/2)}{\sqrt{\pi}} t^{\nu+1} \int_0^{\infty} J_\nu(tz) \Phi(z) \frac{dz}{z^\nu}$$

$[\Phi(z)$  Laplacesches Bild von  $f(s)$ ]; daraus nach weiterer Umrechnung

$$F(t) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 3/2)}{2\pi \sqrt{\pi}} t^{\nu+1} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\nu\theta} \left[ \int_s^{\infty} \dots \int_s^{\infty} f(s) (ds)^\nu \right]_{s=-it \sin \theta} d\theta.$$

Verallgemeinerung auf Fälle

$$(s + \nu \sqrt{s^2 + t^2}) (\sqrt{s^2 + t^2})^{-3/2} (s + \sqrt{s^2 + t^2})^{-\nu} \quad (\Re \nu > -2)$$

$$(s^2 + t^2)^{-\nu-3/2} \quad (\Re \nu > -\frac{1}{2}), \quad (\sqrt{s^2 + t^2} - s)^\nu (\sqrt{s^2 + t^2})^{-1} \quad (\Re \nu > -1)$$

möglich.

Georg L. Tautz.

Fulks, W.: A generalization of Laplace's method. Proc. Amer. math. Soc. 2, 613–622 (1951).

Let  $f \in C$ ,  $\psi \in C_2$ ,  $\varphi \in C_3$  in  $\langle 0, b \rangle$  and  $f(0) \neq 0$ ,  $\psi(0) = 0$ ,  $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) > 0$ ,  $\varphi'(t) \geq 0$  in  $(0, b)$ . If  $k = o(h^{1/2})$ , then

$$\int_0^b f(t) \exp[-h\varphi(t) + k\psi(t)] dt \sim \frac{1}{2} f(0) \left( \frac{2\pi}{h\varphi''(0)} \right)^{1/2}$$

(where  $A \sim B$  means that  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{A}{B} = 1$ ). This theorem of the author is proved under slightly weaker assumptions on  $\psi$  and  $\varphi$  than given above; it is a generalisation of the known analogous theorem where  $k = 0$ . Moreover the author gives some other theorems of this kind, imposing different relations between  $h$  and  $k$ . As an application he investigates the asymptotic behavior of the incomplete gamma function.

Jan G. Mikusiński.

Zadeh, Lotfi A.: Time-dependent Heaviside operators. J. Math. Physics 30, 73–78 (1951).

Soit  $F(s) = \mathcal{L}[f(\tau)]$  la transformation de Laplace et  $f(\tau) = \mathcal{L}^{-1}[(Fs)]$  la transformation inverse. L'A. applique  $\mathcal{L}^{-1}$  aux fonctions  $H(s, t)$ , où la variable  $t$  est traitée comme un paramètre:  $W(t, \tau) = \mathcal{L}^{-1}[H(s, t)]$ . Il considère  $H(s, t)$  comme des opérateurs sur les fonctions  $u(t)$ , en posant par définition:  $H(s, t) u(t) = v(t, t)$ , où  $v(t, \tau) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s, t) \mathcal{L}[u(t)]\}$ . Les opérateurs  $H(s, t)$  généralisent des opérateurs de Heaviside  $H(s)$  qui ne dépendent de  $t$  et pour lesquels on peut écrire  $H(s) u(t) =$



$\mathfrak{L}^{-1}\{H(s)\mathfrak{L}[u(t)]\}$ . — Le produit  $H_3(s, t)$  de deux opérateurs  $H_1(s, t)$  et  $H_2(s, t)$  est défini par l'égalité  $H_2(s, t)[H_1(s, t)u(t)] = H_3(s, t)u(t)$ . En introduisant la notation  $H_3 = H_2 * H_1$ , on a évidemment  $H_a * (H_b * H_c) = (H_a * H_b) * H_c$ , mais en général  $H_a * H_b \neq H_b * H_a$ . L'auteur donne quelques indications sur des applications aux équations différentielles et à la statistique. — L'article est écrit d'une manière un peu confuse [par exemple, il n'est pas clair où la transformation de Laplace est à entendre comme bilatérale ou unilatérale; le résultat de l'opération  $\mathfrak{L}^{-1}$  est, dans la formule (2) de l'article, une fonction d'une seule variable et cependant, dans la formule (11), une fonction de deux variables; etc.]. L'A. se borne à des calculs purement formels, sans donner leur justification mathématique.

*Jan G. Mikusiński.*

**Delange, Hubert:** Remarque sur une formule d'inversion de l'intégrale de Laplace-Stieltjes. Bull. Sci. math., II. Sér. 75<sub>1</sub>, 146—152 (1951).

Soit  $\alpha(t)$  une fonction normalisée (c'est-à-dire telle que  $\alpha(0) = 0$  et  $\alpha(t) = \frac{1}{2}[\alpha(t+) + \alpha(t-)]$  pour  $t > 0$ ) et à variation bornée sur tout intervalle fini.

Si l'intégrale  $f(x) = \int_0^\infty e^{-xt} d\alpha(t)$  existe pour  $x > x_0$ , on a, d'après un théorème

connu,  $\alpha(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^{[xt]} (-1)^q \frac{x^q}{q!} f^{(q)}(x)$  pour  $t > 0$ , où  $[xt]$  désigne l'entier de  $xt$ .

— L'A. complète ce théorème, en démontrant que la variation de  $\alpha(t)$  sur  $[0, t]$  est égale à  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sum_{q=0}^{[xt]} \frac{x^q}{q!} |f^{(q)}(x)|$ .

*Jan Mikusiński.*

**Delange, Hubert:** Sur les singularités des intégrales de Laplace. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1413—1414 (1951).

L'A. considera l'integrale di Laplace-Stieltjes  $\int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)$ , del quale suppose finita l'ascissa di convergenza  $\sigma_c$ , e comunica — senza dimostrazione — alcuni teoremi che danno condizioni sufficienti a garantire la singolarità della funzione  $f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} d\alpha(t)$  nel punto  $\sigma_c$  o in almeno un punto di un certo segmento  $(\sigma_c - ik, \sigma_c + ik)$ . — L'A. afferma anche che come corollario si ottiene il seguente risultato sulle serie di potenze: La serie  $\sum a_n z^n$  abbia raggio di convergenza  $R$  finito, e sia  $F(z)$  la sua somma. Sia  $a_n = \varrho_n e^{i\vartheta_n}$ ,  $\varrho_n \geq 0$ ,  $|\vartheta_{n+1} - \vartheta_n| \leq \pi$ . Se  $\lim |\vartheta_{n+1} - \vartheta_n| = \gamma < \pi$ , la  $F(z)$  è singolare in almeno un punto dell'arco di cerchio descritto dal punto  $z = Re^{i\vartheta}$  quando  $\vartheta$  varia in  $(-\gamma, +\gamma)$ .

*A. Zitarosa.*

**Bloch, Pierre Henri:** Über eine Laplace-Transformierte, welche in keiner Halbebene beschränkt ist. Compositio math. 9, 289—292 (1951).

Es wird eine Laplace-Transformierte  $f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt$  konstruiert, die in der ganzen  $s$ -Ebene konvergiert und in keiner irgendwie gelagerten Halbebene beschränkt ist. Bisher wußte man nicht einmal, ob es Laplace-Transformierte gibt, die in keiner rechten Halbebene beschränkt sind.

*Gustav Doetsch.*

**San Juan, Ricardo:** Caractérisations fonctionnelles des transformations de Laplace. Portugaliae Math. 10, 115—120 (1951).

Eine Schar von Operationen  $\mathfrak{L}$  habe folgende Eigenschaften: 1. Sie sind definiert für die Funktionen  $q(t)$ , die aus den Funktionen  $\psi(x) \in L(0, 1)$  so ent-

stehen:  $q(t) = \psi(e^{-t})$ . Mit  $\|q\| = \|\psi\| = \int_0^1 |\psi(x)| dx$  bilden die  $q$  einen normierten Vektorraum  $E$ . Die Werte  $\mathfrak{L}[q]$  sind Funktionen  $f(z)$  einer komplexen Variablen, die in einer Menge  $D$  definiert sind, die jeweils von  $\mathfrak{L}$  abhängen

kann. 2. Für jedes  $z \in D$  ist  $\mathfrak{L}$  ein lineares (distributives und stetiges) Funktional in  $E$ . 3. Es existiert eine in  $L(0, 1)$  vollständige Folge  $\varphi_n(x)$ , die eine Folge  $\Phi_n(t) = e^{-t} \varphi_n(e^{-t})$  ergibt, für welche die Operation  $\mathfrak{L}$  in  $D$  die Eigenschaft hat:

$$(1) \quad \mathfrak{L} \left[ \int_0^t \Phi_n(u) du \right] = \mathfrak{L}[1] \cdot \mathfrak{L}[\Phi_n].$$

4.  $\Re \{1/\mathfrak{L}[1]\} > 1$  in  $D$ . (Im Original irrtümlich  $\Re \mathfrak{L}[1] > 1$ .) Setzt man  $\mathfrak{L}[1] = 1/g(z)$ , so ist  $\mathfrak{L}[\varphi] = \int_0^\infty e^{-t g(z)} \varphi(t) dt$ . [Wenn man in dem Integral für  $\|\varphi\|$  die Substitution  $x = e^{-t}$  vornimmt, die im Obigen offenbar wegen der begrenzten Gültigkeit der Substitutionsregel für Lebesguesche Integrale unterlassen ist, so bedeutet das Resultat, daß sich die Laplace-Transformation im Raume der  $\varphi(t)$  mit konvergentem  $\int_0^\infty e^{-t} |\varphi(t)| dt$  durch ihr Integrationsgesetz (1) charakterisieren läßt.] Der Beweis beruht auf dem Satz von Steinhaus über die Darstellbarkeit eines in  $L(0, 1)$  stetigen Funktional durch ein Lebesguesches Integral.

Gustav Doetsch.

**Berkeš, Branko:** Die Elektronenballistik im Lichte der Laplace-Transformation. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 6, 217–221 und deutsche Zusammenfassg. 222 (1951) [Kroatisch].

### Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

**Ficken, F. A.:** A continuation method for functional equations. Commun. pure appl. Math. 4, 435–456 (1951).

$x \rightarrow T(x)$  sei eine Abbildung eines Banach-Raumes in sich. Es sei möglich, eine Schar von Transformationen  $T(s, x)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , anzugeben mit  $T(1, x) = T(x)$  und  $T(0, x) = T^*(x)$ , wo  $T^*(x) \neq 0$  genau eine Lösung  $x(0) = x^*$  mit  $\|x^*\| \leq M$  haben möge; ferner gebe es zu jedem  $s_0$  und jedem  $x_0$  mit  $T(s_0, x_0) = 0$  eine Lösung  $x = x(s)$  von  $T(s, x) = 0$ , welche für alle hinreichend nahe bei  $s_0$  gelegenen  $s$  stetig ist. Von 0,  $x^*$  ausgehend gewinnt man eine Lösung  $x(s)$  für  $0 \leq s \leq \sigma_0$ , von  $\sigma_0, x(\sigma_0)$  aus eine Lösung für das Intervall  $\sigma_0 \leq s \leq \sigma_0 + \sigma_1$ , usw. Kann man auf diese Weise das Intervall  $0 \leq s \leq 1$  erfassen, so heißt die Lösung  $x(1)$  der Gleichung  $T(1, x) = T(x) = 0$  mittels der Kontinuitätsmethode gewonnen. Verf. gibt hinreichende Bedingungen für die Existenz, Stetigkeit und Eindeutigkeit in  $\|x\| \leq M$  einer Lösung  $x(s)$  von  $T(s, x) = 0$  für  $0 \leq s \leq 1$ , wobei die Kontinuitätsmethode mit endlich vielen Schritten zum Ziele führt. Eine eingehende Behandlung erfährt in diesem Zusammenhang der Fall, daß  $T$  nach  $x$  gleichmäßig differenzierbar ist, d. h.  $T(s, x + u) - T(s, x) = L(s, x, u) + \|u\| R(s, x, u)$  gilt, wo  $L$  das in  $u$  lineare, in  $x$  und  $s$  stetige, mit beschränkter Umkehrung versehene Differential von  $T$  bezeichnet und  $R$  mit  $u$  gleichmäßig gegen Null geht. Bedeutet  $X_M$  die Gesamtheit aller  $x$  mit  $\|x\| \leq M$  und  $T(s, x) = 0$  mit einem  $s$  aus  $0 \leq s \leq 1$ , so ermöglicht die Hinzunahme der globalen Bedingung „Es gibt ein  $M' < M$ , so daß  $X_M$  bereits in  $\|x\| \leq M'$  enthalten ist“ die Angabe einer positiven unteren Schranke für die Schrittweiten  $\sigma_i$ . Für die Kompaktheit von  $X_M$ , welche gewisse Vereinfachungen bedeutet, ist die Kompaktheit der Transformation  $x \rightarrow x - T(s, x)$  hinreichend; Verf. gibt dafür noch andersartige hinreichende Bedingungen an. — Die Arbeit schließt an die Behandlung der Kontinuitätsmethode nach K. O. Friedrichs (Functional Analysis, Inst. Math. Mech., New York Univ. 1950) an. Georg Aumann.

**Duff, G. F. D.:** A development in the theory of the  $F$ -equation. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 146–154 (1951).

Verf. zeigt über die Lösungen der Funktionalgleichung:  $\frac{d}{dz} F(z, \alpha) = F(z, \alpha + 1)$  folgendes: Es gibt im allgemeinen unendlich viele Lösungen  $F(z, \alpha)$  mit  $F(0, \alpha) = \varphi(\alpha)$  für alle  $\alpha$  in einer linken Halbebene  $\Re \alpha < \alpha_0$ . Es wird weiter speziell angenommen, daß  $\varphi(\alpha)$  in  $\Re \alpha < \alpha_0$  durch eine dort konvergente Dirichletsche Reihe dargestellt wird, in  $\Re \alpha \geq \alpha_0$  nur endlich viele isolierte Singularitäten hat und gewissen Ordnungsbeschränkungen unterliegt. In diesem Fall werden zwei spezielle Lösungen, die beide der obigen Nebenbedingung genügen, miteinander in Beziehung gebracht. Es zeigt sich, daß man ihre Differenz aus der Kenntnis der Singularitäten von  $\varphi(\alpha)$



berechnen kann. Es werden noch einige Beispiele betrachtet, z. B.  $\varphi(\alpha) = \zeta(-\alpha)$ ,  $\varphi(\alpha) = \zeta^2(-\frac{1}{2}\alpha)$ . Manche Überlegungen sind nicht in allen Details ausgeführt.

Karl Prachar.

Sim, A. C.: A generalization of reversion formulae with their application to non-linear differential equations. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 228–238 (1951).

Der Prozeß der Umkehrung einer Potenzreihe  $\lambda = \sum_{r=1}^{\infty} a_r y^r$  zu  $y = \sum_{r=1}^{\infty} A_r \lambda^r$  wird verallgemeinert. Gegeben sei die Beziehung (1)  $\sum_{r=0}^{\infty} a_r y^{1+(n+r)\alpha} = \lambda \Phi(x)$ , in der  $\alpha$  (reell),  $n$  (ganz rational),  $\lambda$  konstant sind und die Koeffizienten  $a_r$  von  $x$  und irgendwelchen Operatoren (z. B.  $D = d/dx$ ) abhängen. (1) soll nun aufgelöst werden nach  $y$ ; (2)  $y^{1+n\alpha} = \lambda \sum_{r=0}^{\infty} A_r \lambda^{mr}$  mit  $m = \alpha/(1+n\alpha)$ . Einsetzen von (2) in (1) liefert (3)  $a_0 A_0 = \Phi(x)$ ,  $a_0 A_1 = -a_1 A_0^{1+m}$ , ...;  $a_0 A_r$  läßt sich allgemein angeben. Vereinfachte Formeln erhält man, wenn sich die  $a_r$  kommutativ multiplizieren. Eingehender wird noch der Fall untersucht, daß  $a_0$  ein Polynom in  $D$  mit konstanten Koeffizienten ist. Die Art, wie Verf. die erhaltenen Formeln anwendet, ersieht man am besten an den Beispielen, von denen hier zwei wiedergegeben seien. 1. Die Funktionalgleichung  $f(x+1) = e^{f(x)}$  mit  $f(0) = 0$  ist aufzulösen. Mit  $f(x) = y$ , also  $f(x+1) = e^y$  nimmt sie die Form  $(e^y - 1)y - y^2/2! - y^3/3! - \dots = 1$  an; (2) wird  $y = \sum_{r=0}^{\infty} A_r$ . Aus (3) folgt  $A_0 = (e^y - 1)^{-1} \cdot 1, \dots$ . Wird  $(e^y - 1)^{-1}$  mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen dargestellt:  $(e^y - 1)^{-1} = D^{-1}(1 - D/2 + D^2/12 + \dots)$ , so erhält man  $A_0 = x + a$ , wobei wegen der Anfangsbedingung  $a = 0$  gesetzt wird,  $A_1 = x(1-x)(1-2x)/12, \dots$ . 2. Mit  $a_0 = D^2$ ,  $a_1 = -x^{1/2}$ ,  $a_2 = \dots = 0$ ,  $\alpha = 1/2$ ,  $n = 0$ ,  $\lambda = 1$ ,  $\Phi(x) = 0$  geht (1) in die Thomas-Fermische Differentialgleichung  $y''(x) = y^{3/2}/\sqrt{x}$  (wegen Literatur darüber vgl. Avakumović, dies. Zbl. 33, 273) der Atomtheorie über, die mit den Randbedingungen  $y(0) = 1$ ,  $y(\infty) = 0$  zu lösen ist. Von dem aus  $A_0 = 1 + ax$  folgenden Ausdruck für  $A_1$  werden zur Bestimmung von  $A_2$  die ersten Glieder der Entwicklung nach Potenzen von  $\sqrt{x}$  genommen, usw. Auf diese Weise erhält Verf. eine von E. B. Baker [Phys. Review, II. Ser. 36, 630–647 (1930)] angegebene Entwicklung von  $y(x)$  nach Potenzen von  $\sqrt{x}$ .

Werner Meyer-König.

• Lévy, Paul: Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle. — Seconde éd. des Leçons d'analyse fonctionnelle. — Avec un complément par F. Pellegrino. Paris: Gauthier-Villars 1951. XIV, 484 p. 4000 fr. (\$ 11.75.)

Il volume è costituito di quattro parti, l'ultima delle quali, dovuta a F. Pellegrino, è del tutto nuova. La Parte I contiene le generalità sul calcolo funzionale: spazi funzionali; funzionali lineari e variazione prima; funzionali interi di secondo grado e variazione seconda; funzionali di grado qualunque. Questa parte si presenta più breve che nella prima edizione, perchè sono state omesse quelle parti relative alla teoria delle funzioni di variabile reale e alle equazioni integrali che sono, oggi, ben note. — Alle equazioni a derivate funzionali del primo ordine è dedicata la Parte II, il cui contenuto è quasi identico a quello che figurava nella prima edizione. Nel Cap. V, che è rivolto al Calcolo delle variazioni, è trattato il problema del minimo dell'area di una superficie limitata da un dato contorno, e ciò costituisce una novità della presente edizione. — Nella Parte III che ha come obbiettivo la trattazione dell'equazione di Laplace nello spazio Hilbertiano  $\Omega$  e in quello  $L_2$  delle funzioni a quadrato integrabile, è premesso lo studio della sfera nello spazio a  $n$  dimensioni, e i concetti di valor medio e di misura dei volumi e delle superfici negli spazi  $\Omega$  e  $L_2$ . Mentre l'oggetto di questa Parte III è quello stesso della prima edizione, lo sviluppo della materia, specialmente nei Capp. IV e V, è notevolmente modificato e perfezionato. — La maggior novità della nuova edizione è costituita dalla Parte IV, nella quale F. Pellegrino ha dato una chiarissima e sintetica esposizione della teoria dei funzionali analitici di L. Fantappiè. I primi due capitoli sono dedicati rispettivamente al campo di definizione dei funzionali analitici (il quale è costituito dalle funzioni localmente analitiche e biregolari) e alla definizione e continuità dei funzionali analitici. I funzionali analitici lineari formano oggetto dei Capp. III e IV. Per i funzionali  $F[y(t)]$  dipendenti da funzioni di una sola variabile vengono dati i concetti di indicatrice antisimmetrica (già nota sotto il nome di emisimmetrica)  $u(\alpha)$  e di indicatrice simmetrica  $w(\alpha)$ , che conducono alle formule fondamentali di Fantappiè

$$(1) \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_c u(t) y(t) dt, \quad F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{1}{t} w\left(\frac{1}{t}\right) dt,$$

le quali sono stabilite mediante una permutazione tra il segno di integrale e il simbolo di funzionale lineare; il secondo membro della prima delle (1) può essere rappresentato con la notazione

$u(t)y(t)$ , chiamata prodotto funzionale antisimmetrico, perchè gode della proprietà  $u(t)y(t) = -u(t)y(t)$ . Il Cap. III termina con un cenno sui funzionali lineari dipendenti da funzioni di più variabili, per lo studio dei quali viene introdotto il concetto di indicatrice proiettiva. Nel Cap. IV, che si occupa dei funzionali misti, vengono studiati gli operatori del ciclo chiuso e gli operatori normali. Tra le applicazioni dei funzionali analitici lineari (le quali formano oggetto del Cap. V) rileviamo cinque metodi per l'integrazione in termini finiti (cioè a dire con un numero finito di simboli di funzioni, di integrazioni e di derivazioni) delle equazioni a derivate parziali, e la determinazione in termini finiti (ottenuta da M. Carafa) del nucleo risolvente di una classe di equazioni funzionali lineari. Lo studio dei funzionali analitici non lineari (ai quali è dedicato il Cap. VI) si inizia con la serie di Fantappiè

$$F[y(t) + \varphi(t)] = F[y(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} F^{(n)}[y(t); \alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*] \varphi(\alpha_1^*) \dots \varphi(\alpha_n^*),$$

sulla quale è basata una classificazione dei funzionali non lineari. Vengono studiate alcune classi speciali di funzionali, rilevando che per ogni funzionale analitico trascendente intero sussiste la proprietà (estensione del ben noto teorema di Liouville) che, se è limitato in tutta la sua regione di esistenza, risulta costante. La Parte IV è fornita di un ampio elenco bibliografico dei lavori, di Fantappiè e di altri autori, che trattano dei funzionali analitici.

*Silvio Cinquini.*

**Vaccaro, Michelangelo:** Sui funzionali analitici lineari definiti per le funzioni analitiche uniformi sopra una curva algebrica. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 39—56 (1951).

In questo lavoro, che si collega alla teoria dei funzionali analitici (secondo Fantappiè), l'A. fa uso della teoria degli integrali abeliani e delle forme differenziali sopra una curva algebrica, e introduce alcune varianti nella citata teoria generale di Fantappiè. Tra l'altro viene data una diretta dimostrazione della formula

$$F\left[\int_{\lambda} y(t, \alpha) d\alpha\right] = \int_{\lambda} F_t[y(t, \alpha)] d\alpha, \text{ che esprime la permutabilità del simbolo}$$

di funzionale lineare con l'integrazione definita rispetto a un parametro. Usufruendo di questo risultato e mediante la considerazione del funzionale misto „identità“ definito dalla formula  $J[y(x), t] = y(t)$ , l'A. ritrova la formula fondamentale di

$$\text{Fantappiè } F[y(t)] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C y(\alpha) F_t[v(t, \alpha) d\alpha], \text{ ove la indicatrice di } F \text{ è la forma}$$

differenziale  $u(\alpha) d\alpha = F_t[v(t, \alpha) d\alpha]$ , corrispondente all'indicatrice  $v(t, \alpha)$  dell'identità, la cui esistenza, dapprima supposta, viene successivamente dimostrata.

*Silvio Cinquini.*

**James, Robert C.:** Linear functionals as differentials of a norm. Math. Mag. 24, 237—244 (1951).

Cet exposé donne une vue d'ensemble des résultats relatifs à la représentation des formes linéaires continues dans des espaces de Banach dont la norme est différentiable. Comme application, on en déduit, pour l'espace de Hilbert, le théorème classique sur la représentation de toute forme linéaire continue par un produit scalaire. — L'exposé contient toutes les définitions préliminaires nécessaires et est complété par des indications biographiques précises.

*A. Pereira Gomes.*

**Köthe, Gottfried:** Die verschiedenen Reziproken einer unendlichen Matrix. Monatsh. Math. 55, 153—156 (1951).

Soient  $\lambda$  et  $\mu$  des espaces de coordonnées parfaits,  $\Sigma(\lambda)$  et  $\Sigma(\mu)$  les anneaux des matrices qui représentent les applications linéaires continues de  $\lambda$  dans  $\lambda$  et de  $\mu$  dans  $\mu$  respectivement (G. Köthe u. O. Toeplitz, ce Zbl. 9, 257); soit  $\mathfrak{A}$  une matrice appartenant à  $\Sigma(\lambda)$  et à  $\Sigma(\mu)$  et qui possède des inverses bilatères,  $\mathfrak{B}$  dans  $\Sigma(\lambda)$  et  $\mathfrak{C}$  dans  $\Sigma(\mu)$ . L'A. démontre le théorème: pour que  $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$  il faut et il suffit que l'image  $\mathfrak{A}(\lambda \cap \mu)$  de l'intersection  $\lambda \cap \mu$  soit faiblement dense dans  $\lambda \cap \mu$ ; si cette condition est remplie, la matrice  $\mathfrak{A}$  appartient à  $\Sigma(\lambda \cup \mu)$  et à  $\Sigma((\lambda \cup \mu)^{**})$  et possède le même inverse bilatère en chacun de ces anneaux ( $\chi^*$  représentant le dual de  $\chi$ ,  $\chi^{**} = (\chi^*)^*$ ).

*A. Pereira Gomes.*



**Magnus, Wilhelm:** Über einige beschränkte Matrizen. Arch. der Math. 2, 405—412 (1951).

Es werden folgende unendliche Matrizen ( $m, n$  Zeilen- bzw. Spaltenindex) betrachtet:

$$H(\theta) = \left( \frac{1}{n+m+\theta} \right), A(\theta) = \frac{\sin \pi \theta}{\pi} \left( \frac{1}{-n+m+\theta} \right), D(\theta) = \left( \frac{\Gamma(1+n+\theta)}{n!} \delta_{n,m} \right), \\ S(\theta) = A(\theta) D(\theta), U(\theta) = D(\theta) H(1) D(-\theta) D(-\theta) H(1) D(\theta),$$

und eine Reihe formaler Beziehungen zwischen ihnen abgeleitet. Aus ihnen folgt z. B., daß für  $\frac{1}{2} < \theta < 1$  die Produkte  $S(\theta) S(\theta) = S(2\theta)$  und  $S(\theta) [S(\theta) S(\theta)] = S(3\theta)$  formal gebildet werden können, jedoch nicht  $[S(\theta) S(\theta)] S(\theta)$ . Für die zu  $H(\theta)$  gehörige

Bilinearform  $\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n x_m}{n+m+\theta}$  wird die genaue Schranke  $M(\theta)$  berechnet, es ist

$M(\theta) = \pi$  für  $\theta \geq \frac{1}{2}$ ,  $M(\theta) = \pi/|\sin \pi \theta|$  für  $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$ . Die Matrix  $U(\theta)$  ist für  $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$  beschränkt, für  $\frac{1}{2} < \theta < 1$  nicht. Die beschränkte Matrix  $E - \pi^2 (\sin \pi \theta)^2 [H(1+\theta)]^2$  besitzt für  $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$  die beschränkte Reziproke  $E + \left( \frac{\sin \pi \theta}{\pi} \right)^2 U(\theta) = V(\theta)$ , die für  $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$  mit der beschränkten

Matrix  $B(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{\sin \pi \theta}{\pi} H(1+\theta) \right]^{2n}$  identisch ist. Für  $\frac{1}{2} < \theta < 1$  ist  $B(\theta)$

ebenfalls beschränkte Reziproke, dagegen  $V(\theta)$  eine nichtbeschränkte Reziproke.  $A(\theta)$  besitzt für  $-\frac{1}{2} < \theta < \frac{1}{2}$  eine beschränkte Inverse. Die eindeutig bestimmte Lösung  $x$  der Gleichung  $A(\theta) x = y$ ,  $y$  im Hilbertschen Raum, wird durch  $x_n = \frac{\Gamma(1+n+\theta) \sin \pi \theta}{n} \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y_m}{n-m+\theta} \frac{\Gamma(1+m-\theta)}{n!}$  gegeben. Gottfried Köthe.

**Mitchell, Josephine:** An example of a complete orthonormal system and the kernel function in the geometry of matrices. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 155—163 (1951).

Let  $Z = (z_{ij})$  be a two rowed matrix,  $\bar{Z}'$  its conjugate transposed matrix. Let  $\mathfrak{R}$  be the domain formed by the matrices  $Z$  such that  $I - Z\bar{Z}'$  is a positive definite Hermitian matrix. The author found explicitly a complete orthonormal system of functions for the class of functions  $f(Z)$  satisfying  $\int_{\mathfrak{R}} |f(Z)|^2 \bar{Z} < \infty$ , where

$z_{ij} = x_{ij} + i y_{ij}$  and  $\bar{Z} = \Pi dx_{ij} dy_{ij}$ . Some partial results are also obtained for the general case where  $Z$  is an  $m \times n$  matrix. Loo-Keng Hua.

**Mitchell, Josephine:** A theorem in the geometry of matrices. Proc. Amer. math. Soc. 2, 276—278 (1951).

Let  $Z = (z_{ij})$  ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ ) and  $\bar{Z}'$  denote its conjugate transposed matrix. Evidently,  $I - Z\bar{Z}'$  is an  $n$  rowed Hermitian matrix. Let  $S$  denote the space of matrices  $Z$  such that  $I - Z\bar{Z}'$  is positive definite. Hua proved that the space admits an invariant positive definite differential quadratic form  $Q = \sigma((I - Z\bar{Z}')^{-1} dZ(I - Z'\bar{Z})^{-1} d\bar{Z}')$ , where  $\sigma(X)$  is the trace of the matrix  $X$  and  $dX$  its differential. The author proved that

$$Q = \sum_{i,p=1}^m \sum_{j,q=1}^n \frac{\partial^2 \log [\det (I - Z\bar{Z}')^{-1}]}{\partial z_{ij} \partial \bar{z}_{pq}} dz_{ij} d\bar{z}_{pq}$$

which establishes a correspondence between a result due to Hua [Amer. J. Math. 66, 470—488 (1944)] and one due to Bergmann [Sur les fonctions orthogonales . . . , New York 1941]. Loo-Keng Hua.

● **Hamburger, H. L. and M. E. Grimshaw:** Linear transformations in  $n$ -dimensional vector space. An introduction to the theory of Hilbert space. Cambridge University Press 1951. X, 196 p.

L'idée que l'espace de Hilbert est une généralisation de l'espace euclidien à  $n$  dimensions s'impose immédiatement à l'étudiant qui en aborde la théorie; mais les méthodes utilisées par ses professeurs pour l'étude de ces divers espaces sont quelquefois si différentes qu'il en arrive à douter de la réalité du lien qu'il a cru apercevoir. Il n'en sera rien pour le lecteur du livre des AA. Leur propos est en effet d'appliquer à l'espace euclidien complexe à  $n$  dimensions les méthodes qui ont montré leur puissance dans l'étude de l'espace de Hilbert: ils obtiennent de la sorte un exposé remarquablement clair, où l'intuition géométrique peut interpréter aisément tous les résultats. Sans doute, sont-ils amenés ainsi à définir dès le début un produit scalaire, c'est-à-dire à opérer dans un espace métrique. Le point de vue de l'espace affine ne peut être étendu à l'espace de Hilbert (d'où les différences d'exposition signalées plus haut) et ne pouvait être adopté par les AA. dont le dessein nettement proclamé était de fournir une „Introduction à la théorie de l'espace de Hilbert“. Soulignant constamment ce qui demeure valable ou non lorsqu'on passe à l'espace de Hilbert, et montrant soigneusement le sens des méthodes utilisées dont l'aspect technique est simplifié par le choix de l'espace euclidien, ils ont parfaitement atteint leur but. — Le livre comprend 5 chapitres: I. Variétés linéaires et transformations linéaires en  $\mathfrak{B}_n$  (espace euclidien complexe à  $n$  dimensions). Ce chapitre donne les définitions essentielles et la théorie des équations linéaires. II. Transformations linéaires spéciales en  $\mathfrak{B}_n$ . C'est-à-dire: transformations hermitiennes, normales, unitaires et projecteurs. III. Représentation spectrale des transformations hermitiennes en  $\mathfrak{B}_n$ . Songeant à l'application ultérieure à l'espace de Hilbert, les AA. font de la question une étude analytique (valeurs propres comme extrema de la forme hermitienne). IV. Propriétés spectrales des transformations linéaires en  $\mathfrak{B}_n$ . Retour aux méthodes algébriques pour obtenir la forme canonique de Jordan. V. Espaces vectoriels avec une métrique hermitienne positive. Ce chapitre se termine par une application intéressante à la théorie des petites oscillations en Mécanique analytique.

André Revuz.

**Zimmerberg, H. J.:** On normalizable transformations in Hilbert space. Acta math. 86, 85—88 (1951).

A. C. Zaanen (dies. Zbl. 36, 360) hat die Theorie der normalen Transformationen im Hilbertschen Raum auf normalisierbare Transformationen ausgedehnt. Indem der Verf. voraussetzt, daß die normalisierbare Transformation vollstetig ist und ihre Adjungierte definiert werden kann, erhält er eine Erweiterung der Sätze 10 und 12 von Zaanen, die er wie dieser auf Integralgleichungssysteme der Gestalt

$$\lambda \psi_i(x) = \sum_{j=1}^n \int_A K_{ij}(x, y) \psi_j(y) dy \quad (i = 1, \dots, n)$$

anwendet, um die Existenz eines reellen charakteristischen Wertes  $\neq 0$  nachzuweisen.

Gustav Doetsch.

**Gelbaum, B.:** A nonabsolute basis for Hilbert space. Proc. Amer. math. Soc. 2, 720—721 (1951).

L'A. montre que, dans l'espace  $L^2(-\pi, +\pi)$ , un certain système biorthogonal construit par Al'tman (ce Zbl. 39, 334) n'est pas une base absolue.

Jacques Dixmier.

**Heinz, Erhard:** Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. 123, 415—438 (1951).

§ 1 enthält den Beweis einiger tieferliegenden Ungleichungen: Sind  $A \geq 0$  in  $\mathfrak{D}_A$  und  $B \geq 0$  in  $\mathfrak{D}_B$  selbstadjungiert und ist  $Q$  ein in  $\mathfrak{D}_Q \supseteq \mathfrak{D}_B$  linearer Operator mit  $\mathfrak{D}_{Q^*} \supseteq \mathfrak{D}_A$ , so folgt aus  $\|Qf\| \leq \|Bf\|$  für alle  $f \in \mathfrak{D}_B$  und  $\|Q^*f\| \leq \|Af\|$  für alle  $f \in \mathfrak{D}_A$  die Ungleichung  $|(Qf, g)| \leq (1 + |2\nu - 1|) \|B^\nu f\| \|A^{1-\nu}g\|$  für  $f \in \mathfrak{D}_B, g \in \mathfrak{D}_A$  und  $0 \leq \nu \leq 1$ . Eine Verschärfung: Ist  $A \geq 0$  in  $\mathfrak{D}_A$  selbstadjungiert,  $Q$  in  $\mathfrak{D}_A$  hermitesch und gilt  $\|Qx\| \leq \|Ax\|$  für alle  $x \in \mathfrak{D}_A$ , so gilt  $|(Qx, y)| \leq \|A^\nu x\| \|A^{1-\nu}y\|$  für alle  $x, y \in \mathfrak{D}_A$  und  $0 \leq \nu \leq 1$ . Löwnersche Resultate für endliche hermitesche Matrizen werden auf selbstadjungierte  $A, B$  übertragen: Ist  $f(z)$  regulär in der längs der negativen reellen Achse aufgeschnittenen Ebene, Im  $f(z) \geq 0$  für Im  $z > 0$ ,  $f(\lambda) \geq 0$  und stetig für  $0 \leq \lambda < \infty$ , so folgt aus  $0 \leq A \leq B$  stets  $0 \leq f(A) \leq f(B)$ ; die Beziehung  $A \leq B$  für nichtnegative selbstadjungierte Operatoren ist dabei nach F. Rellich durch  $\|A^{1/2}x\| \leq \|B^{1/2}x\|$  für alle  $x \in \mathfrak{D}_{B^{1/2}}$  erklärt, wenn  $\mathfrak{D}_{B^{1/2}} \subseteq \mathfrak{D}_{A^{1/2}}$  für die positiven Quadratwurzeln  $A^{1/2}$  und  $B^{1/2}$  gilt. Als Anwendung wird gezeigt, daß die Gleichung  $AS + SB - Q$  genau eine be-



schränkte Lösung  $S$  hat, wenn  $A$ ,  $B$ ,  $Q$  beschränkt sind,  $\frac{1}{2}(A + A^*) \geq a$ ,  $\frac{1}{2}(B + B^*) \geq b$ ,  $a + b > 0$  gilt; es ist  $S = \int_0^\infty e^{-A t} Q e^{-B t} dt$ ,  $\|S\| \leq (a + b)^{-1} \|Q\|$ .

— § 2 bringt Anwendungen auf die Störungstheorie: Es sei  $A_0$  in  $\mathfrak{D}_{A_0}$  selbstadjungiert, das Spektrum von  $A_0$  in  $\lambda_0 - d < \lambda < \lambda_0 + d$  leer; die  $A_i$ ,  $i \geq 1$ , seien in  $\mathfrak{D}_{A_0}$  hermitesch und es gelte dort  $\|A_n x\| \leq a k^n (\|A_0 x\| + \|x\|)$ . Dann ist  $A(\varepsilon) = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots$  für  $|\varepsilon| < k^{-1}(a + 1)^{-1}$  in  $\mathfrak{D}_A$  selbstadjungiert. Für die Spektralschal  $E_\lambda(\varepsilon)$  zu  $A(\varepsilon)$  gilt dann die Entwicklung  $E_{\lambda_0}(\varepsilon) = E_{\lambda_0} + \varepsilon E_{\lambda_0}^{(1)} + \varepsilon^2 E_{\lambda_0}^{(2)} + \dots$ , falls  $|\varepsilon| < k^{-1}(1 + a\alpha)^{-1}$  ist,  $\alpha = 1 + d^{-1}(1 + |\lambda_0|)$ ; dabei ist  $\|E_{\lambda_0}^{(n)}\| \leq \frac{1}{2} a \alpha (a \alpha + 1)^{n-1} k^n$ . Eine entsprechende reguläre Entwicklung um  $\varepsilon = 0$  gilt für die Potenzen  $A(\varepsilon)^e = \int_0^\infty \lambda^e dE_\lambda(\varepsilon)$  und  $|A(\varepsilon)|$ , falls

$A_0 \geq d > 0$  und  $-1 < \varrho < 1$  ist. — § 3 enthält einen neuen Beweis des Satzes von Rellich:  $A^{(n)}$ ,  $A$  seien selbstadjungiert,  $\mathfrak{D}$  ein linearer Teilraum, in dem die  $A^{(n)}$  definiert sind und  $A$  wesentlich selbstadjungiert ist; gilt in  $\lim_{n \rightarrow \infty} A^{(n)} f = A f$ ,

so folgt  $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{\lambda^*}^{(n)} f = E_{\lambda^*} f$  in einem  $\lambda^*$ , das kein Punkteigenwert ist. Ferner wird bewiesen: Ist die Konvergenz der  $A^{(n)}$  überdies gleichmäßig, d. h. gilt in  $\mathfrak{D} \|(A^{(n)} - A) f\| \leq \varepsilon_n (\|f\| + \|A f\|)$  mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ , so gilt sogar  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_{\lambda^*}^{(n)} - E_{\lambda^*}\| = 0$  und es ist  $\|E_{\lambda^*}^{(n)} - E_{\lambda^*}\|$  von derselben Größenordnung wie  $\varepsilon_n$ , wenn ein geeignetes Intervall  $\lambda^* - d < \lambda < \lambda^* + d$  keinen Wert des Spektrums enthält.

Gottfried Köthe.

Dixmier, J.: Sur la réduction des anneaux d'opérateurs. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 185—202 (1951).

Im Anschluß an eine frühere Arbeit (dies. Zbl. 36, 358) wird für beliebige Operatorringe  $\mathbf{M}$  eines nicht als separabel vorausgesetzten Hilbertschen Raumes  $H$  eine Zerlegung in einfachere Ringe abgeleitet, die im separablen Fall durch Zusammenfassung von Faktoren gleicher Klasse aus der von Neumannschen verallgemeinerten Summendarstellung (dies. Zbl. 34, 61) entsteht, hier jedoch ohne maßtheoretische Hilfsmittel abgeleitet wird.  $\tilde{\mathbf{M}}$  bedeute die Menge aller (linearen abgeschlossenen) Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M}$  von  $H$ , deren Projektion  $P_{\mathfrak{M}}$  im  $\mathbf{M}$  liegt,  $\mathbf{M}^{\mathfrak{h}}$  das Zentrum  $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$  von  $\mathbf{M}$ . Ist  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$ , so sei  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{h}}$  die von allen zu  $\mathfrak{M}$  äquivalenten Mannigfaltigkeiten aufgespannte Mannigfaltigkeit ( $\mathfrak{M}_1$  heißt äquivalent  $\mathfrak{M}_2$ ,  $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_2$ , wenn es eine partielle Isometrie  $W$  in  $\mathbf{M}$  gibt mit  $W^* W = P_{\mathfrak{M}_1}$ ,  $W W^* = P_{\mathfrak{M}_2}$ ). Es ist  $\mathfrak{M}^{\mathfrak{h}}$  in  $\mathbf{M}^{\mathfrak{h}}$ .  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$  heißt endlich, wenn jedes  $\mathfrak{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$  mit  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$ , gleich  $\mathfrak{M}$  ist, andernfalls unendlich.  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$  heißt eigentlich unendlich, wenn  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$  unendlich ist für jedes  $\mathfrak{N} \in \tilde{\mathbf{M}}^{\mathfrak{h}}$  mit  $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \neq 0$ ;  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$  heißt rein unendlich, wenn  $\mathfrak{M} \neq 0$  keinen endlichen Teilraum  $\mathfrak{N} \in \tilde{\mathbf{M}}$  umfaßt. Ist  $\mathfrak{M}$  eigentlich unendlich, so gibt es zu jedem  $n > 0$  eine homogene Partition der Ordnung  $n$  von  $\mathfrak{M}$ , d. h. eine Zerlegung von  $\mathfrak{M}$  in  $n$  paarweise orthogonale  $\mathfrak{M}^i \in \tilde{\mathbf{M}}$  mit  $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}^1 \sim \dots \sim \mathfrak{M}^n$ . Die rein unendlichen Mannigfaltigkeiten  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$  spannen eine Mannigfaltigkeit  $H^{p^i} \in \tilde{\mathbf{M}}^{\mathfrak{h}}$  auf, die selbst rein unendlich ist, ebenso spannen die endlichen  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}^{\mathfrak{h}}$  eine endliche Mannigfaltigkeit  $H' \in \tilde{\mathbf{M}}^{\mathfrak{h}}$  auf.  $H$  zerfällt in drei paarweise orthogonale Teilräume  $H^{p^i}$ ,  $H'$ ,  $H^i$ ;  $\mathbf{M}$  erzeugt in  $H^{p^i}$  einen Operatorring  $\mathbf{M}_1$  von rein unendlicher Klasse, d. h.  $H^{p^i}$  ist bezüglich  $\mathbf{M}_1$  rein unendlich, jedes  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}_1$  ist rein unendlich; in  $H'$  erzeugt  $\mathbf{M}$  einen Ring  $\mathbf{M}_2$  endlicher Klasse, d. h. jedes  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}_1$  ist endlich; in  $H^i$  entsteht ein Ring  $\mathbf{M}_3$ , in dem kein  $\mathfrak{M}$  rein unendlich ist und kein  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}_3^{\mathfrak{h}}$  endlich ist. — Ein  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}$  heißt irreduzibel, wenn keine homogene Partition der Ordnung 2 eines  $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$  existiert, ein  $\mathfrak{M} \in \tilde{\mathbf{M}}^{\mathfrak{h}}$  heißt homogen, wenn es eine homogene Partition in irreduzible  $\mathfrak{M}_i \in \tilde{\mathbf{M}}$  besitzt. Alle diese Partitionen eines homogenen  $\mathfrak{M}$  bestehen aus gleichvielen  $\mathfrak{M}_i$ , ihre Mächtigkeit heißt der Grad von  $\mathfrak{M}$ . Ist nun  $\mathbf{M}$  gegeben und durchläuft  $\alpha$  alle Kardinalzahlen, die höchstens gleich der Dimension von  $H$  sind, so gibt es eine Familie  $(H^\alpha)$  paarweise orthogonaler Mannig-

faltigkeiten  $H^\alpha \in \tilde{M}^H$ , jedes  $H^\alpha$  ist entweder 0 oder homogen vom Grad  $\alpha$  und enthält alle anderen homogenen Mannigfaltigkeiten vom Grad  $\alpha$ ,  $H^0 = H - \left( \bigoplus_{\alpha} H^\alpha \right)$  enthält keine irreduzible Mannig-

faltigkeit,  $H^\alpha \subset H^\beta$  für endliches  $\alpha$ ,  $H^\alpha \subset H^\beta$  für unendliches  $\alpha$ . Auf jedem  $H^\alpha$  induziert  $M$  einen Ring  $M^\alpha$  folgender Struktur:  $U_{ij}$  seien partielle Isometrien, die  $\mathfrak{M}_i$  in  $\mathfrak{M}_j$  überführen,  $\mathfrak{M}_i$  durchläuft die irreduziblen Mannigfaltigkeiten einer homogenen Partition von  $M^\alpha$ ; der durch  $M^\alpha$  auf einem  $\mathfrak{M}_i$  induzierte Ring  $N^\alpha$  ist abelsch, und ein beschränkter Operator  $A$  ist dann und nur dann in  $M^\alpha$ , wenn die  $U_{i0} A U_{i0}$  als Operatoren auf  $\mathfrak{M}_i$  in  $N^\alpha$  liegen. Im letzten Abschnitt werden die Beziehungen zur von Neumannschen Theorie betrachtet,  $H$  ist jetzt separabel.

$M^H$  wird durch eine Zerlegung  $E(\lambda)$  der Identität erzeugt, mit einer dazu äquivalenten  $N$ -Funktion  $\sigma(\lambda)$  wird  $H$  als verallgemeinerte direkte Summe von Räumen  $H(\lambda)$  dargestellt, die dazugehörige Zerlegung von  $M$  in Faktoren sei  $\Sigma M(\lambda)$ . Die Zerlegung  $E(\lambda)$  kann dann so gewählt werden, daß  $E(-3) - E(-4) = P_{H^H}$  ist,  $E(-2) - E(-3) = P_{H^0 \cap H^1}$ ,  $E(-1) - E(-2) = P_{H^0 \cap H^2}$ ,  $E(0) - E(-1) = P_{H^\infty}$ ,  $E(n) - E(n-1) = P_{H^n}$  für  $n = 1, 2, \dots$ . Für die zugehörigen  $M(\lambda)$  gilt dann, daß  $M(\lambda)$  zur Klasse  $I_n$  gehört für  $n-1 \leq \lambda \leq n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), zu  $I_\infty$  für  $-1 < \lambda \leq 0$ , zu  $II_1$  für  $-2 < \lambda \leq -1$ , zu  $II_\infty$  für  $-3 < \lambda \leq -2$ , schließlich zu  $II_\infty$  oder  $III$  für  $-4 < \lambda \leq -3$ .

Gottfried Köthe.

Halfar, Edwin: A note on point-set operators. Portugaliae Math. 10, 103—104 (1951).

When  $u, v$  denote two point-set operators on a set  $L$ , so that  $uA$  and  $vA$  are subsets of  $L$  for each subset  $A$  of  $L$ , the operator combinations  $uv$ ,  $u+v$ , and  $u \circ v$  are defined by:  $uvA = u(vA)$ ,  $(u+v)A = uA \cup vA$  and  $(u \circ v)A = uA \cap vA$ . — In this note the author considers the possibility of expressing certain operators of the form  $f(u \circ v)$  in terms of combinations not involving  $u \circ v$ , where  $f$  denotes a combination of the set-complementation operator  $c$ , and a topological operator  $d$ , similar to derivation, which is subject to the conditions:  $d(A \cup B) = dA \cup dB$ ,  $d(dA) = d^2A \subset dA$  and  $d0 = 0$  for the null set  $0$ . — The two main results proved are: Theorem 1.  $dc d(u \circ v)A = dc duA \cup dc dvA$ , if  $u$  satisfies  $duA \subset uA$ , and  $v$  is arbitrary. Theorem 2. For any two operators  $u, v$ ,  $dc dvA \cup dc uA = dc d(u \circ v)A \cup dc uA$ .

V. S. Krishnan.

Pettis, B. J.: On the continuity of parametric linear operations. Proc. Amer. math. Soc. 2, 455—457 (1951).

Soit  $G$  un groupe additif, muni d'une topologie (qui ne fait pas nécessairement de  $G$  un groupe topologique). Soient  $H \subset G$ , et  $h \rightarrow T_h$  une application de  $H$  dans l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur un espace vectoriel complexe normé, telle que  $T_{h+k} = T_h T_k$  quand  $h, k, h+k \in H$ . L'A. donne un théorème qui permet d'affirmer la continuité forte de  $h \rightarrow T_h$  quand sont remplies: 1. des conditions de continuité faible pour  $T_h$ ; 2. certaines conditions relevant de la théorie de la catégorie. Ces conditions sont remplies quand: 1.  $G$  est un espace vectoriel topologique de 2<sup>e</sup> catégorie; 2.  $H$  est convexe ouvert, contient un ensemble dénombrable dense,  $0 \in \bar{H}$ ; 3.  $T_h$  est faiblement continu.

Jacques Dixmier.

Fuglede, Bent and Richard V. Kadison: On determinants and a property of the trace in finite factors. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 425—431 (1951).

Soient  $M$  un facteur de type  $II_1$ ,  $T$  la trace canonique sur  $M$ ,  $M_1$  l'ensemble des opérateurs inversibles de  $M$ . Pour tout  $X \in M_1$ , on pose:

$$\Delta(X) = \exp [T(\log(X^* X)^{1/2})].$$

Cette fonction généralise dans une certaine mesure le déterminant classique (les A.A. prouvent qu'on ne peut espérer définir raisonnablement un déterminant à valeurs non  $> 0$ ; ils envisagent aussi l'extension de  $\Delta$  à  $M - M_1$ ).  $\Delta$  est caractérisée par les propriétés suivantes: (1)  $\Delta(XY) = \Delta(X)\Delta(Y)$  pour  $X, Y \in M_1$ . (2)  $\Delta(X^*) = \Delta(X)$  pour  $X \in M_1$ . (3)  $\Delta(\lambda 1) = \lambda$  pour un  $\lambda > 0$ ,  $\lambda \neq 1$ . (4)  $\Delta(X) \leq 1$  si  $X \in M_1$ ,  $X \leq 1$ . En outre, on a:  $\Delta(\exp X) = |\exp T(X)|$  pour tout  $X \in M$ . Corollaire: pour tout  $A \in M$ ,  $T(A)$  appartient à l'enveloppe convexe du spectre de  $A$ .

Jacques Dixmier.



**Kakutani, Shizuo:** A proof of Schauder's theorem. J. math. Soc. Japan 3, 228—231 (1951).

The theorem of J. P. Schauder the author deals with states that a linear operation from one Banach space to another is completely continuous if and only if its adjoint operation is so [Studia math. 2, 183—196 (1930)]. The author gives an elegant proof of this theorem in a more general formulation. Two normed linear spaces  $X$  and  $Y$  are said to form a normed pair if there is a bilinear functional  $(x, y)$  on  $X \times Y$  such that  $\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} (x, y)$  and  $\|y\| = \sup_{\|x\| \leq 1} (x, y)$ ; two bounded linear operations  $U$  and  $V$  defined on  $X$  and  $Y$  respectively are said to compose a normed pair if  $(Ux, y) = (x, Vy)$ . The operation  $U$  is called completely continuous if it transforms every bounded set into a totally bounded one. The author proves that  $U, V$  being an adjoint pair,  $U$  is completely continuous if and only if  $V$  is so. In this formulation no space of the couple  $X, Y$  needs to be conjugate to an linear normed space. The proof is based upon a theorem of Arzelà's type.

*Andrzej Alexiewicz.*

**Bourgin, D. G.:** Classes of transformations and bordering transformations. Bull. Amer. math. Soc. 57, 223—237 (1951).

This is an address delivered before the Evanston meeting of the American Mathematical Society. It does not deal with any definite theory but, in a most interesting manner, indicates a number of still unsolved problems in many theories, sometimes hinting at possible generalizations, always very rich in ideas. As the author himself says „many of my comments bear on results not yet published or on work in progress in connection with a book on fixed point theory“. Yet this address gives 36 very useful references. — In the first part of his address, the author studies a number of problems about what he terms „bordering transformations“. For instance, if  $U$  denotes a linear functional on a Banach space to the real numbers is it possible to determine it so that it gives a metric approximation of a quasi linear functional  $T$  on the same space to real numbers, so that  $\|T(x+y) - Tx - Ty\| < \varepsilon$ ,  $\|Tx - Ux\| \leq k \cdot \varepsilon$ ? Similarly one may ask whether a quasi convex function may be approximated by a convex one. Multiplicative transformations bring about a host of new problems, specially in the theory of Banach algebras of bounded continuous functions on a compact space. The author gives also some indications about questions concerning Banach isomorphisms and orthogonal sequences. His address being an extremely dense summary of problems either unsolved or partly solved, it would be ludicrous to attempt to summarize it still more in a review. It may suffice to say that the most suggestive and important part of it may be found perhaps in the last two sections treating of the theory of the fixed point in function spaces. Leray, in his treatment of the fixed point theory and that of the index of a transformation, has considered spaces which he calls „convexoides“. The author points out that in a recent thesis (Princeton University) Browder has defined spaces which are compact absolute neighbourhood retracts, uniformly locally equiconnected. He suggests that the convexoides spaces might be a subclass of these spaces. — The last section, about „fixed point classes“, gives an idea of results obtained by Nielsen and recently generalized by Wecken (see: this Zbl. 24, 84; 26, 271; 27, 265). Again the author suggests new problems in this field and these seem to be all of considerable difficulty, yet, no doubt, of great importance.

*C. Racine.*

**Pollard, Harry:** The closure of translations in  $L^p$ . Proc. Amer. math. Soc. 2, 100—104 (1951).

L'A. dit qu'un ensemble  $S$  de nombres réels est de type  $q$  si toute  $\varphi \in L^q$  est identiquement nulle dès que pour tout  $t \notin S$  on a  $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma|x|} e^{ixt} \varphi(x) dx = 0$ .

A l'aide de cette notion il démontre que: A) Soit  $k \in L \cap L^p$  ( $p > 1$ ), alors l'équation  $k * \varphi = 0$  admet dans  $L^{p'}$  la seule solution  $\varphi = 0$  dès que l'ensemble  $N$  des 0 de la transformée de Fourier de  $k$  est de type  $p'$ . B) Soit  $k \in L^p$  et  $\sqrt[p]{|x|} |k| \in L$ , si  $N$  n'est pas de type  $p'$  l'équation  $k * \varphi = 0$  admet une solution non nulle dans  $L^{p'}$ .

*Jean Riss.*

**Grothendieck, Alexandre:** Quelques résultats sur les espaces vectoriels topologiques. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 839—841 (1951).

Durch Gegenbeispiele werden die Probleme 4, 5, 6, 8 von J. Dieudonné und L. Schwartz (dies. Zbl. 35, 355) beantwortet, ebenso treffen die Eigenschaften 8

und 9 (S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, S. 244—245) für  $(M)$ ,  $(m)$ ,  $(C)$  und  $(C^p)$  nicht zu. — Die schwach kompakten Abbildungen des Raumes  $C(K)$ ,  $K$  kompakt, in einem vollständigen lokalkonvexen Raum  $E$  werden näher untersucht, es gilt z. B., daß jede lineare stetige Abbildung von  $C(K)$  in einen Raum  $L^1$  schwach kompakt ist. Es wird der Begriff einer allgemeinen Integraltransformation eines Banachraumes in einen anderen erklärt, für die stets gilt, daß sie schwach kompakt sind. — Ist  $f(t)$  eine auf einem lokalkompakten Raum  $K$  mit dem Maß  $\mu$  erklärte schwach meßbare Funktion mit Werten in dem Banachraum  $E$  und hat  $f$  lokal ein relativ schwach kompaktes Bild, so ist  $f$  schwach fast überall gleich einer stark meßbaren Funktion. — Dual zu Resultaten von L. Nachbin (dies. Zbl. 35, 354) gilt: Für einen Raum  $L^1$  und nur für einen solchen gilt, daß zu einer linearen stetigen Abbildung  $u$  von  $L^1$  in einen Quotienten  $E/F$  eines Banachraumes  $E$  nach einem reflexiven Teilraum  $F$  eine lineare stetige Abbildung  $v$  von  $L^1$  in  $E$  existiert mit  $\|v\| \leq \|u\|$  und  $u x = v x \pmod{F}$  für alle  $x \in L^1$ . Ohne Beweise.

Gottfried Köthe.

**Dieudonné, Jean:** Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym. IV. J. Indian math. Soc., n. Ser. 15, 77—86 (1951).

En poursuivant ses recherches sur diverses généralisations du théorème de Lebesgue-Nikodym (cf., en particulier, Note III, ce Zbl. 30, 160), l'A. envisage un espace mesuré  $(E, \mu)$  et l'espace correspondant  $L^1 = L^1(E, \infty)$ . Soit  $\tilde{f} \rightarrow U\tilde{f}$  une application linéaire et continue de  $L^1$  dans le dual  $F'$  d'un espace de Banach  $F$ ,  $\tilde{f}$  désignant, comme élément de  $L^1$ , une classe de fonctions  $f(t)$  sommables dans  $E$ . Quel que soit  $x \in F$ , il y correspond, grâce au théorème classique de Lebesgue-Nikodym, une classe  $\tilde{g}_x$  de fonctions,  $\tilde{g}_x \in L^\infty(E, \mu)$ , de sorte que

$$(x, U\tilde{f}) = \int_E f(t) g_x(t) d\mu(t), \quad \|\tilde{g}_x\|_{L^\infty} \leq M \cdot \|x\|_F.$$

Soit  $H$  le sous-espace de  $L^\infty$ , image de  $F$  par l'application  $x \rightarrow \tilde{g}_x$ . Le but principal du travail est de rechercher si, pour  $U\tilde{f}$ , la représentation suivante est possible:

$$(A) \quad U\tilde{f} = \int_E f(t) g(t) d\mu$$

où  $g(t)$  est une fonction définie dans  $E$  et à valeurs dans  $F'$ , fonction faiblement mesurable et fortement bornée, l'intégrale étant prise au sens faible [c'est-à-dire que, par définition,  $(x, \int_E f(t) g(t) d\mu) = \int_E f(t) (x, g(t)) d\mu$  pour tout  $x \in F$ ]. — D'après un théorème de Dunford et Pettis (ce Zbl. 23, 329), la représentation (A) est toujours possible si l'espace  $F$  est séparable. L'A. établit, par un raisonnement très simple, une condition nécessaire et suffisante pour la possibilité de (A): c'est qu'il existe, pour chaque classe  $\tilde{g} \in H$ , un représentant  $g^*(t)$  de cette classe, de sorte que l'application  $\tilde{g} \rightarrow g^*(t)$  soit linéaire et que, en outre,  $|g^*(t)| \leq \|g\|_{L^\infty}$ . Pour  $F$  séparable,  $H$  est aussi séparable, et alors l'application en question se construit sans difficulté, d'où il résulte une démonstration simple du théorème de Dunford et Pettis. D'autre part, il résulte de ce qui était dit, que la représentation (A) est possible pour  $F$  quelconque chaque fois que, pour la mesure  $\mu$ , le théorème suivant est vrai: (Théorème B) A chaque élément  $\tilde{g}$  de l'espace  $L^\infty(E, \mu)$  on peut assigner une fonction  $g^*(t)$  appartenant à la classe  $\tilde{g}$ , et cela de sorte que, pour tout  $t \in E$ , l'application  $\tilde{g} \rightarrow g^*(t)$  soit linéaire et telle que  $|g^*(t)| \leq \|g\|_{L^\infty}$ . — Théorème B a été démontré par J. von Neumann lorsque  $\mu$  est la mesure de Lebesgue sur un intervalle (ce Zb. 3, 106); cette démonstration peut être abrégée notablement faisant usage de la notion de convergence suivant un ultrafiltre. Grâce à des résultats de P. Halmos et J. von Neumann [Ann. of Math., II. Ser. 43, 332—350 (1943)], on peut aisément étendre ce théorème à tous les espaces mesurés pour lesquels l'espace  $L^1(E, \mu)$  est séparable. Quant à un espace mesuré quelconque, le problème de savoir si le Théorème B est vrai ou non, est ouvert. Tout ce qu'on sache, c'est que, faisant usage d'un théorème de D. Maharam [Proc. nat. Acad. Sci. USA 28, 108—111 (1942)], on peut réduire le problème au cas où  $E$  est un produit d'intervalles, chacun mesuré par la mesure ordinaire de Lebesgue. Malheureusement, les raisonnements qu'on possède ne s'appliquent qu'au cas où ces intervalles sont en nombre fini ou dénombrables. — Applications au problème de la décomposition de mesures.

Béla Sz. Nagy.

**Schwartz, Laurent:** Analyse et synthèse harmoniques dans les espaces de distributions. Canadian J. Math. 3, 503—512 (1951).

Soient, sur une variété indéfiniment différentiable  $V_n$ ,  $(\mathcal{D}^m)$  l'espace des fonctions  $m$  fois continuellement différentiables à support compact,  $(\mathcal{D}'^m)$  son dual,  $(\mathcal{G}^m)$  l'espace des fonctions  $m$



fois continuellement différentiables à support quelconque,  $(\mathcal{E}^m)$  son dual ( $m$  fini ou infini). Pour la multiplication par des fonctions de  $(\mathcal{E}^\infty)$ ,  $(\mathcal{D}^m)$  et  $(\mathcal{E}^m)$  sont des algèbres (ou anneaux)  $(\mathcal{M}^m)$ ,  $(\mathcal{D}^m)$  et  $(\mathcal{E}^m)$  des modules  $(\mathcal{M}^m)$  sur ces anneaux. Dans une première partie, l'A. étudie les idéaux fermés des anneaux et les sous-modules fermés des modules, c'est-à-dire les sous-espaces vectoriels fermés des espaces considérés qui sont invariants par la multiplication envisagée. [Il s'agit de la fermeture faible, mais pour  $(\mathcal{M}^m)$  et  $(\mathcal{M}^\infty)$  cette restriction est inutile.] Le co-support d'un idéal  $\mathfrak{I}$  de  $(\mathcal{M}^m)$  est l'ensemble des points  $a$  de  $V_n$  en lesquels s'annulent toutes les  $\Phi \in \mathfrak{I}$ .  $(\mathcal{M}^m)$  est un module sur  $(\mathcal{M}^m)$ , donc tout sous-module fermé de  $(\mathcal{M}^m)$  est l'orthogonal  $\mathfrak{I}^x$  d'un idéal fermé  $\mathfrak{I}$  de  $(\mathcal{M}^m)$ . Le co-support de  $\mathfrak{I}$  est dit le support  $F(\mathfrak{I}^x)$  de  $\mathfrak{I}^x$ , dénomination justifiée par le Th. 1: „ $F(\mathfrak{I}^x)$  est la réunion des supports usuels des distributions appartenant à  $\mathfrak{I}^x$ “. Le co-support et le support caractérisent un idéal et un sous-module fermé si  $m = 0$ . Il est clair qu'il n'en est plus de même si  $m \neq 0$ , mais on a le Th. 2: „Un idéal fermé  $\mathfrak{I}$  de  $(\mathcal{M}^m)$  est entièrement caractérisé par ses idéaux ponctuels  $\mathfrak{I}_{(a)}$ ,  $a \in V_n$ “ établi par Whitney (ce Zbl. 37, 355) pour  $m$  fini et étendu par l'A. à  $m = \infty$ , où la notion d'idéal ponctuel  $\mathfrak{I}_{(a)}$  est ainsi définie: „Soit  $(\mathcal{M}^m)_{(a)}$  le quotient de  $(\mathcal{M}^m)$  par l'idéal fermé des fonctions qui s'annulent en  $a$  ainsi que toutes leurs dérivées d'ordre  $\leq m$ .  $\mathfrak{I}_{(a)}$  est l'image de  $\mathfrak{I}$  dans l'application canonique de  $(\mathcal{M}^m)$  dans  $(\mathcal{M}^m)_{(a)}$ “. Par dualité, on a le Th. 3: „Tout sous-module fermé de  $(\mathcal{M}^m)$  est caractérisé par les distributions à support ponctuel qu'il contient.“ Application: Pour que la distribution  $T$  d'ordre  $m$  (fini ou infini) soit solution de la famille d'équations  $H_j T = 0$  [où  $H_j \in (\mathcal{E}^\infty)$ ], il faut et il suffit qu'elle soit limite dans  $(\mathcal{D}^\infty)$ , ou limite faible dans  $(\mathcal{D}^m)$  de combinaisons linéaires finies de distributions à supports ponctuels d'ordre  $\leq m$ , solutions de la famille d'équations. — Dans une seconde partie, l'A. étend ces résultats, en utilisant la transformation de Fourier  $\mathfrak{F}$ , au cas où le „produit“ n'est plus donné par la multiplication mais par la composition. Mais l'emploi de  $\mathfrak{F}$  exige que l'on se restreigne aux espaces suivants de fonctions définies sur  $R^n$ , ou plus généralement sur un groupe abélien localement compact élémentaire dont le dual  $Y^n$  est à  $n$  dimensions:  $(\mathcal{S})$  espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, son dual  $(\mathcal{S}')$  espace des distributions tempérées,  $(\mathcal{D}_M)$  espace des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente,  $(\mathcal{D}'_c)$  espace des distributions à décroissance rapide. Le co-spectre d'un idéal fermé  $\mathfrak{I}$  de  $(\mathcal{S})$  ou  $(\mathcal{D}'_c)$  est le co-support de  $\mathfrak{I}$ . Ici encore  $\mathfrak{I}$  ne sera caractérisé que par les idéaux ponctuels  $(\mathfrak{F}\mathfrak{I})_{(a)}$  associés aux différents points  $a$  du co spectre. Si  $\delta_{(a)}$  est la masse  $+1$  placée en  $a \in Y^n$ ,  $\mathfrak{F}\delta_{(a)} = e^{2\pi i a x}$  et si l'on appelle spectre d'un sous-module fermé  $\mathfrak{I}^x$  le support de  $\mathfrak{F}\mathfrak{I}^x$ , on a le Th. 5: „Le spectre d'un sous-module fermé  $\mathfrak{I}^x$  de  $(\mathcal{S}')$  ou  $(\mathcal{D}_M)$ , réunion des spectres usuels des distributions de  $\mathfrak{I}^x$ , est aussi l'ensemble des points  $a$  de  $Y^n$  tels que  $e^{2\pi i a x}$  soit dans  $\mathfrak{I}^x$ . Le spectre usuel d'une distribution  $T \in (\mathcal{S}')$  est aussi l'ensemble des  $a \in Y^n$  tels que  $e^{2\pi i a x}$  soit limite de combinaisons linéaires finies de translatées de  $T$ “. De même le Th. 2 donne le Th. 6: „Tout sous-module fermé  $\mathfrak{I}^x$  de  $(\mathcal{S}')$  ou  $(\mathcal{D}_M)$  est engendré par les exponentielles-polynômes qu'il contient.“ — On a enfin: „Pour qu'une distribution tempérée  $T$  soit solution d'un système  $K_j * T$  (où  $K_j \in (\mathcal{D}'_c)$ ) il faut et il suffit qu'elle soit limite, dans  $(\mathcal{S}')$ , de combinaisons linéaires finies d'exponentielles-polynômes, solutions du système.“ — Dans la dernière partie, l'A. pose le même problème dans d'autres espaces vectoriels. Il montre, en particulier que: „Si  $f \in L^\infty$  son spectre dans  $L^\infty$  est identique à son spectre dans  $(\mathcal{S}')$ “, et par un contre-exemple que la synthèse harmonique est impossible pour  $L^\infty$  dans  $R^n$  pour  $n \geq 3$ . Il en avait montré la possibilité dans le cours de l'article pour  $n = 1$ . La question reste ouverte pour  $n = 2$ . Enfin l'A. pose la question de la validité des Th. 6 et 8 pour les espaces  $(\mathcal{E}^\infty)$  et  $(\mathcal{D}^\infty)$  dans le cas  $n > 1$ . Il a résolu affirmativement le cas  $n = 1$  (ce Zbl. 30, 150). André Revuz.

Michal, Aristotle D.: Invariant differential forms in several group variables as solutions of partial differential equations in Fréchet differentials. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 766—771 (1951).

Cette Note est un résumé succinct d'un chapitre d'une monographie en préparation: „Differential equations in abstract spaces with applications“. Quelques théorèmes y sont cités, avec des indications extrêmement rapides sur leur démonstration. Ces théorèmes donnent sous forme d'équations aux différentielles partielles de Fréchet des conditions nécessaires et suffisantes pour que des formes différentielles du type  $W(\beta_1, \beta_2, \delta\beta_1, \delta_1\beta_2, \delta_2\beta_2)$  de classe  $C_1$  (avec  $\beta_1, \beta_2 \in \mathcal{A}$  groupe topologique plongé dans un espace de Banach  $B$ , et  $\delta\beta_1, \delta_1\beta_1, \delta_2\beta_2 \in B$ ) linéaires en  $\delta\beta_1$  et bilinéaires alternées en  $\delta_1\beta_1, \delta_2\beta_2$  soient invariantes par l'un des deux, ou par les deux groupes continus de transformations  $\pi_1$  ( $x = \alpha\beta$ ,  $\beta$  est le paramètre) et  $\pi_2$  ( $\bar{\beta} = \alpha\beta$ ,  $\alpha$  est le paramètre), ( $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ). André Revuz.

Kantorovič, L. V., B. Z. Vulich und A. G. Pinsker: Halbgeordnete Gruppen und lineare halbgeordnete Räume. Uspechi mat. Nauk 6, Nr. 3 (43), 31—98 (1951) [Russisch].

L'article a un caractère d'une exposition; les notions et les théorèmes sont énoncés avec tous les détails, cependant les démonstrations sont, en général, omises ou esquissées. Le premier chapitre concerne les groupes semi-ordonnés, les trois chapitres restants correspondent à peu près aux trois parties du livre „Analyse fonctionnelle dans les espaces semi-ordonnés“ des mêmes auteurs (Moscou 1950, ce Zbl. 37, 72). — Un groupe additif  $X$  est dit semi-ordonné ou groupe  $(K)$ , lorsque  $(x, y \in X)$ : I.  $x > 0 \Rightarrow x \neq 0$ ; II.  $x > 0, y > 0 \Rightarrow x + y > 0$ ; III. Pour tout  $x$  il existe un  $y \geq 0$  tel que  $y - x \geq 0$ ; V. Tout sous-ensemble de  $X$ , borné supérieurement, a sa borne supérieure (exacte). (Ces axiomes sont numérotés conformément au travail de Kantorovič, ce Zbl. 16, 405.) Le sous-groupe semi-ordonné  $X_0$  de  $X$  est dit un composant de  $X$  lorsqu'il jouit des deux propriétés suivantes: (1)  $\sup E$  dans  $X_0$  coïncide avec  $\sup E$  dans  $X$  pour tout ensemble  $E \subset X_0$ ; (2)  $x \in X, x_0 \in X_0$  et  $|x| \leq |x_0|$  implique  $x \in X_0$ . L'ensemble des composants représente une algèbre de Boole complète. Différentes sortes de convergence sont introduites dont les plus importantes sont désignées par  $(o)$  et  $(t)$ . Le problème d'extension des groupes  $(K)$  est aussi discuté. — L'espace  $X$  est dit semi-ordonné ou espace  $(K)$  lorsqu'il satisfait aux axiomes I, II, III, V et, de plus, à l'axiome: IV. Si  $x > 0$  et  $\lambda > 0$  ( $\lambda$  nombre réel), on a  $\lambda x > 0$ . Les éléments de l'espace  $(K)$  se laissent représenter dans la forme des intégrales

$+\infty \int \lambda d\epsilon_\lambda$ , définies d'une manière convenable. Les fonctions continues dans  $X$  sont aussi susceptibles d'une représentation par des intégrales (multiples), ce qui permet de suite introduire

(non d'une manière unique) le produit des éléments de  $X$ ; l'espace devient ainsi un anneau linéaire. En définissant, dans l'espace  $(K)$  une norme  $\|x\|$  (dont les valeurs sont des nombres et qui ne se confond donc pas avec le module  $|x|$ ), on parvient aux espaces du type  $(KB)$ . Différents autres types d'espaces sont encore considérés. — Des opérateurs linéaires, faisant correspondre les éléments d'un espace  $(K)$  aux éléments d'un autre espace  $(K)$ , peuvent être définis de différentes manières, suivant les types de convergence adoptés dans ces espaces. Les auteurs distinguent ainsi quatre classes d'opérateurs linéaires:  $H_0^0, H_0^0, H_1^0$  et  $H_2^0$ . Le problème d'extension et le problème de représentation intégrale des opérateurs sont discutés en détail. Les AA. indiquent différentes applications, par exemple au problème des moments, à certains problèmes ergodiques et aux équations fonctionnelles. — Dans le dernier chapitre, les AA. considèrent des représentations de l'espace  $(K)$  par certains espaces concrets tels que, par exemple, l'espace de fonctions continues ou mesurables. L'article aboutit par une liste de 18 problèmes non résolus et une riche bibliographie contenant les noms de plus d'une centaine d'auteurs.

Jan Mikusiński.

Phillips, R. S.: A note on ergodic theory. Proc. Amer. math. Soc. 2, 663—670 (1951).

L'A. résout plusieurs problèmes posés par E. Hille (Functional Analysis and semi-groups, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 31, New York 1948. S'y reporter pour les définitions et notations utilisées ci-dessous). —  $T(\xi)$ ,  $\xi > 0$ , est un semi-groupe de transformations linéaires d'un espace complexe de Banach  $\mathfrak{X}$  dans lui-même.  $T(\xi)$  est dite ergodique à l'infini, ou à l'origine, si elle possède une limite généralisée pour  $\xi \rightarrow +\infty$  ou  $\xi \rightarrow 0$ . L'A. considère les

limites données par la moyenne d'Abel  $L[\lambda, T(\cdot)x] = \lambda \int_0^\infty \exp(-\lambda \xi) T(\xi) x d\xi$  ( $A$ -ergodicité)

et celles de Cesaro  $a[\xi, T(\cdot)x, \alpha] = a \xi^{-\alpha} \int_0^\xi (\xi - \tau)^{\alpha-1} T(\tau) x d\tau$  [ $(C - \alpha)$ -ergodicité]. — Les

hypothèses sont choisies parmi les suivantes: (i)  $T(\xi)$  est fortement mesurable pour  $\xi > 0$ ;

(ii)<sub>s</sub>  $\int_0^\infty \exp(-\lambda \xi) \|T(\xi) x\| d\xi$  existe pour  $\lambda > 0$  et tout  $x \in \mathfrak{X}$ ; (ii)<sub>u</sub>  $\int_0^\infty \exp(-\lambda \xi) \|T(\xi)\| d\xi$

existe pour  $\lambda > 0$ ; (iii)  $\lim_{\eta \rightarrow 0+} \eta^{-1} \int_0^\eta T(\xi) x d\xi = x$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ .  $A$  est la transformation

infinitésimale engendrant le semi-groupe,  $R(\lambda; A)$  la résolvante,  $\mathfrak{R}(U)$  est l'ensemble des valeurs de l'opérateur linéaire  $U$ . — Théorème 1. Si  $T(\xi)$  satisfait (i), (ii)<sub>u</sub>, (iii), si en outre  $\mathfrak{R}(A^2)$  est fermé et  $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda^2 R(\lambda; A) x = \Theta$  pour tout  $x \in \mathfrak{X}$ , alors  $T(\xi)$  est  $A$ -ergodique à l'infini dans la

topologie uniforme (Conjecture de Hille, op. cit. p. 301). Théorème 2. Si  $T(\xi)$  satisfait (i) et (ii)<sub>s</sub>, si  $T(\xi)$  est fortement  $A$ -ergodique à l'origine et si  $\|a(\xi, T(\cdot)x, \alpha)\| \leq M \|x\|$  pour  $0 < \xi < 1$ , alors  $T(\xi)$  est fortement  $(C - \alpha)$  ergodique à l'origine. — Soit  $\mathfrak{X}_1 = (\mathfrak{R}(A) \oplus \mathfrak{Z}(A))^\perp$ ,  $\{\mathfrak{Z}(A)$  est l'ensemble des zéros de  $A\}$ ,  $A_1$  est la restriction de  $A$  à  $\mathfrak{X}_1$ ,  $A_2$  celle de  $A$  à  $(\mathfrak{R}(A))^\perp$  (N. B.



L'A. désigne par  $E^-$  la fermeture de  $E$ ). — Theorème 3. Si  $T(\xi)$  satisfait (i), (ii), (iii) et  $\|\lambda R(\lambda; A)\| \leq M$  pour  $0 < \lambda < 1$ , alors  $\lim_{\lambda \rightarrow 0+} \lambda R(\lambda; A)x$  existe pour tout  $x \in \mathfrak{X}_1$ ,  $T(\xi)\mathfrak{X}_1 \subset \mathfrak{X}_1$ ,

et  $(\mathfrak{R}(A))^- = (\mathfrak{R}(A_1))^- = (\mathfrak{R}(A_2))^-$ . Corollaire 1. Si  $T(\xi)$  satisfait aux hypothèses du théorème 3 et si  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1$ ,  $T(\xi)$  est fortement  $A$ -ergodique à l'infini. — Corollaire 2. Si  $T(\xi)$  satisfait les hypothèses du théorème 3,  $\lambda = 0$  est ou dans l'ensemble résolvant ou dans le spectre continu de  $A_2$ . — L'A. termine en donnant trois exemples: le premier prouvant que la conjecture suivante de Hille (op. cit. p. 295) est fautive: si  $T(\xi)$  satisfait aux conditions du théorème 3 et est tel que  $\lambda = 0$  n'appartient ni au spectre ponctuel de  $A$  ni à celui de  $A_2$ ,  $T(\xi)$  est fortement ergodique à l'infini; le deuxième prouvant que  $T(\xi)$  peut satisfaire (i), (ii), (iii) et  $\limsup_{\xi \rightarrow 0+} \|T(\xi)\| = \infty$ ;

le troisième que  $T(\xi)$  peut être fortement continue sur  $(-\infty, +\infty)$  et  $\|T(\xi)\|$  n'être pas continue (Cf. Hille, op. cit. p. 184).

André Revuz.

**Peck, J. E. L.: An ergodic theorem for a noncommutative semigroup of linear operators.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 414—421 (1951):

Es sei  $\mathfrak{S}$  eine Halbgruppe, welche den „pseudo kommutativen Gesetzen“ genügt, d. h.: 1. Zu beliebigen  $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$  sollen  $S_3, S_4 \in \mathfrak{S}$  existieren, so daß  $S_1 S_3 = S_2 S_4$ . 2. Zu beliebigen  $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$  sollen  $S_3, S_4$  existieren, so daß  $S_1 S_2 = S_3 S_1 = S_2 S_4$ . Ist  $\mathfrak{S}$  außerdem eine totalbeschränkte Teilmenge der Menge aller beschränkten linearen Operatoren (starke Topologie) eines Banachraumes  $X$ , dann ist  $\mathfrak{S}$  eine im Sinne von Eberlein ergodische Halbgruppe, und jedes Element von  $X$  ist (ebenfalls im Sinne von Eberlein) ergodisch (siehe Eberlein, dies. Zbl. 34, 64). — Beim Beweise dieses Satzes bedient sich Verf. eines Fixpunktsatzes von Kakutani:  $\mathfrak{Q}$  lokalkonvexer linearer topologischer Raum,  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{Q}$  kompakt und konvex,  $\Phi$  Menge linearer „kongruenter“ Transformationen von  $\mathfrak{Q}$ , welche  $\mathfrak{B}$  auf sich abbilden; dann existiert ein  $p \in \mathfrak{B}$  mit  $\varphi p = p$  für alle  $\varphi \in \Phi$ . Verf. teilt Kakutani's bisher unveröffentlichten Beweis mit.

Wilhelm Maak.

## Praktische Analysis:

● **Picone, Mauro: What the National Institute for applied calculus has given and is able to give.** Roma: Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo 1951. 11 p.

**Kuntzmann, J.: Notions de grille et de tube.** Ann. Inst. Fourier 2, 197—205 (1951).

Verf. möchte zwei neue Begriffe einführen, welche die bei numerischen Rechnungen vorliegenden Verhältnisse besser erfassen als der Funktionsbegriff. Er versteht unter einem „Rost“ („grille“) die Zuordnung nicht eines Funktionswertes  $f(x)$ , sondern eines Unsicherheitsintervalles (von i. a. fester Länge) zu jedem Wert  $x$  einer endlichen Menge von reellen Zahlen  $x$ . Ein „Rohr“ („tube“) ist genau so definiert, nur daß  $x$  ein Intervall durchläuft. Zwei Rohre (Roste) bzw. ein Rohr und ein Rost heißen verträglich miteinander, wenn für alle  $x$  aus dem gemeinsamen Definitionsbereich die beiden zugeordneten Unsicherheitsintervalle wenigstens einen Punkt gemein haben. Ein Rohr (Rost) heißt polynomial vom Grade  $n$ , wenn es mit einem Polynom  $n$ -ten Grades verträglich ist. Ein Rohr heißt  $L$ -polynomial vom Grade  $n$ , wenn es in jedem Intervall der Länge  $L$  polynomial vom Grade  $n$  ist; analog für Roste. Verf. stellt dann eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Polynomialeigenschaft eines Rostes (Rohres) auf und diskutiert die Möglichkeit der Hinzunahme neuer Punkte ohne Änderung dieser Eigenschaft.

Johannes Weissinger.

**Perfect, Hazel: On matrices with positive elements.** Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 286—290 (1951).

Zwei Bemerkungen zur Konvergenz des Iterationsverfahrens zur Bestimmung des absolut größten Eigenwertes  $\chi$  einer Matrix  $A$  mit positiven Elementen. (1) Sind  $A^r u^{(0)} = u^{(r)} = (u_i^{(r)})$  die Iterierten eines Vektors  $u^{(0)}$  mit positiven Komponenten  $u_i^{(0)}$ , so gilt nach Collatz (dies. Zbl. 27, 6)  $\mu^{(r)} \leq \chi \leq \bar{\mu}^{(r)}$  mit

$$\mu^{(r)} = \min_i \{u_i^{(r+1)}/u_i^{(r)}\}, \quad \bar{\mu}^{(r)} = \max_i \{u_i^{(r+1)}/u_i^{(r)}\}.$$

Verf. zeigt, daß die Folge  $\mu^{(r)}$  monoton steigend und die Folge  $\bar{\mu}^{(r)}$  monoton fallend gegen  $\chi$  konvergieren. (2) Falls  $A$  außerdem symmetrisch ist, konvergiert der Winkel zwischen  $u^{(r)}$  und dem zu  $\chi$  gehörigen positiven Eigenvektor monoton gegen Null. Die Frage, ob die Voraussetzung der Symmetrie wesentlich ist, bleibt offen.

*Helmuth Wielandt.*

**Friedrich, Konrad und Werner Jenne: Geometrisch-anschauliche Auflösung linearer mit Nullkoeffizienten ausgestatteter Gleichungssysteme.** Veröff. Geodät. Inst. Potsdam Nr. 5, 68 S. (1951).

Das in einer früheren Veröffentlichung (dies. Zbl. **34**, 376) bereits in seinen Grundzügen beschriebene Verfahren wird ausführlich mit Beweisen dargestellt. Für alle möglichen Formen von Punktdarstellungen linearer Gleichungssysteme werden Rechenregeln abgeleitet. Die Voraussetzung, daß die Nullkoeffizienten symmetrisch angeordnet sind, fällt bei der neuen, allgemeineren Behandlung fort. Das Verfahren, dessen Anwendung nicht auf geodätische Probleme beschränkt ist, liefert alle Unbekannten mit der gleichen Genauigkeit, was bei den sonst üblichen numerischen Methoden bekanntlich nicht der Fall ist. Der Geodäse ist damit ein an Einfachheit nicht zu übertreffendes Hilfsmittel zur Berechnung der Korrelatenentwicklungen für die Ausgleichung umfangreicher Dreiecksnetze gegeben. Zur Erleichterung der praktischen Rechnung wurde eine Tabelle aufgestellt, die für 405 verschiedene Dreieckskonfigurationen die zu den Punktdarstellungen der Winkelnormalgleichungen gehörenden ungekürzten Determinantenwerte enthält. Ergänzende Ausführungen befassen sich mit rekurrenten Zahlenreihen, mit der Auffindung des größten gemeinsamen Teilers der Elemente der adjungierten Determinanten und mit der Berichtigung eines Formelsystems, das O. v. Gruber 1929 für den Zusammenschluß nach dem Entwicklungsverfahren ausgeglichener Netzteile angegeben hatte. *W. Hofmann.*

**Basilevitch, Vladimir: Über ein Verfahren der sukzessiven Approximation bei linearen algebraischen Gleichungssystemen.** Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **3**, 47—55 und deutsche Zusammenfassg. 55 (1951) [Serbisch].

Das hier dargelegte Verfahren der sukzessiven Approximation unterscheidet sich von den bekannten Verfahren dadurch, daß die sukzessiven Werte der Reihe, welche jede Unbekannte bestimmt, mit einer Konstanten  $C_k$  multipliziert werden. Der Wert dieser Konstanten  $C_k$  bleibt für alle sukzessiven Werte der Unbekannten in jedem Schritt der Approximation unverändert. Das Verfahren konvergiert immer gegen eine Lösung, und Verf. zeigt, wie man durch passende Wahl der Konstanten  $C_k$  die Konvergenz beschleunigen kann. *Autoreferat.*

**Sen, D. K.: Application of Newton's method for evaluating roots of  $f(x) = 0$  to the case of nearly equal roots.** Math. Student **19**, 64—66 (1951).

**Luke, Yudell L. und Dolores Ufford: On the roots of algebraic equations.** J. Math. Physics **30**, 94—101 (1951).

Zur Auflösung einer algebraischen Gleichung in einer Unbekannten hat S. N. Lin [dies. Zbl. **26**, 235 und J. Math. Physics **23**, 60—77 (1943)] ein iteratives Verfahren, dessen Konvergenz von B. Friedman (dies. Zbl. **34**, 218) teilweise bewiesen wurde, angegeben. Es liefert einen Algorithmus für die Zerlegung des ursprünglichen Polynoms in zwei Faktoren. Um ein vorgelegtes Polynom  $n$ -ten Grades in seine Linearfaktoren aufzuspalten, ist dann dieser Algorithmus  $(n - 1)$ -mal anzuwenden. Verf. zeigen nun, daß die Linsche Methode so abgeändert werden kann, daß eine einmalige Anwendung des Algorithmus (ohne wesentliche Vermehrung des Rechenaufwandes) schon zur vollen Zerfällung des Polynoms führt und damit gleichzeitig (und nicht sukzessive) alle Nullstellen liefert. Hierzu werden einige Beispiele vorgerechnet. Die Autoren behaupten an weiteren Beispielen festgestellt zu haben, daß ihr Verfahren gut konvergiert, wenn die Nullstellen voneinander getrennt liegen und negative Realteile haben. *Herbert Bilharz.*

**Meulenbeld, B.: Eine graphische Methode zur Berechnung der Wurzeln einer numerischen Gleichung höherer Ordnung mit reellen Koeffizienten.** Simon Stevin **28**, 60—80 (1951) [Holländisch].

Die graphische Methode zur Lösung der numerischen Gleichung  $n$ -ter Ordnung mittels Verknüpfung einer Reihe ähnlicher Dreiecke — die Lillsche Methode der Orthogonalen — wird vom Verf. eingehend behandelt. Die quadratische Gleichung wird erschöpfend diskutiert. Die Resultante zweier quadratischer Gleichungen und die Diskriminante der kubischen Gleichung werden geometrisch abgeleitet. Verf.



behandelt auch auf quadratische Gleichungen reduzible Gleichungen vierter Ordnung und die verschiedenen Typen reziproker Gleichungen. Er gibt die Darstellung der Funktionen  $f(z)/(z-x)$  und  $f(z)/(z-x_1)(z-x_2)$  und dehnt die Methode auf das Gebiet der komplexen Zahlen aus. Verf. bemerkt ausdrücklich, daß man nicht notwendig den rechten Winkel, der zum Orthogon führt, zu verwenden braucht, und zeigt, wie sich die Methode mit anderen Winkeln auch durchführen läßt. Näheres findet man in früheren Artikeln des Verf., dies. Zbl. 38, 282. *E. M. Bruins.*

**Blanc, Charles:** Évaluation stochastique de l'erreur dans les formules d'interpolation. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 683—684 (1951).

**Blanc, Charles:** Évaluation stochastique de l'erreur dans les formules d'intégration numérique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 726—727 (1951).

Verf. schlägt einen neuen Weg ein, um den Fehler einer Interpolation abzuschätzen, und zwar geht er aus von der Gesamtheit der Funktionen, die aus der zu interpolierenden Funktion  $f(t)$  durch Parallelverschiebung entstehen und zugleich einem gewissen Verteilungsgesetz gehorchen. Dann kann man aus dem Mittelwert der Verteilung der Funktion der „Selbstkorrelation“ von  $f(t)$ , das heißt aus dem Mittelwert der Verteilung der Korrelationen von  $f(t)$  mit seinen Parallelverschiebungen die Charakteristiken der Zufallsgrößen berechnen, die linear von  $f$  abhängen. — Das Verfahren kann auch mit Vorteil auf die numerische Integration angewendet werden. Es erlaubt, die verschiedenen Formeln der numerischen Quadratur auf ihre Zuverlässigkeit zu vergleichen. Verf. findet beispielsweise, daß die Streuung des Fehlers bei der Formel von Newton-Cotes größer ist als bei der Formel von Simpson. *Paul Lorenz.*

**Stöhr, Alfred:** Zur approximativen Lösung linearer homogener Differentialgleichungssysteme. Math. Nachr. 6, 97—102 (1951).

In Verallgemeinerung klassischer Sätze und Beweise wird gezeigt: Das System von (Stieltjes-) Integralgleichungen

$$(1) \quad u_k(x) = v_k + \sum_{l=1}^j \int_a^x u_l(\xi) d\Phi_{kl}(\xi) \quad (k = 1, 2, \dots, j; a \leq x \leq b),$$

in dem die  $v_k$  als komplexe Zahlen und die  $\Phi_{kl}(x)$  als stetige, komplexwertige Funktionen mit endlicher totaler Schwankung gegeben sind, besitzt genau ein Lösungssystem beschränkter Funktionen  $u_k(x)$ . Die  $u_k(x)$  sind stetig mit den Anfangswerten  $u_k(a) = v_k$  und lassen sich mit einem beliebig kleinen Fehler, für den eine obere Schranke gegeben wird, durch Treppenfunktionen approximieren, die rekursiv berechnet werden. Für jeden Punkt  $x$ , in dem alle  $j^2$  Ableitungen  $\Phi'_{kl}(x) = \varphi_{kl}(x)$  existieren, folgt aus (1):  $u'_k(x) = \sum_{l=1}^j \varphi_{kl}(x) u_l(x)$ , und umgekehrt läßt sich dieses System mit integrierbaren  $\varphi_{kl}(x)$  in den Stetigkeitsstellen der  $\varphi_{kl}(x)$  mittels  $\Phi_{kl}(x) = \int_a^x \varphi_{kl}(\xi) d\xi$  in (1) überführen. *Johannes Weissinger.*

**Quade, W.:** Numerische Integration von Differentialgleichungen bei Approximation durch trigonometrische Ausdrücke. Z. angew. Math. Mech. 31, 237—238 (1951).

Während bei den nach Adams benannten Verfahren die Differentialgleichung  $dy/dx = f(x, y)$ ,  $y(a) = y_0$ ,  $a \leq x \leq a + \alpha$  durch Integration eines die rechte Seite ersetzenden Interpolationspolynoms gelöst wird, schlägt Verf. vor, die auf Grund der Substitution  $x = a + \alpha \sin^2 \frac{1}{2} t$  äquivalente Differentialgleichung  $dy/dt = \frac{1}{2} \alpha \sin t \cdot f(a + \alpha \sin^2 \frac{1}{2} t, y)$ ,  $y(0) = y_0$ ,  $0 \leq t \leq \pi$  mittels Approximation der rechten Seite durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom zu lösen. Für die unbekannten Funktionswerte an den Stellen  $t_k = k\pi/n$  erhält man so ein Gleichungssystem der Form  $y_k - y_0 = \frac{\alpha}{n} \sum_{\nu=0}^n c_{k\nu} f_\nu$ ,  $f_\nu = f(x_\nu, y_\nu)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

das bei genügend kleinem  $\alpha$  durch Iteration gelöst werden kann. Die Verfahrenskonstanten  $c_{kv}$  hängen nur von  $n$  ab. Da trigonometrische Interpolationspolynome normalerweise mit wachsendem  $n$  gleichmäßig gegen die approximierte Funktion streben, ist eine größere Genauigkeit als bei den Adamsschen Verfahren zu erwarten, was durch Beispiele bestätigt wird. — Eine ausführliche Darstellung soll folgen.

*Johannes Weissinger.*

**Dahlquist, Germund:** Fehlerabschätzungen bei Differenzenmethoden zur numerischen Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **31**, 239—240 (1951).

Der Fehler  $\tilde{y}_n$  der mittels  $\tilde{y}_{n+1} = \tilde{y}_{n-1} + 2h f(\tilde{y}_n, t_n)$  bestimmten Näherungslösung  $\tilde{y}_n$  der Differentialgleichung  $dy/dt = f(y, t)$  genügt in erster Näherung der Differenzengleichung  $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_{n-1} + 2h (\partial f / \partial y)_n \cdot \varepsilon_n + \delta_n$  ( $\delta_n$  = Quadraturfehler). Diese wird näherungsweise gelöst durch  $\varepsilon_n = \bar{\varepsilon}(t_n) + A v(t_n) + B \cdot (-1)^n w(t_n)$ , wobei die Funktionen  $\bar{\varepsilon}(t)$ ,  $v(t)$ ,  $w(t)$  linearen Differentialgleichungen erster Ordnung genügen und die Konstanten  $A$ ,  $B$  aus den Anfangsbedingungen bestimmt werden. Diese Betrachtungsweise ist auch für andere Integrationsverfahren möglich und soll später ausführlicher dargestellt werden. Ref. möchte wünschen, daß dann auch die Möglichkeit einer strengen Fehlerabschätzung nach dieser Methode erörtert würde.

*Johannes Weissinger.*

**Sassenfeld, H.:** Ein Summenverfahren für Rand- und Eigenwertaufgaben linearer Differentialgleichungen. *Z. angew. Math. Mech.* **31**, 240—241 (1951).

Während beim Differenzenverfahren die Differentialgleichung  $\sum_{v=0}^n a_v(x) y^{(v)}(x) + g(x) = 0$  dadurch in ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Funktionswerte  $y_i$  an äquidistanten Stellen  $x_i$  überführt wird, daß die Ableitungen  $y^{(v)}(x_k)$  durch geeignete Linearkombinationen der  $y_i$  ersetzt werden, erreicht Verf. dieses Ziel, indem er die Differentialgleichung  $n$ -mal integriert und die auftretenden Integrale (nach vorheriger Umformung durch partielle Integration) auf Grund von Quadraturformeln durch Linearkombinationen der  $y_i$  ersetzt. Das Verfahren ist nicht komplizierter als das Differenzenverfahren, liefert aber i. a. genauere Werte, während es in Spezialfällen in das Collatzsche Mehrstellenverfahren übergeht. Es läßt sich noch weiter verschärfen (z. B. durch Hermite'sche Interpolation oder mehr als  $n$ -malige Integration) und auch auf Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen anwenden.

*Johannes Weissinger.*

**Bertram, G.:** Zur Fehlerabschätzung für das Ritzsche Verfahren bei Eigenwertaufgaben. *Z. angew. Math. Mech.* **31**, 241 (1951).

Während das Ritzsche Verfahren i. a. obere Schranken für die Eigenwerte  $\lambda$  liefert, kann Verf. für gewöhnliche, selbstadjungierte, volldefinite Eigenwertaufgaben mit von  $\lambda$  freien Randbedingungen auch untere Schranken gewinnen, indem er als Ansatzfunktionen die Eigenfunktionen eines ähnlich gebauten, definiten Problems unter Festhaltung der Randbedingungen verwendet. Im Spezialfall der Eingliedklasse läßt sich eine Integralgleichung angeben, die von einem Parameter  $\alpha$  abhängt, und die für  $\alpha = 1$  durch die exakte, für  $\alpha = 0$  durch die genäherte Lösung des Eigenwertproblems gelöst wird. Daraus lassen sich Fehlerabschätzungen für die Eigenwerte sowie asymptotische Formeln für das Konvergenzverhalten der Eigenwertfehler in Abhängigkeit von der Ansatzgliederzahl erhalten. Eine ausführliche Darstellung soll in Kürze erscheinen.

*Johannes Weissinger.*

**Rushton, S.:** On least squares fitting by orthonormal polynomials using the Choleski method. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **13**, 92—99 (1951).

This is mainly an expository paper in which the author describes a numerical technique of determining the solutions  $\lambda_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) of the least square

problem  $\sum_{i=1}^n \left( y_i - \sum_{j=1}^k \lambda_j x_{ij} \right)^2 = \text{minimum}$ , given „observed values“ of  $y_i$



and  $x_{ij}$ , and leading to the „normal equations“ (1)  $\sum_{j=1}^k \lambda_j \left( \sum_i x_{ij} x_{il} \right) = \sum_i y_i x_{il}$ .

The method of solution is based on the well known technique of orthogonalisation of the  $x_{ij}$ , i. e. the use of linear transforms  $p_{ij} = \sum_l t_{il} x_{il}$  such that  $\sum_i p_{il} p_{ij} = \delta_{ij}$ .

The numerical procedure of determining the  $p_{ij}$  is found to be identical with the Choleski method of solving (1) directly by elimination. The statistical significance of the stages of orthogonalisation are discussed. The special case of „fitting polynomials to the  $y_i$ “ (i. e.  $x_{ij} = x_i^{j-1}$ ) is worked in detail and illustrated with an example.

H. O. Hartley.

López Nieto, Antonio: Baryzentrische Nomogramme. Revista mat. Hisp.-Amer., IV. Ser. 11, 191—207 (1951) [Spanisch].

Verf. gibt einen Überblick über die Methoden der Nomographie — Skalen, Kurvenfamilien, Kurvennetze — und zeigt die Bedeutung der Verwendung von Kombinationen dieser graphischen Schemata mittels Schneidens, Allineation und Verschiebung. Insbesondere für die Darstellung von Funktionen

$$F[a_{12} + \alpha_{34} + \alpha_{56} \dots, \beta_{12} + \beta_{34} + \beta_{56} \dots, z] = 0,$$

$$F[\alpha_{12} \times \alpha_{34} \times \alpha_{56} \dots, \beta_{12} \times \beta_{34} \times \beta_{56} \dots, z] = 0,$$

$x = \alpha_{12} \dots$ ,  $y = \beta_{12} \dots$ . Er bemerkt, wie man durch Schwerpunktbestimmung (wenn nötig durch mit verschiedenen Gewichten versehene Punkte) die Verschiebungen vermeiden kann, und demonstriert seine Methode für ein Gesetz über die Geschwindigkeit in Röhren.

E. M. Bruins.

Hartley, H. O. and E. R. Fitch: A chart for the incomplete betafunction and the cumulative binomial distribution. Biometrika 38, 423—426 (1951).

The incomplete Betafunction  $J_x(a, b)$  is defined as

$$P = J_x(a, b) = \int_0^x u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \bigg/ \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du.$$

In K. Pearson's well known tables  $P$  is tabulated as a function of  $x$  and  $a$  in a sequence of double entry tables progressing by values of  $b$ . In contrast to this the present author gives to graphical accuracy a nomogramm on a single sheet which allows to find one of the four values,  $x, a, b, P$  if three of them are given. The nomogram makes use in a judicious way of certain approximations. Hilda Geiringer.

Abramowitz, Milton: Table of the integral  $\int_0^x e^{-u^2} du$ . J. Math. Physics 30, 162—163 (1951).

Die Tafel enthält für  $x = 0(0,01)2,50$  Zahlenwerte des Integrals mit 8 Dezimalen und zweite zentrale Differenzen. Für  $x > 2,5$  unterscheidet sich das Integral um weniger als eine Einheit der 8. Dezimale von  $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) - \int_0^\infty e^{-u^2} du$ .

Lineare Interpolation liefert im allgemeinen vier richtige Dezimalen. — Die Berechnung erfolgte für  $x \leq 1,5$  mit der Potenzreihe, für  $x > 1,5$  mittels numerischer Integration. Zur Probe wurde die asymptotische Entwicklung herangezogen.

Heinz Unger.

Emersleben, Otto: Numerische Werte des Fehlerintegrals für  $\sqrt{n}\pi$ . Z. angew. Math. Mech. 31, 393—394 (1951).

Für  $n = 1(1)11$  werden die Werte des Gaußschen Fehlerintegrals  $F(\sqrt{n}\pi)$  mit 15 Dezimalen (für  $n > 11$  ändert sich  $F$  innerhalb der angegebenen Stellenzahl nicht mehr) mitgeteilt. Die Berechnung, auf die für verschiedene Werte von  $n$  eingegangen wird, erfolgte durch Interpolation einer amerikanischen Tafel. — Mit den

angegebenen Zahlenwerten können gewisse Epsteinsche Zetafunktionen genauer als früher bestimmt werden. Mitgeteilt werden  $Z \begin{vmatrix} 00 \\ 00 \end{vmatrix} (1)_8$  und  $Z \begin{vmatrix} 00 \\ \frac{1}{2} \frac{1}{2} \end{vmatrix} (1)_8$  mit 13 Dezimalen. Heinz Unger.

**Bückner, Hans:** Ein neuer Typ einer Integrieranlage zur Behandlung von Differentialgleichungen. Arch. der Math. 2, 424—433 (1951).

Die modernen, außerordentlich teuren Differentialanalysatoren arbeiten mit einer Genauigkeit von etwa 0,1 bis 1<sup>0</sup>/<sub>100</sub>. Für viele Zwecke reicht aber eine Genauigkeit von 1% aus, die von dem hier beschriebenen, wesentlich billigeren „Integromat“ erreicht wird. Er ist wesentlich gekennzeichnet durch die Verwendung von Stufenintegratoren, die nur endlich viele Werte des Integranden zulassen. Dieser Stufenintegrator verwendet vier verschiedene Arten von normierten Teilgetrieben und läßt sich sowohl als Integrator wie als Summen- oder Funktionsgetriebe benutzen. Für die Grobintegration mit 27 Stufen sind 9 für die Feinintegration mit 287 Stufen 21 solcher Teilgetriebe nötig. Um Linearkombinationen zu bilden, werden sog. Summentriebe, die sich aus den gleichen Teilgetrieben zusammensetzen, verwendet. Die graphische Aufzeichnung der Resultate erfolgt ähnlich wie bei den großen Apparaten. Die einzelnen Getriebe sind durch elektrische Fernübertragung miteinander verbunden. Die Verwendung des Stufenintegrators wird im einzelnen beschrieben und als Beispiel die Rechenschaltung für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung angegeben. Friedrich-Adolf Willers.

## Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

### Wahrscheinlichkeitsrechnung:

**Kappos, Demetrios A.:** Über die Unabhängigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie. S.-Ber. math.-naturw. Kl., Bayer. Akad. Wiss. 1950, 157—185 (1951).

Verf. hat unlängst (dies. Zbl. 33, 382) — im Gegensatz zu dem manche Ungereimtheiten zeigenden mengentheoretischen Aufbau der W-(Wahrscheinlichkeits)Theorie — die W-Felder durch Boolesche Verbände mit totaladditivem, nichtnegativem, reduziertem Maß dargestellt. Demgemäß wurde auch der Begriff des Versuchs, der Zufallsveränderlichen sowie deren Ereignisskala, welche der Verteilungsfunktion gegenüber die Veränderliche eindeutig bestimmt, festgestellt. — In der vorliegenden Arbeit wird — mit Hilfe der Multiplikationstheorie von Maßverbänden — der Begriff der gegenseitigen Unabhängigkeit von Untersystemen eines W-Feldes bzw. von Versuchen und Zufallsveränderlichen behandelt. Jedes W-Feld mit empirischer, d. h. höchstens abzählbar viele Ereignisse enthaltender Basis wird mit einem isometrischen Untermaßverband des sog. Lebesgueschen eindimensionalen Maßverbandes  $\{\mathfrak{S}, \mu\}$  identifiziert. Diesen Maßverband bilden die Restklassen  $\mathfrak{Q}/\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$  des Booleschen Maßverbandes  $\mathfrak{Q}$  aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen des Intervalls  $[0,1]$  bezüglich des zugehörigen  $\sigma$ -Ideals  $\mathfrak{N}$  der Lebesgueschen Nullmengen. Damit wird die W-Theorie in W-Feldern mit empirischer Basis auf jene in  $\{\mathfrak{S}, \mu\}$  zurückgeführt. Für eine Folge  $\{X_i\}$  gegenseitig unabhängiger Zufallsveränderlichen über einem (möglicherweise nichtempirischen) W-Feld erzeugen aber die Ereignisskalen der Veränderlichen immer ein W-Feld mit empirischer Basis. Die Ereignisskala der Grenzveränderlichen von  $\{X_i\}$  in irgendeinem Sinne besteht dann aus Ereignissen dieses Feldes, so daß man die Grenzwertsätze mit den für das Feld  $\{\mathfrak{S}, \mu\}$  entwickelten Methoden beweisen kann. Tibor Szentmártony.

**Murti, V. N.:** On a problem in mathematical expectation. Math. Student 19, 67—68 (1951).

**Mulholland, H. P.:** On distributions for which the Hartley-Khamis solution of the moment-problem is exact. Biometrika 38, 74—89 (1951).

Hartley and Khamis (this Zbl. 29, 369) gave a numerical method of computing a table (at interval  $h$ ) of the cumulative frequency distribution  $\int_a^x f(\xi) d\xi$  from its given moments  $\mu'_r = \int_a^b f(\xi) \xi^r d\xi$ ,  $r = 0, 1, \dots, n$ . The author investigates



the theoretical basis of this procedure and shows that it is equivalent to a series expansion of  $f(x)$  similar to the Gram Charlier  $A$  expansion except that the Gaussian generating function of the latter series is replaced by the distribution of the mean of  $n$  rectangular variates. From this approach the author is able to deduce sufficient (although very restrictive) conditions for  $f(x)$  under which the procedure will yield exact results. In the general case two remainder terms are derived, one depending on the derivatives of  $f(x)$ , the other on its characteristic function. Finally some rules are offered for the optimum choice of the interval  $h$ . *H. O. Hartley.*

**Steyn, H. S.: On discrete multivariate probability functions.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A **54**, 23—30, Indagationes math. **13**, 23—30 (1951).

Die erzeugende Funktion der sogenannten hypergeometrischen Wahrscheinlichkeitsverteilung ist bekanntlich eine hypergeometrische Reihe der Form

$$F(a; b; c; t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(a+x-1)^{(x)} (b+x-1)^{(x)} \cdot t^x}{(c+x-1)^{(x)} \cdot x!},$$

wobei  $r^{(x)} = r(r-1) \cdots (r-x+1)$  ist. Verallgemeinernd betrachtet Verf. Reihen  $F(a; b_1, b_2, \dots, b_k; c; t_1, t_2, \dots, t_k)$  und die durch sie erzeugten mehrdimensionalen Verteilungen. Diese haben sämtlich lineare Regressionsgleichungen. Mit Hilfe von Integraldarstellungen für  $F$  und der erzeugenden Funktion der faktoriellen Momente werden diese selbst berechnet. Schließlich werden einige Beispiele behandelt, insbesondere die mehrdimensionale Verallgemeinerung der Pascalschen Verteilung und des Pólyaschen Schemas der ansteckenden Ereignisse.

*Günther Schulz.*

**Banerjee, D. P.: On some new recurrence formulae for cumulants of multivariate multinomial distributions.** Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A **34**, 20—23 (1951).

Wishart hat (dies. Zbl. **33**, 73) für die Kumulanten einer mehrdimensionalen Bernoullischen multinomialen Verteilung einerseits die Grundwahrscheinlichkeiten als Parameter enthaltende rekurrente Relationen gegeben, andererseits in einigen Fällen ihren Ausdruck in den (Rand- und) Grundwahrscheinlichkeiten selbst angegeben. — Verf. zeigt, wie eine Kumulante irgendeiner Ordnung bei den angegebenen Verteilungen durch ein Polynom in den Kumulanten niedriger Ordnung dargestellt werden kann. Es wird bemerkt, daß entsprechende Formeln auch für den Pascalschen Fall gelten.

*Tibor Szentmártony.*

**Steyn, H. S.: The Wishart distribution derived by solving simultaneous linear differential equations.** Biometrika **38**, 470—472 (1951).

**Dvoretzky, A. and J. Wolfowitz: Sums of random integers reduced modulo  $m$ .** Duke math. J. **18**, 501—507 (1951).

Bei der Untersuchung der auf die Werte  $j = 0, 1, \dots, m-1 \geq 1$  bezogenen Grenzverteilung  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(j) = P(j)$  der modulo  $m$  reduzierten Summen von  $n$  unabhängigen, ganzzahligen Zufallsveränderlichen  $X_k$  kann der Wertbereich der letzteren auf dieselben  $j$ -Werte beschränkt werden. So wird zunächst gezeigt, daß bei  $\Pr\{X_k = j\} = p_k(j)$  für die Gleichverteilung  $P(j) = 1/m$  die Bedingungen (\*)  $\left\{ \prod_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{m-1} p_n(j) \exp \frac{2\pi i r j}{m} \right\}_{r=1}^{m-1} = 0$  notwendig und hinreichend sind. Was die Güte der Konvergenz zu einer solchen Verteilung anbelangt, gilt mit  $\alpha_n = \max_j |P_n(j) - 1/m|$  übrigens  $\alpha_{n+1} \leq (S_{n+1} - I_{n+1}) \alpha_n$ , wo  $S_n$  bzw.  $I_n$  die Summen der  $[m/2]$  größten bzw. kleinsten unter den Zahlen  $p_n(0), \dots, p_n(m-1)$  bedeuten.

Daraus ergibt sich  $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - S_n) = \infty$  als hinreichend für  $P(j) = 1/m$ . Die — von einander abhängigen — Bedingungen (\*) werden für  $m = 2, 3, 4$  in handlichere umgestaltet. Aus (\*) können i. a. hinreichende, falls aber die Konvergenz zur Gleichverteilung durch Ersatz von endlich vielen  $X_k$  durch andere nicht gestört

wird, auch andere notwendige und hinreichende Bedingungen abgeleitet werden.

So z. B.  $\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (1 - Q_n(r)) = \infty \right\}_{r=1}^{m-1}$  mit  $Q_n(r) = \max_{0 \leq v \leq m-1} \sum_{rj \equiv v \pmod{m}} p_n(j)$ .

Hieraus folgt, daß, wenn  $m$  eine Primzahl ist, auch  $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \max_j p_n(j) \right) = \infty$  die Konvergenz zur Gleichverteilung sichert.

*Tibor Szentmártony.*

**Ríos, Sixto:** Über Konvergenz von Verteilungen und Konvergenz der Wahrscheinlichkeit nach. *Trabajos Estadist.* 2, 75—78 (1951) [Spanisch].

Reprint of a paper, already reviewed in this Zbl. 42, 374. *Stefan Vajda.*

**Loud, W. S.:** The probability of a correct result with a certain rounding-off procedure. *Proc. Amer. math. Soc.* 2, 440—446 (1951).

Bei  $n$  gleichmäßig verteilten Summanden kann mit Rücksicht auf das Resultat die Reihenfolge der Addition und der Abrundung nur zufällig vertauscht werden. Selbst wenn — wie gewöhnlich — bei der Abrundung  $m \geq 1$  Mehrstellen belassen werden und erst nach Addition auf die gewünschte Stellenzahl abgerundet wird. Theoretisch genügt es hier,  $m = 1$  zu nehmen, da einer Abrundung mit  $m$  Mehrstellen bei einer  $B$ -adisch geschriebenen Zahl die Abrundung mit einer Mehrstelle in der  $B^m$ -adischen Gestalt der betreffenden Zahl entspricht.  $P_n$  sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die beiden auf die nächsten Mehrfachen von  $B$  abgerundeten Summen  $n$  gleichmäßig verteilter,  $B$ -adisch geschriebenen Zahlen bzw. ihrer ganzzahligen Näherungen gleich sind, Verf. beweist nun, daß  $P_n =$

$\frac{2}{\pi B} \int_0^{\infty} \left( \frac{\sin t}{t} \right)^{n-1} \frac{\sin^2 Bt}{t^2} \cos^{1-g} t \, dt$  ist. Und zwar mit  $g = 0$  bzw. 1 bei geradem bzw. ungeradem  $B$ . Für große  $n$  bzw.  $B$ -Werte ergibt sich  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1/2} P_n = B(6/\pi)^{1/2}$

bzw. bei  $B > n/2$ :  $P_n = 1 - \int_0^{\infty} \frac{t^{n-1} - \sin^{n-1} t}{t^{n+1}} \cos^{1-g} t \, dt$ . Für große  $n$  ist hier das

Integral asymptotisch gleich  $(n\pi/6)^{1/2}$ .

*Tibor Szentmártony.*

**Grundy, P. M.:** The expected frequencies in a sample of an animal population in which the abundances of species are lognormally distributed. I. *Biometrika* 38, 427—434 (1951).

The author is concerned with a tabulation of frequencies for a particular case of a generalized Poisson distribution occurring in animal ecology. — He assumes that counts,  $r$ , from different species are independent Poisson variates with mean  $m$ , but that these means  $m$ , the abundance of the species, are themselves variables and follow a lognormal distribution

$$f(m) = (m \sigma \sqrt{2\pi})^{-1} \exp \left\{ - \left( \ln \frac{m}{a} \right)^2 / 2\sigma^2 \right\}$$

so that the frequency of  $r$  counts is given by  $\Phi_r = \int_0^{\infty} \frac{e^{-m} m^r}{r!} f(m) \, dm$ . The paper

gives a detailed numerical study of this integral resulting in Tables of  $1 - \Phi_0$  and  $\Phi_1$  to four decimals for  $\sigma^2 = 2$  (1) 16 and  $\log_{10} a = -2,0$  (0,25) 3,0 Tables of  $\Phi_r$  for  $r \geq 1$  are announced. No method of fitting the distribution is proposed.

*H. O. Hartley.*

**Tanner, J. C.:** The delay to pedestrians crossing a road. *Biometrika* 38, 383—392 (1951).

Ein Fußgänger trifft auf eine Einbahnstraße, auf der die Anzahl der in der Zeit  $t$  vorüberfahrenden Fahrzeuge nach dem Poissongesetz mit dem Mittelwert  $Nt$  verteilt ist. Er will die Straße nur dann überqueren, wenn im darauffolgenden festen Zeitintervall  $I$  kein Fahrzeug vorbeikommt. Die Wahrscheinlichkeit  $P(T)$ ,



daß er dann länger als die Zeit  $T$  warten muß, ist

$$P(T) = \sum_{s=0}^{\lfloor T/I \rfloor + 1} (-1)^s e^{-sNI} \frac{N^s (T - sI + I)^s}{s!} + \sum_{s=1}^{\lfloor T/I \rfloor + 1} (-1)^s e^{-sNI} \frac{N^{s-1} (T - sI + I)^{s-1}}{(s-1)!},$$

wofür Verf. drei Herleitungen angibt. Ferner werden für den Fall, daß in der Zeit  $t$  durchschnittlich  $q$  Fußgänger einzeln eintreffen, die Wahrscheinlichkeiten, daß gerade  $\alpha$  Fußgänger beim Vorbeifahren eines Fahrzeugs warten, daß gerade  $\beta$  Fußgänger hinter einem Fahrzeug die Straße kreuzen u. a. berechnet. Auch wird untersucht, wie berücksichtigt werden kann, daß die Fußgänger in Gruppen eintreffen können, daß der Verkehr in beiden Richtungen gestattet ist und daß jeder Fußgänger ein individuelles Intervall  $I$  besitzt. Die Ergebnisse werden mit praktischen Erfahrungen verglichen.

*Edward Walter.*

**Borel, Émile:** Sur la transmission d'un caractère héréditaire dans les générations successives. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1241—1243 (1951).

Considered are  $n$  married male adults bearing the same family name. It is assumed that each couple has two children each living long enough for reproduction, and that the probability for a male or a female child is equal. It is asked to find the probability that after a certain number of generations these  $n$  men have  $K$  male descendants, i. e.  $K$  descendants bearing the same family name, assuming that the above given conditions remain the same. Numerical results — which are interesting — are given for the first and the second generation. — The general formulas are obviously as follows: Denote by  $P_n^{(r)}(K)$  the probability that the original group of  $n$

men have  $K$  descendants in the  $r^{\text{th}}$  generation. Then  $P_n^{(r+1)}(K) = \sum_{x=1}^{2n} P_n^{(r)}(x) P_x^{(1)}(K)$ ,

( $r = 1, 2, \dots$ ), where  $P_n^{(1)}(x) = \binom{2n}{x} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$ . As for applications it seems to the referee that the assumption of unchanged fecundity through the generations is not realistic. Experience shows that families are dying not so much for lack of male descendants but for lack of any descendants.

*Hilda Geiringer.*

## Statistik:

**Freudenthal, H.:** Das Aufkommen der statistischen Denkweise in der modernen Wissenschaft. Natuurk. Voordracht., n. Reeks **29**, 57—65 (1951) [Holländisch].

**Wald, Abraham:** Über die Prinzipien des statistischen Rückschlußverfahrens. Trabajos Estadíst. **2**, 113—148 (1951) [Spanisch].

This is a translation of the author's „On the Principles of Statistical Inference“, Notre Dame, 1942 und contains his lectures given in February 1941 at the University of Notre Dame. The chapter headings are: I. Introduction, II. The Neyman-Pearson theory of testing a statistical hypothesis, III. R. A. Fisher's theory of estimation, IV. The theory of confidence intervals, V. Asymptotically most powerful tests and asymptotically shortest confidence intervals, VI. Outline of a general theory of statistical inference. The last chapter contains the beginnings of the author's theory of statistical decision functions.

*Stefan Vajda.*

**Rohde, K.:** Über die Anwendung statistischer Methoden in der Fernsprechtechnik. II. Mitteil.-Bl. math. Statistik **3**, 143—154 (1951).

**Kunisama, Kiyonori:** A remark on the dispersion. Kodai math. Sem. Reports **1951**, 71—72 (1951).

**Quenouille, M. H.:** The variate-difference method in theory and practice. Revue Inst. internat. Statist. **19**, 121—129 (1951).

**Zinger, A. A.:** Über unabhängige Stichproben aus einer normalen Gesamtheit. Uspechi mat. Nauk **6**, Nr. 5 (45), 172—175 (1951) [Russisch].

Umkehrung des bekannten R. A. Fisherschen Satzes, daß Stichproben-Mittel-

wert und -Varianz von Stichproben aus normal verteilter Gesamtheit voneinander unabhängig sind. Es wird bewiesen: Sind für  $n$  unabhängig voneinander der gleichen Verteilung  $F(x)$   $dx$  entnommene Werte  $x_1, \dots, x_n$  Stichproben-Mittelwert  $\bar{x} = \sum x_j/n$  und -Varianz  $s^2 = \sum (x_j - \bar{x})^2/n$  voneinander stochastisch unabhängig, so ist die Verteilungsfunktion  $F(x)$  notwendig normal; dasselbe gilt, wenn an Stelle von  $\bar{x}$  und  $s^2$  die Ausdrücke  $\tilde{x} = \sum \alpha_j x_j$  und  $\sum x_j^2 - \tilde{x}^2$  (mit konstanten  $\alpha_j \geq 0$  und  $\sum \alpha_j^2 = 1$ ) voneinander stochastisch unabhängig sind. Unter Verzicht auf die von E. Lukacs [Ann. math. Statistics 13, 91 (1942)] vorausgesetzte Existenz des 2-ten Moments von  $F(x)$  benötigt Verf. nur die zweifache Differenzierbarkeit der Trans-

formierten  $f(t) = E(e^{itx - x^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - x^2} dF(x)$ . Maria-Pia Geppert.

**Feller, William:** The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables. Ann. math. Statistics 22, 427—432 (1951).

If  $\{X_k\}$  is a sequence of identically and independently distributed random variables with mean zero and variance unity, and  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , then  $\max(0, S_1, \dots, S_n) - \min(0, S_1, \dots, S_n)$  is the range of the accumulated sums  $S_n$  and their adjusted range is obtained by replacing  $S_k$  by  $(S_k - k S_n/n)$ . The author derives the exact distributions of the ranges of the continuously changing normal variable  $S(t)$  subject to a process of ordinary diffusion. In this case the mean range and mean adjusted range are  $2(2n/\pi)^{\frac{1}{2}}$  and  $(\frac{1}{2}n\pi)^{\frac{1}{2}}$  respectively. and the variances are  $4n(\log 2 - 2/\pi)$  and  $(\pi^2/6 - \pi/2)n$  respectively. Example show that even for moderately large  $n$  these parameters are fairly good approximations to those of the ranges of the cumulative sums as originally defined, when each  $X_k$  assumes only the values  $\pm 1$  with equal probability, whereas for large  $n$  the distributions of the ranges for the originally defined  $S_n$  and for the continuously changing variable  $S(t)$  will be practically identical, whatever the distribution of the  $X_k$ .

Stefan Vajda.

**Nabeya, Seiji:** Note on the moments of the transformed correlation. Ann. Inst. statist. Math. 3, 1 (1951).

**Steel, Robert G. D.:** Minimum generalized variance for a set of linear functions. Ann. math. Statistics 22, 456—460 (1951).

Let  $n$  variates with finite first and second moments and with non-singular covariance matrix be partitioned into  $k$  vector variates. The author shows how the coefficients can be calculated which combine the components of the  $k$  vectors into  $k$  variates with minimum generalised variance, when each of them has unit variance.

Stefan Vajda.

**Deemer, Walter L. and Ingram Olkin:** The Jacobians of certain matrix transformations useful in multivariate analysis. Biometrika 38, 345—367 (1951).

This is mainly an expository paper based on a course on multivariate analysis given by P. L. Hsu at the University of North Carolina during 1947, organised by the authors in logical form and published with Hsu's approval. — Let  $X, Y$ , be two matrices having the same number of  $n$  independent elements  $x_1, \dots, x_n$  and  $y_1, \dots, y_n$ , and let the matrices satisfy the equation  $Y = f(X)$ . The authors are concerned with the evaluation of the Jacobian  $\partial(y_1 \dots y_n)/\partial(x_1 \dots x_n)$  for many of the transformations  $f(X)$  most used in multivariate work. The examples include some transformations (see Theorem 4.5) used by Hsu in the derivation of the distribution of the roots of determinantal equations. In the cases in which  $f(x)$  is non-linear the following techniques are noteworthy: Taking differentials in both, the  $x_i$  and the  $y_i$ , the relation  $Y = f(X)$  becomes a linear matrix equation for the differentials with a Jacobian identical to the original Jacobian. In certain cases it is possible to transform to new variables so that the Jacobian can be evaluated as a product of two, more manageable Jacobians.

H. O. Hartley.



**Hogg, Robert V.:** On ratios of certain algebraic forms. *Ann. math. Statistics* **22**, 567—572 (1951).

Consider two random variables  $x$  and  $y$  and let  $P(y \leq 0) = 0$ . Assuming that the m. g. f.  $M(u, t) = E(\exp(ux + ty))$  exists for  $-T < u, t < T$ , the author proves the following theorem: For  $y$  and  $r = x/y$  to be stochastically independent, it is necessary and sufficient that

$$\frac{\partial^k M(0, t)}{\partial u^k} \equiv \frac{\partial^k M(0, 0)}{\partial u^k} \cdot \frac{\partial^k M(0, t)}{\partial t^k} \left( \frac{\partial^k M(0, 0)}{\partial t^k} \right)^{-1} \text{ for } k = 0, 1, 2, \dots$$

It then follows that any moment of  $r$  is equal to the ratio of the corresponding moments of  $x$  and  $y$ . The result is applied to ratios of linear forms. *Stefan Vajda.*

**Rao, C. Radhakrishna:** A theorem in least squares. *Sankhyā* **11**, 9—12 (1951).

Let  $y_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) be independent observations from normal populations with means  $E(y_i) = \sum_{j=1}^m a_{ij} t_j$  and common variance  $\sigma^2$ . Let  $R^2$  be the minimum, with respect to  $t_1, \dots, t_m$ , of  $\sum_i [y_i - E(y_i)]^2$ , subject to the side-conditions

$\sum_{j=1}^m \Phi_{lj} t_j = g_l$  ( $l = 1, \dots, k$ ). Let  $r$  be the rank of  $(a_{ij})$  and  $k - s$  the rank of the matrix  $(\sum_j \Phi_{lj} \gamma_{tj})$ , where  $\gamma_t = (g_{t1}, \dots, g_{tm})$ ,  $t = 1, \dots, m - r$ , are mutually

orthogonal vectors which are also orthogonal to all vectors  $(a_{i1}, \dots, a_{im})$ . The author shows that  $R^2/\sigma^2$  is distributed as  $\chi^2$  with  $n - r + s$  degrees of freedom. The same theorem has already been proved by him, in different ways, in *Sankhyā* **7**, 237 (1946).

*Stefan Vajda.*

**Cook, M. B.:** Two applications of bivariate  $k$ -statistics. *Biometrika* **38**, 368—376 (1951).

In a previous paper by the same author [*Biometrika* **38**, 179—195 (1951)] the derivation of bivariate  $k$ -statistics and product formulae up to weight 6 was discussed. In the present paper these formulae are used to find approximations to sampling distributions of the correlation coefficient and regression coefficients in terms of the cumulants of the bivariate parent. The results depend on certain binomial expansions of the denominators of the statistics considered, the justification of which is not given in detail.

*H. O. Hartley.*

**Thompson, H. R. and I. D. Dick:** Factorial designs in small blocks derived from orthogonal latin squares. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **13**, 126—130 (1951).

The author starts from a  $p \times q$  design with blocks of  $q$  plots ( $q < p$ ,  $p$  a prime or power of a prime) and derives from it a  $p \times r \times s$  design ( $rs = q$ ), a  $p \times q \times q$  design and, when  $q$  is a power of a prime, a  $p \times q \times r$  design, all these designs having blocks of  $q$  plots, as before.

*Stefan Vajda.*

**Schützenberger, M. P.:** An extension problem in the theory of incomplete block designs. *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **13**, 120—125 (1951).

Let  $A$  be the incidence matrix for an incomplete block design, i. e. a  $v \times b$  matrix whose elements are 0 or 1 and satisfy the following relations:  $\sum_{i=1}^b a_{ij} = r$

for all  $j$ ,  $\sum_{j=1}^v a_{ij} = k$  for all  $i$  and  $\sum_{i=1}^b a_{ij} a_{ij'} = \lambda$  whenever  $j \neq j'$ . If  $A'$  is another incidence matrix and a submatrix of  $A$ , then  $A$  is an „extension“ of  $A'$ . R. C.

Bose (this *Zbl.* **23**, 1) has considered the two cases of  $A = \begin{pmatrix} A' & C \\ B & D \end{pmatrix}$  where  $B$  has only unit elements and  $D$  only zero elements (block intersection) and where  $B$  has only zero elements and  $D$  only unit elements (block section). In the present paper the author considers two more general methods, which he calls „algebraic“ and „dimension“ extensions.

*Stefan Vajda.*

Fraser, D. A. S.: **Sequentially determined statistically equivalent blocks.** *Ann. math. Statistics* **22**, 372—381 (1951).

Nach Wald und Tukey kann man auf Grund einer Stichprobe von  $n$  Beobachtungen bei einer  $m$ -variablen Ausgangsverteilung den  $m$ -dimensionalen Verteilungsraum durch eine Folge von  $n$  willkürlich vorgegebenen Funktionen in  $n+1$  äquivalente Blöcke  $B_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ) aufteilen. Diese Blöcke sind Teilbereiche, deren Bedeckungen  $\int_{B_i} dF$  gleiche und von der Ausgangsverteilung unabhängige Verteilungsfunktionen besitzen. Verf. zeigt hierzu für stetige und unstetige Ausgangsverteilungen, daß die einzelnen Funktionen nicht notwendig vor der Entnahme der Stichprobe festgelegt werden müssen, sondern sukzessiv von den schon bestimmten Blöcken abhängen können, ohne daß dadurch die Verteilung der Bedeckungen geändert wird.

*Edward Walter.*

Box, G. E. P. and K. B. Wilson: **On the experimental attainment of optimum conditions.** *J. Roy. statist. Soc., Ser. B* **13**, 1—38 and discussion 38—45 (1951).

Given responses of (say) a chemical process  $y(x_1, \dots, x_k) \equiv y(X)$  depending on a number of  $k$  factors  $(x_1, \dots, x_k) \equiv (X)$  and subject to statistical errors of determination, the authors are concerned with finding that factor point  $(\hat{X}) = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_k)$  for which the yield  $y(\hat{X})$  is a maximum. The authors technique may be described as a statistical method of steepest ascent: — Starting from a trial centre  $(X_0) = (x_{01}, \dots, x_{0k})$  trial steps  $(X + \Delta X)$  are made. From these estimates of the partial differentials  $\partial y / \partial x_i$  are computed and a direction of steepest ascent estimated from the condition  $x_i = \mu \partial y / \partial x_i$ . Proceeding from  $(X_0)$  in this direction of steepest ascent a new trial centre is set up at a point  $(X_1)$  estimated to yield maximum response, and here the procedure is repeated. As the maximum (or „local maximum“) is approached it is necessary to generalise the procedure to 2nd differentials for an investigation of the „near stationary region“. The most economic choice of the trial steps near each trial centre gives rise to problems of optimum design for which new solutions are developed. The procedure is illustrated with examples involving up to 5 factors.

*H. O. Hartley.*

Hayashi, Chikio, FumiYuki Maruyama and Masatsugu D. Ishida: **On some criteria for stratification.** *Ann. Inst. statist. Math.* **2**, 77—86 (1951).

The authors are concerned with reducing the variance of a survey estimate of a variable  $y$ 's population mean by stratified sampling. They assume that a second variable  $x$  (the „label“, correlated with  $y$ , is attached to each sampling unit, and further, that some prior knowledge is available concerning the distribution of  $x$  [ $f(x)$  say]. The stratification considered is then by categories of  $x$ , and the dividing points for these categories (strata) are then decided on by minimisation of the variance of  $\bar{x}$ , or similar principles. Examples are worked for normal and rectangular  $f(x)$ . The english style and rendering is at times obscure.

*H. O. Hartley.*

Bartlett, M. S.: **The goodness of fit of a single hypothetical discriminant function in the case of several groups.** *Ann. Eugenics* **16**, 199—214 (1951).

Verf. knüpft an frühere eigene Arbeiten (u. a.: dies. Zbl. **32**, 295; **30**, 404) sowie R. A. Fishers Arbeiten über die Diskriminanzanalyse an, die Verf. der multivariablen Analyse (Korrelations- und Regressionsproblem zwischen mehreren Variablen) als Spezialfall einordnet. An zwei von dort übernommenen Beispielen führt Verf., nach Bestimmung der den Quotienten zweier Kovarianz-Matrizen zum Maximum machenden linearen Trennfunktion (discriminant function) mit Hilfe der größten kanonischen Korrelation (Hotelling) und Prüfung der Signifikanz derselben mittels des exakten Likelihood-Kriteriums bzw. approximativem  $\chi^2$ -Test, die Prüfung des restlichen Zusammenhanges nach Ausschaltung des linearen Einflusses der ersten kanonischen Variablen aus; und zwar approximativ mittels  $\chi^2$ -Testen, sodann exakt mittels geeigneter multiplikativer Zerlegungen des Likelihood-Kri-



teriums und Anwendung des  $F$ -Testes. Für die Koeffizienten der hypothetischen Trennfunktionen erhält man entsprechend approximative bzw. exakte Confidenzgrenzen.

*Maria-Pia Geppert.*

**David, F. N. and N. L. Johnson:** A method of investigating the effect of non-normality and heterogeneity of variance on tests of the general linear hypothesis. *Ann. math. Statistics* **22**, 382—392 (1951).

In Analysis of Variance tests the ratio of two sums of squares is compared with values of the  $F$ -distribution. The authors indicate a method for investigating the influence of deviations from the usual assumptions on the power function of such tests. In particular, they consider the cases when the errors are either not normally distributed or when their variances are not equal. They proceed by finding the cumulants of a linear function of the two sums of squares (rather than their ratio), where one coefficient depends on the level of significance. These cumulants depend, of course, on the parameters of the true error distribution. They suggest that, as a rule, the linear function is best represented by a Pearson Type IV curve.

*Stefan Vajda.*

**David, F. N. and N. L. Johnson:** The sensitivity of analysis of variance tests with respect to random between groups variation. *Trabajos Estadíst* **2**, 179—188 und spanische Zusammenfassung. 188 (1951).

The authors investigate the distribution of the analysis of variance  $F$ -test in a simple classification of  $N$  observations in  $s$  groups of  $n_t$  observations  $t = 1, 2, \dots, s$ . This test is given by  $F = S_1(N-s)/S_2(s-1)$  where  $S_1$  and  $S_2$  are the „Between groups“ and „Within groups“ sums of squares. It is assumed that the observations in the  $t$ -th group follow a (non-normal) distribution for which the low order cumulants are known. With the help of these cumulants the authors evaluate those of the weighted sums of squares total  $S_1 + a S_2$  where  $a = -(s-1)F_\alpha/(N-s)$  and  $F_\alpha$  is the normal theory  $100\alpha$  percentage point. An approximation to the distribution of  $S_1 + a S_2$  is then obtained with the help of (i) a Gram Charlier series and (ii) a lognormal distribution fitted to the exact cumulants and with the help of these approximate probabilities

$$P\{S_1 + a S_2 \geq 0\} = P\{S_1(N-s)/S_2(s-1) \geq F_\alpha\}$$

are obtained. The comparison of these probabilities with  $\alpha$  provides some evidence on the effect of nonnormality on the  $F$ -test, and similar results are obtained for the power function. The approximations involved are checked in a few special cases by comparison with exact distributions.

*H. O. Hartley.*

**Isaacs, Stanley L.:** On the theory of unbiased tests of simple statistical hypotheses specifying the values of two or more parameters. *Ann. math. Statist.* **22**, 217—234 (1951).

Zur Prüfung der Nullhypothese, ob der einzige Parameter  $\theta$  der Verteilungsfunktion der Zufallsveränderlichen  $X$  einer statistischen Gesamtheit den Wert  $\theta^0$  annimmt, gibt das Neyman-Pearsonsche Verfahren einen kritischen Bereich  $w$  für die  $n$ -gliedrigen Stichproben  $x(x_1, \dots, x_n)$  so an, daß bei  $x \in w$  die Nullhypothese abgelehnt wird. Das Verfahren heißt unverfälscht (unbiased), wenn  $P_w(\theta) = \text{Prob}\{x \in w \mid \theta\}$  für  $\theta = \theta^0$  ein relatives Minimum besitzt. Ein örtlich bestes unverfälschtes  $w_0$  vom Typ  $A$  ergibt sich bei vorgeschriebener Wahrscheinlichkeit der Ablehnung der richtigen Hypothese (ohne Rücksicht auf die Möglichkeit der Annahme einer unrichtigen) bei einem solchen  $w_0$ , für welches die Krümmung der  $P_{w_0}(\theta)$ -Kurve in  $\theta^0$  die größte ist. Es gelang dem Verf. nun, dies Verfahren auf den Fall mehrerer Parameter auszudehnen. Dabei wird von einem  $w_0$  verlangt, daß — unter entsprechenden Differenzierbarkeitsbedingungen — die Machtfunktion  $P_{w_0}(\theta_1, \theta_2)$  für  $\theta_1 = \theta_1^0, \theta_2 = \theta_2^0$  ein Minimum und bei vorgeschriebener Wahrscheinlichkeit der Ablehnung der richtigen Hypothese die Gaußsche Krümmung

der  $P_{w_0}(\theta_1, \theta_2)$ -Fläche für  $\theta_1^0, \theta_2^0$  ein Maximum besitzen soll. Es gelingt auch, das fundamentale Lemma von Neyman und Pearson zur Auffindung von solchen Bereichen zu verallgemeinern sowie ihre Invarianz bei differenzierbaren Umwandlungen des Parameterraumes zu zeigen. Die Note schließt mit der Verallgemeinerung auf  $k > 2$  Parameter sowie zwei Anwendungen auf normale Verteilungen. Bei einer zweidimensionalen mit unbekannten Erwartungswerten mit vollem Erfolg, bei einer eindimensionalen mit unbekanntem Erwartungswert und Streuungsquadrat nur für große Stichproben.

*Tibor Szentmártony.*

**Frank, P. and J. Kiefer:** Almost subminimax and biased minimax procedures. Ann. math. Statistics **22**, 465—468 (1951).

The author constructs simple examples to illustrate the fact that a slight deviation from the minimax procedure of a decision problem may increase the maximum risk only slightly, while at the same time reducing some of the other risks very considerably. This feature is used to give an intuitive definition of the concept „almost subminimax“. They also point out that a minimax procedure may be biased (i. e. the probability of certain decisions may be smaller when they are correct than when they are not), when more than two possible decisions are available. *Stefan Vajda.*

**Chernoff, Herman:** A property of some type  $A$  regions. Ann. math. Statistics **22**, 472—474 (1951).

The author shows, by an example, that critical regions  $w_1$  and  $w_2$  can be constructed of sizes  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  ( $\alpha_1 > \alpha_2$ ) respectively, which are uniquely specified (except for sets of measure zero) but, contrary to expectation, such that  $w_1$  does not contain  $w_2$ . This means that samples may be found which lead to the rejection of a hypothesis for a selected level  $\alpha_2$ , but not for the level  $\alpha_1$ , although the overall probability of rejection has been increased.

*Stefan Vajda.*

**Stein, C. M.:** A property of some tests of composite hypotheses. Ann. math. Statistics **22**, 475—476 (1951).

The author shows how to construct an example in which a composite hypothesis  $H_0$  is tested against a simple alternative and where for any  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  satisfying  $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$  unique most powerful critical regions  $w_1$  and  $w_2$  of sizes  $\alpha_1$  and  $\alpha_2$  respectively exist such that  $w_2$  does not contain  $w_1$ . (Comp. the paper by H. Chernoff reviewed above.) In this example  $H_0$  consists of two simple hypotheses, but the author points out that it is also possible to obtain cases exhibiting the same property where a continuum of simple hypotheses is being tested.

*Stefan Vajda.*

**Nandi, H. K.:** On type  $B_1$  and type  $B$  regions. Sankhyā **11**, 13—22 (1951).

Zur Prüfung der zusammengesetzten Hypothese  $H_0$ , daß der erste unter den Parametern  $\gamma, \theta (\theta_1, \dots, \theta_k)$  der Wahrscheinlichkeitsdichte  $p(x; \gamma, \theta)$  einer Stichprobe  $x(x_1, \dots, x_n)$  aus einer statistischen Gesamtheit den Wert  $\gamma_0$  bei beliebigen Werten der übrigen annimmt, wird bekanntlich ein kritischer Bereich  $w$  der  $x$  so gewählt, daß  $x \in w$  zur Ablehnung von  $H_0$  führt. Dies  $w$  ist vom Typ  $B_1$  bzw.  $B$ , wenn einerseits für  $\gamma = \gamma_0$  bei allen  $\theta$ :  $P(w; \gamma, \theta) = \int_w p(x; \gamma, \theta) dx$

einen vorgeschriebenen Wert und  $\partial P / \partial \gamma$  den Wert Null annimmt, andererseits  $P$  bei jedem  $\gamma$  bzw.  $\partial^2 P / \partial \gamma^2$  bei  $\gamma_0$  für das gewählte  $w$  gegenüber den anderen einen Höchstwert besitzt. — Für die Existenz von solchen Bereichen findet Verf. folgende

hinreichende Bedingung:  $p(x; \gamma, \theta) = \frac{f(x)}{h(\gamma, \theta)} \exp \left\{ \sum_{j=1}^{k+1} g_j(\gamma, \theta) T_j \right\}$  bzw. einfach

$g_{k+1}(x, \gamma)$  im letzten Glied der Summe. Hier besitzen a) die  $k+1$  bzw.  $k$  Schätzfunktionen  $T_j(x)$  der Parameter Festwerte über unabhängigen  $(n-1)$ -dimensionalen Flächen, b) die  $k$  ersten  $g_j$  sind für  $\gamma_0$  unabhängige Funktionen von  $\theta$  und  $g_{k+1}(\gamma_0, \theta)$  ist eine von  $\theta$  unabhängige Konstante bzw.  $g_{k+1}(x, \gamma)$  ist zweimal nach  $\gamma$  differenzierbar in  $\gamma_0$ , c) die  $g_j(\gamma, \theta)$  sind zweimal differenzierbar nach  $\gamma$  und die  $k$  ersten



$g_j$  analytisch in  $\theta$  bei  $\gamma_0$ , d)  $P(w; \gamma, \theta)$  ist bei jedem  $w$  unter dem Integralzeichen zweimal nach  $\gamma$  und für  $\gamma_0$  unendlich oft nach den  $\theta_m$  differenzierbar. Schließlich wird ein kritischer Bereich  $w(T_1, \dots, T_k)$  vom Typ  $B_1$  durch gewisse Ungleichungen  $T_{k+1} \geq c_1$  oder  $\leq c_2$  festgelegt.

*Tibor Szentmártony.*

**Chand, Uttam: Test criteria for hypotheses of symmetry of a regression matrix.** Ann. math. Statistics **22**, 513—522 (1951).

Einer  $p$ -dimensional mit Streuungsmatrix  $\sigma = \|\sigma_{ij}\|$  normal verteilten Gesamtheit, deren Erwartungswert-Matrix sich als  $\eta = \|\eta_{i\alpha}\| = \beta X$  durch die fixierte Variable  $X = \|x_{i\alpha}\|$  ausdrückt, werde eine  $N$ -gliedrige Stichprobe  $Y = \|y_{i\alpha}\|$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) entnommen. Die Hypothese  $H_0$  der Symmetrie der Regressionsmatrix  $\beta$  wird im Falle  $p = 2$  ( $H_0: \beta_{12} = \beta_{21}$ ) mittels des gegen kontragrediente Transformationen von  $x$  und  $y$  invarianten Parameters  $U = (b_{12} - b_{21})^2 \cdot (c_{22}s_{11} + c_{11}s_{22} - 2c_{12}s_{12})^{-1}$  geprüft, gebildet aus den normal-verteilten Stichproben-Regressionskoeffizienten  $b_{ij}$ , den Wishart-verteilten, auf je  $n$  Freiheits-

graden beruhenden Schätzungen der  $\sigma_{ij}$ ,  $n s_{ij} = \sum_{\alpha=1}^N (y_{i\alpha} - Y_{i\alpha})(y_{j\alpha} - Y_{j\alpha})$ , den Stichproben-Regressionsfunktionen  $Y_{i\alpha}$  und den mit der Transponierten  $X'$  gebildeten Koeffizienten  $|c_{ij}| = (XX')^{-1}$ . Verf. bestimmt die eine hypergeometrische Funktion enthaltende Verteilung von  $U$  bei Geltung von  $H_0$  und die Potenz (power function) von  $U$  in Abhängigkeit von dem „standardisierten“ Abstand  $\delta = (\beta_{12} - \beta_{21})(c_{22}\sigma_{11} + c_{11}\sigma_{22} - 2c_{12}\sigma_{12})^{-\frac{1}{2}}$  und deutet die in Analogie zu Hotelings Ausdehnung des Student-Quotienten erfolgende Verallgemeinerung der Betrachtung auf beliebiges  $p$  an, für welches jedoch die Verteilung von  $U$  noch nicht gefunden ist.

*Maria-Pia Geppert.*

**Blomqvist, Nils: Some tests based on dichotomization.** Ann. math. Statistics **22**, 362—371 (1951).

Verf. hatte früher (dies. Zbl. **40**, 224) einen Test zur Prüfung der Unabhängigkeit zwischen den Komponenten zweivariable Beobachtungen  $(x_{i1}, x_{i2})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) untersucht, wenn die Komponenten nur die Werte 0 oder 1 annehmen oder zu diesen Werten reduziert werden. In dieser Arbeit wird der Test auf  $m$ -variable Beobachtungen  $(x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) erweitert, wieder nur mit  $x_{ij} = 0$  oder 1. Als Prüfmaß verwendet er  $S = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^m x_{ij} - \sum_{j=1}^m p_j \right)^2$

mit  $n p_j = \sum_{i=1}^n x_{ij}$ . Es wird gezeigt, daß  $S$  bei festem  $m$  und  $p_j$  mit wachsendem  $n$  der Normalverteilung und geeignete Funktionen von  $S$  bei festem  $n$  und  $p_j$  mit wachsendem  $m$  der  $\chi^2$ -Verteilung und bei festem  $m$  und  $\lambda_j = \sqrt{n} p_j$  mit wachsendem  $n$  der Poissonverteilung folgen. Die genaue Verteilung ist für den Spezialfall  $p_j = \frac{1}{2}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) für einige  $m$  und  $n$  tabelliert. Dieser Test ist zunächst zur Prüfung von positiven Korrelationen zwischen allen Variablen gedacht. Eine Variation des Tests für den Fall, daß negative Korrelationen auftreten können, wird angegeben.

*Edward Walter.*

**Dresselaers, Céline et Paul P. Gillis: Un test séquentiel unilatéral.** Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 713—727 (1951).

The test of the hypothesis that the value of a parameter  $\theta$  equals  $\theta_0$ , when the alternatives are  $\theta > \theta_0$  is based on the value of  $(\partial \log p_n(x, \theta) / \partial \theta)_{\theta = \theta_0}$  where  $p_n(x, \theta)$  is the likelihood of the observation  $x_1, \dots, x_n$ . It is analogous to Wald's sequential probability ratio test, from which it can be derived by a limiting process. The author calculates approximately the operating function and proves (within the limits of his approximation) that, if  $\theta = \theta_0$  is true, the expected number of observations is not larger than that for any test with the same level and the same slope of the power function in  $\theta_0$ . (Cf. an analogous theorem for the sequential probability ratio test by Wald and Wolfowitz, this Zbl. **32**, 173.)

*Stefan Vajda.*

**Wolfowitz, J.: On  $\varepsilon$ -complete classes of decision functions.** Ann. math. Statistics **22**, 461—465 (1951).

Verf. beweist einen Satz zu der von A. Wald entwickelten Theorie der Entscheidungsfunktionen. Zu einem festen  $\varepsilon$  wird eine Klasse  $C$  von Entscheidungsfunktionen  $\delta$  „essentially  $\varepsilon$ -complete“ genannt, wenn es zu jedem  $\delta_1 \notin C$  ein  $\delta_2 \in C$  gibt, das zu  $\delta_1$  entweder  $\varepsilon$ -äquivalent ist [ $\sup_F |r(F, \delta_1) - r(F, \delta_2)| \leq \varepsilon$ ,  $r(F, \delta)$  ist Risikofunktion,  $F$  zugelassene Verteilungsfunktion] oder zu  $\delta_1$   $\varepsilon$ -besser ist [ $r(F, \delta_2) \leq r(F, \delta_1) + \varepsilon$  für alle  $F$ ]. Es wird gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen (u. a. die Voraussetzungen 3.3—3.7 in A. Walds Statistical decision functions, New York 1950, dies. Zbl. **40**, 364) stets eine derartige Klasse existiert, die nur endlich viele Elemente enthält.

*Edward Walter.*

**Noether, Gottfried E.: On a connection between confidence and tolerance intervals.** Ann. math. Statistics **22**, 603—604 (1951).

**Klein, Lawrence R.: Estimating patterns of savings behavior from sample survey data.** Econometrica **19**, 438—454 (1951).

**Fraser, D. A. S. and R. Wormleighton: Nonparametric estimation. IV.** Ann. math. Statistics **22**, 294—298 (1951).

Eine Ergänzung bzw. drei Berichtigungen zu Teil I [H. Scheffé and J. W. Tuckey, Ann. math. Statistics **16**, 187—192 (1945)], II und III (Tuckey, dies. Zbl. **29**, 155, **32**, 295). Hier mag die Ergänzung erwähnt werden. Es sei  $F(x)$  die Verteilungsfunktion einer eindimensionalen unstetigen Gesamtheit und  $x_1 \leq \dots \leq x_n$  eine ihr entnommene geordnete Stichprobe. Dann fällt die Wahrscheinlichkeit für  $F(x_q + 0) - F(x_p - 0)$  bzw.  $F(x_q - 0) - F(x_p - 0) + \partial[F(x_q + 0) - F(x_q - 0)] \geq \beta$  bei  $x_p \neq x_{p-r}$  und  $x_q \neq x_{q+s}$  bzw.  $= x_{q+s}$  sowie  $0 < \partial < 1$  zwischen  $1 - \alpha_{q-p+r+s}$  und  $1 - \alpha_{q-p}$ . Hierbei bezeichnet  $\alpha_{b-a}$  die unvollständige Beta-Funktion  $I_\beta(b-a, n-a+b+1)$ .

*Tibor Szentmártony.*

**Ogawa, Junjiro: On a confidence interval of the ratio of population means of a bivariate normal distribution.** Proc. Japan Acad. **27**, 313—316 (1951).

The author wishes to construct a confidence interval for the ratio of the population means of the two variables connected by a bivariate normal distribution. To this end he derives an ellipse, dependent on the sample moments, whose interior gives a fiducial region for the two means and uses the gradients of the two tangents from the origin as upper and lower limits of a „confidence interval in a certain sense“. Clearly this is only possible if the origin lies outside the ellipse, which means, in general, that the significance level is sufficiently large. However, the reviewer does not see the necessity for requiring that the centre of the ellipse should lie in the first quadrant which, according to the author, holds „in almost all circumstances of practical occurrence“.

*Stefan Vajda.*

**Sandelijs, Martin: Unbiased estimation based on inverse hypergeometric sampling.** Kungl. Lantbrukshögskolans Ann. **18**, 123—127 (1951).

Let a finite population of size  $N$  be given and assume that a proportion  $p$  exhibits a certain characteristic. Individuals are drawn until  $M$  of the latter are found or until the number drawn reaches  $n$  ( $N \geq n > M$ ). Let  $n$  be the number drawn and  $m$  ( $\leq M$ ) that of the items with the given characteristic. The author proves that  $p' = m/\bar{n}$  if  $m < M$  and  $p'' = (M-1)/(n-1)$  otherwise is an unbiased estimate of  $p$  if  $M > 1$ , and that  $\frac{p'(1-p')}{(\bar{n}-1)} \cdot \frac{(N-\bar{n})}{N}$  if  $m < M$  and  $\frac{p''(1-p'')}{(n-2)} \cdot \frac{N-(n-1)}{N}$  otherwise is an unbiased estimate of the variance of the estimate when  $M > 2$ . (The paper gives here  $M < 2$ , by mistake). For  $N = \infty$  the results are identical with those given by the author in an earlier paper, this Zbl. **43**, 137.

*Stefan Vajda.*



**Sandeliu, Martin:** Inverse sampling applied to bacterial plate counts. I. Unrestricted and truncated sampling in the Poisson case. Kungl. Lantbrukshögskolans Ann. 18, 86—94 (1951).

The author considers the following procedure for the estimation of the bacterial density,  $a$ , when it is assumed that the number of colonies in a given volume of fluid follows a Poisson distribution: on a circular plate take a radius vector and determine the smallest sector, starting at that vector, which contains exactly  $k$  colonies (unrestricted inverse sampling). If  $r$ , the total number of colonies, is smaller than  $k$ , then the estimate is based on the value of  $r$  (truncated inverse sampling). Formulae are derived for confidence intervals and for unbiased estimates of  $a$ , and also for unbiased estimates of their variances. The author adds remarks concerning the use of more than one plate.

*Stefan Vajda.*

**Neyman, Jerzy:** Existence of consistent estimates of the directional parameter in a linear structural relation between two variables. Ann. math. Statistics 22, 497—512 (1951).

Let  $\xi$  and  $\eta$  be random variables connected by the relation  $\xi \cos \theta^* + \eta \sin \theta^* = p$ . The author shows how to construct a class of estimates of  $\theta$  ( $= 0$  when  $\theta^* = \pi/2$  and  $= \theta^*$  otherwise) from measurements  $X$  and  $Y$  of  $\xi$  and  $\eta$  respectively, which are subject to errors. Each estimate is consistent under given conditions. It is known that an infinity of different values of  $\theta^*$  is compatible with the same first and second moments of the simultaneous distribution of  $X$  and  $Y$ , so that  $\theta^*$  can not be estimated using only these moments. The author's method is applicable even when there exist no moments at all of  $X$  and  $Y$  and his estimate is defined as the result of an interpolation method. The paper contains also a description of the history of its problem.

*Stefan Vajda.*

**Wold, Herman O. A.:** Stationäre Zeitreihen. Trabajos Estadíst. 2, 3—74 (1951) [Spanisch].

Expository paper, based on lectures given by the author in Madrid in 1949 and in Lucknow in 1950. Stress is laid on illustrative applications rather than on technical detail. The paper consists of six chapters. The first two are introductory, the third and fourth deal with tests concerning the correlogram and regression respectively and the last two with point processes. An extended bibliography is attached.

*Stefan Vajda.*

**Elphinstone, M. D. W.:** Summation and some other methods of graduation. — The foundations of theory. Trans. Fac. Actuaries 20, 15—77 (1951).

Verf. behandelt das Problem der Glättung einer Wertereihe durch lineare Operatoren, das in der Praxis viele Anwendung findet, ohne daß es eine allgemeine Theorie dafür gibt. Verf. versucht, eine solche Theorie zu begründen, Begriffe wie „Rauhheit“ oder „Glattheit“ von Kurven oder Wertefolgen exakt zu definieren und zahlenmäßige Kriterien für sie zu finden. Er gelangt dabei zu der Auffassung, daß Polynome und Exponentialfunktionen wesentlich „glatt“ und periodische Funktionen wie Sinus und Cosinus wesentlich „rauh“ sind. Glättung bedeutet daher die Unterdrückung kurzperiodischer Wellen im Spektrum der vorgegebenen Kurven oder Zahlenfolgen, d. h. also derjenigen Elemente, die den größten Grad der Rauhheit aufweisen. Die glättende Wirkung eines linearen Operators ergibt sich aus seiner charakteristischen Funktion, die als Funktion der Wellenlänge (oder Frequenz) die Faktoren angibt, mit denen die Amplituden der betreffenden harmonischen Glieder nach Anwendung des Operators multipliziert erscheinen. Verschiedene viel benutzte Operatoren werden auf diese Weise untersucht. — Diese der Faculty of Actuaries in Edinburgh vorgetragene Arbeit hatte eine außergewöhnlich umfangreiche Diskussion zur Folge, die der Veröffentlichung ausführlich angefügt ist. In dieser Diskussion, in der alle Schwierigkeiten und die ganze Problematik des Gegenstandes zutage treten, werden nicht nur Unklarheiten beseitigt,

Fehlschlüsse aufgedeckt und der Gültigkeitsbereich der Theorie eingengt, sondern auch wertvolle Anregungen zu einer Weiterführung der hier begonnenen Gedankengänge gegeben.

Karl Stumpf.

### **Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:**

Ogawa, Junjiro: On Weinberg's statistical method in human heredity. Proc. Japan Acad. 27, 527—531 (1951).

Sahut d'Izarn, André: Le taux réel de rendement des valeurs amortissables et la réserve de capitalisation. Bull. trimestr. Inst. Actuaire Français 62 (50), 35—217 (1951).

Zur Berechnung der nach französischem Gesetz von den Versicherungsunternehmungen zum Ausgleich von Ertrags- und Wertminderungen bei angekauften Anleihen zu stellenden Kapitalisationsrücklage ist die Bestimmung des effektiven Ertrages für die in der Praxis vorkommenden Anleihearten erforderlich. Da eine exakte Lösung dieser Aufgabe in der Regel auf zu große Schwierigkeiten stößt, entwickelt Verf. in der vorliegenden Arbeit unter Verwendung von ihm tabellierter Hilfsfunktionen (Tables financières pour le calcul du taux réel de rendement des valeurs amortissables. Rouen 1943) ein Iterationsverfahren, das, wie von ihm im einzelnen dargelegt wird, ausreichend genau und bequem zu handhaben ist. Gegenüber anderen Näherungslösungen bietet es zudem den Vorteil großer Allgemeingültigkeit, so daß es sich bei allen praktisch wichtigen Anleihearten anwenden läßt.

Georg Friede.

Hagstroem, K.-G.: Pension schemes and life assurance in an economy with a fluctuating currency. Skand. Aktuarietidskr. 1951, 72—97 (1951).

Wald, Abraham: On some systems of equations of mathematical economics. Econometrica 19, 368—403 (1951).

Patinkin, Don: The invalidity of classical monetary theory. Econometrica 19, 134—151 (1951).

Die Arbeit ist eine Auseinandersetzung des Verf. mit Arbeiten von Hickmann, Leone-tieff und Phipps, in denen Ergebnisse der beiden Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 34, 82; 33, 200) angegriffen wurden. Verf. weist nach, daß seine Schlüsse zu Recht bestehen, daß also die klassische Trennung der ökonomischen Vorgänge in einen Güter- und einen Geldsektor unhaltbar ist. Die Wirtschaft, in der relative Preise im Güter- und absolute Preise im Geldsektor festgelegt sind, ist unmöglich. In einer Geldwirtschaft müssen absolute Preise vielmehr in beiden Sektoren erscheinen. Sie sind durch eine allgemeine Gleichgewichtsbestimmung festgelegt. In einer Nicht-Geldwirtschaft dagegen, wo relative Preise im Gütersektor allein festgelegt sind, können nirgends absolute Preise bestimmt sein.

Rudolf Günther.

Pikler, Andrew: Optimum selection and optimum registration. (Equilibrium of awareness.) Math. Mag. 24, 175—189 (1951).

$N$  Güter seien, im Gegensatz zum üblichen Ausgangspunkt der Knappheit, im Überfluß vorhanden. Zu ihrer Lagerung stehe jedoch nur das Volumen  $V$  zur Verfügung, das sich aus den Teilvolumina  $v_r$  der einzelnen Gütermengen additiv zusammensetzt. Die Nutzenfunktionen  $U_r$  der einzelnen Güter mögen Funktionen der Mengen nur dieser Güter sein, also  $U_r = U_r(q_r)$ . Sie sind im allgemeinen logarithmisch und mögen in fiktiven Nutzeneinheiten (utils) gemessen werden, deren und anderer verwendeter Begriffe und Annahmen Problematik in Zusatznoten erörtert wird. Wegen der Abhängigkeit  $q_r(v_r)$  gilt auch  $U_r(v_r)$ . Als Maximum-Bedingung ergibt sich Gleichheit der Grenznutzen:  $dU_1/dv_1 = \dots = dU_N/dv_N$ . — Diese ökonomische Aufgabe bildet ein Modell zur Psychologie der Wahrnehmungen. Z. B. kann aus einer Fülle von möglichen Wahrnehmungen, sofern diese bewertet werden, eine dem Bewußtsein zugängliche Menge von maximaler Nützlichkeit ausgewählt werden. Den Gütermengen des Modells entsprechen die

Reize  $s_r$ , während die Nutzenfunktionen durch  $U_r = \left( \int_0^s r_r ds_r \right) / s_r$  über die beiden „psychophysischen“ Funktionen  $r = dI/ds = a/s$  und  $r = dI/ds = as^n$  ( $a = \text{const.}$ ), von denen die erste, die normale, dem Weberschen Gesetz entspricht, die 2. bei schädlichen Reizen Anwendung findet, mit den Intensitäten  $I_r$  der Empfindungen verknüpft sind. Diese Intensitäten denken wir uns in Einheiten gemessen, die den gerade noch bemerkbaren Reizänderungen entsprechen.



Unter der aus der traditionellen Psychologie entnommenen Zusatzbedingung, daß die Gesamtintensität der Empfindungen konstant ist, soll  $U = \Sigma U_i$  ein Maximum werden. Dieses Maximum wird als Gleichgewicht der Wahrnehmung bezeichnet, dem bei konstanten Umweltreizen zugestrebt wird.

*Rudolf Günther.*

## Geometrie.

### Grundlagen. Nichteuklidische Geometrie:

• **Zacharias, Max:** Das Parallelenproblem und seine Lösung. -- 2. Aufl. Mathem.-physik. Bibliothek, Reihe 1, Nr. 92. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1951. 43 S. mit 27 Fig.

**Mariño, Caruncho R.:** Über die Grundlagen der Euklidischen Metrik. Euclides, Madrid 11, 296—300 (1951) [Spanisch].

**Lasley jr., J. W.:** On the projective-metric definition of distance. J. Elisha Mitchell sci. Soc. 67, 96—98 (1951).

Die bekannte Tatsache, daß die euklidische Metrik als Grenzfall der nicht-euklidischen erhalten werden kann, wird am Cayley-Kleinschen Modell der ebenen Geometrie im Kreise vom Radius  $r$  mittels des Grenzüberganges  $r \rightarrow \infty$  geschickt demonstriert.

*Emanuel Sperner.*

**Kustaanheimo, Paul:** A note on a finite approximation of the euclidean plane geometry. Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math. 15, Nr. 19, 11 S. (1951).

Ref. s. dies. Zbl. 39, 156.

**Järnefelt, G.:** Reflections on a finite approximation to Euclidean geometry. Physical and astronomical prospects. Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 96, 43 S. (1951).

Der Hauptteil dieser Abhandlung besteht in der Zusammenfassung und in der strengen Durchführung der Gedanken, die in zwei früheren Veröffentlichungen von Verf. und Ref. (die erste ist noch nicht erschienen, die zweite s. dies. Zbl. 39, 156—157) angedeutet worden sind und aus denen die Möglichkeit einer beliebig genauen Approximation eines beliebig großen Gebietes des Euklidischen Raumes mittels einer endlichen Geometrie folgt. Die Konstruktion jener approximierenden endlichen Geometrien wird eingehend mittels konkreter Modelle durchgeführt. Diese Modelle unterscheiden sich wesentlich von den Gitterpunktmodellen, die einige Physiker als Grundlage der Physik untersucht haben, indem die Modelle von Järnefelt mittels eines Galoiskörpers konstruiert werden und dadurch eine räumliche Isotropie erhalten, die keinem gewöhnlichen Gitterpunktnetz möglich ist. — Auf den zwei letzten Seiten wird die Vermutung ausgesprochen, daß es auch möglich sei, die verschiedenen Gebiete der Physik mittels ähnlicher endlicher Konstruktionen so weit anzunähern, daß die Abweichungen kleiner als die Beobachtungsfehler werden. Dann wäre so ein endliches Weltmodell von dem axiomatischen Standpunkt aus eine ebenso gute Weltdeutung wie die üblichen unendlichen Modelle. Verf. geht aber noch einen Schritt weiter und spricht die Idee aus, daß ein endliches Modell vielleicht eine bessere Weltdeutung als ein unendliches Modell geben könnte, indem man vielleicht durch ein endliches Modell die für die moderne Physik typische Unstetigkeit auf eine natürlichere Weise erreichen könnte.

*Paul Kustaanheimo.*

**Bachmann, Friedrich:** Zur Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff. Math. Ann. 123, 341—344 (1951).

Unter Zugrundelegung einer Gruppe mit einem System involutorischer Erzeugenden werden drei Definitionen und sechs Axiome aufgestellt, die hinreichen, um die absolute Geometrie zu begründen. Der Nachweis hierfür wird erbracht, indem ein von Arnold Schmidt (dies. Zbl. 27, 418) angegebenes Axiomensystem unter den angegebenen Voraussetzungen als gültig erschlossen wird.

*Kurt Reidemeister.*

**Bachmann, Friedrich und Wilhelm Klingenberg:** Über Seiteneinteilungen in affinen und euklidischen Ebenen. *Math. Ann.* **123**, 288—301 (1951).

Unter den „Seiteneinteilungen“ einer affinen Ebene über einem (nicht notwendig kommutativen) Körper verstehen die Verf. diejenigen (schwachen) Anordnungen, welche durch eine normale Ordnungsfunktion (vgl. Sperner: dies. Zbl. **34**, 235) induziert werden. Zur Beschreibung dieser Seiteneinteilungen werden zwei äquivalente Systeme von Anordnungsaussagen herangezogen, die „Halbgeraden-Einteilung“ und die „Halbebenen-Einteilung“. — Über die möglichen Seiteneinteilungen einer affinen Ebene wird durch Konstruktion der zugehörigen Halbordnungen des Koordinatenkörpers ein Überblick erreicht. Jede Seiteneinteilung (wie überhaupt jede Ordnungsfunktion mit Geradenrelation) induziert ja im Koordinatenkörper eine Halbordnung, durch die umgekehrt die Seiteneinteilung erzeugt werden kann. Eine solche Halbordnung ist nichts anderes als ein quadratischer Charakter der multiplikativen Gruppe des Körpers. Ein quadratischer Charakter einer beliebigen Gruppe  $\mathcal{G}$  ist aber auch ein solcher der Faktorgruppe  $\mathcal{G}/\Omega$ , wenn  $\Omega$  der Normalteiler aller Elemente von  $\mathcal{G}$  ist, die als Produkte von endlich vielen Quadraten darstellbar sind. Da sämtliche Elemente von  $\mathcal{G}/\Omega$  involutorisch sind, mithin abelsch, besitzt  $\mathcal{G}/\Omega$  eine Basis. Jeder (eo ipso quadratische) Charakter  $\chi$  von  $\mathcal{G}/\Omega$  wird daher erhalten, indem der Wert von  $\chi$  für die Basiselemente willkürlich  $= \pm 1$  gesetzt und vermöge der Produktregel  $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$  auf ganz  $\mathcal{G}/\Omega$  ausgedehnt wird. Diese Konstruktion der Halbordnungen lehrt z. B., daß es zu jedem Element  $a$  eines Körpers, das nicht Quadrat ist, mindestens eine Halbordnung gibt, bei der  $a < 0$  ausfällt. — Im letzten Teil der Arbeit werden für den Fall einer euklidischen Ebene, d. h. einer affinen Ebene mit einem Orthogonalitätsbegriff für die Parallelenbüschel ohne selbstorthogonale Büschel, interessante Beziehungen zwischen Metrik und Anordnung aufgedeckt. Bemerkenswerte Sätze sind: Das Streckenverhältnis der Hypotenusenabschnitte eines rechtwinkligen Dreiecks gehört für alle rechtwinkligen Dreiecke derselben Quadratklasse (Restklasse mod  $\Omega$ , s. oben) des Koordinatenkörpers an. Daher gilt für jede Seiteneinteilung: Der Höhenfußpunkt auf der Hypotenuse liegt entweder bei allen rechtwinkligen Dreiecken „zwischen“ den Endpunkten der Hypotenuse oder bei keinem. Im ersten Fall und nur in diesem trennen sich die verschiedenen Paare orthogonaler Geraden eines Büschels; Verf. sprechen dann von einer „durch die Orthogonalität ausgezeichneten Seiteneinteilung“. Auf Grund der oben skizzierten Konstruktion ist die Existenz solcher ausgezeichneten Seiteneinteilungen in jeder euklidischen Ebene gesichert.

*Emanuel Sperner.*

**Noi, Salvatore di:** Le congruenze sulla retta nella geometria proiettiva. *Periodico Mat.*, IV. Ser. **29**, 79—80, 127—141 (1951).

L'A., presupponendo nota la costruzione della geometria proiettiva indipendentemente da quella elementare, presenta un'elaborazione della metrica proiettiva generale su una punteggiata, basata sullo studio del gruppo delle proiettività che lasciano fisso l'assoluto formato da una coppia di punti  $U, V$  (mutando in sè ciascuno dei due segmenti determinati da  $U$  e  $V$  se questi sono reali e distinti). Definite le congruenze e indicata con  $\binom{A}{A_1}$  quella che porta  $A$  in  $A_1$ , l'A. considera le potenze di  $\binom{A}{A_1}$  prima ad esponente razionale e poi ad esponente reale qualsiasi: allora se  $\binom{A}{B}$  è la congruenza che porta  $A$  in  $B$  esiste sempre un esponente  $\mu$  tale che  $\binom{A}{B} = \binom{A}{A_1}^\mu$  e questo esponente è la misura di  $AB$  rispetto all'unità di misura  $AA_1$ . Questa definizione nei casi delle metriche ellittica ed iperbolica è senz'altro riconducibile alla consueta definizione mediante birapporti.

*Piero Buzano.*

**Pati, Tribikram:** The development of non-euclidean geometry during the last 150 years. *Bull. Allahabad Univ. Math. Assoc.* **15**, 1—8 (1951).

Die axiomatische Forschungsrichtung, die differentialgeometrische und die projektive Entwicklungsrichtung der nichteuklidischen Geometrie werden in knapper Form dargestellt. Auch der Einfluß auf die Entwicklung benachbarter Gebiete wird angedeutet, z. B. der Einfluß auf die Ausbildung der axiomatischen Methode.

*Fritz Hohenberg.*

**Mardešić, Sibe:** Sur les hauteurs des triangles en géométrie hyperbolique. *Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron.*, II. Ser. **6**, 210—214 und französ. Zusammenfassg. 215—216 (1951) [Kroatisch].



**Gruting, C. J. van:** Einzelne Betrachtungen über die Eigenschaften von Dreiecken und Kreisen in der elliptischen Geometrie. II. *Simon Stevin* 28, 13—39 (1951) [Holländisch].

(Teil I s. dies. Zbl. 38, 303.) Verf. untersucht zuerst die merkwürdigen Geraden des Dreiecks, d. h. die Höhen, Seitenhalbierenden, Winkelhalbierenden und Mittelsenkrechten. Sodann betrachtet er die Fälle der Berührung und des Schneidens zweier Kreise und den Umkreis, den Inkreis und die Ankreise des Dreiecks. Eine ausführliche Betrachtung widmet er den Kreisen, die die Ankreise berühren, mit Unterscheidung der verschiedenen Fälle der inneren und äußeren Berührung. Damit kommt er auf die Frage des Analogons des Feuerbachschen Kreises. Dieser kann in der euklidischen Geometrie als Neunpunktekreis oder als Berührungskreis des Inkreises und der drei Ankreise aufgefaßt werden. Der zweiten Auffassung entspricht in der elliptischen Geometrie ein Kreis; dem Neunpunktekreis aber entspricht eine Kubik. Der letzte Paragraph behandelt die Potenz eines Punktes bezüglich eines Kreises, die Sätze von Ptolemaeus, Menelaus, Ceva, den Lemoineschen Punkt und die Eulersche Gerade. *Max Zacharias.*

**Eves, Howard and V. E. Hoggatt, jr.:** Hyperbolic trigonometry derived from the Poincaré model. *Amer. math. Monthly* 58, 469—474 (1951).

Die hyperbolische Trigonometrie ist seit Lambert (1766) auf sehr verschiedenen Wegen entwickelt worden. Hier wird das Poincarésche Modell der hyperbolischen Maßbestimmung zugrunde gelegt. Die beiden trigonometrischen Grundformeln für das rechtwinklige Dreieck der hyperbolischen Geometrie, aus denen sich die ganze Trigonometrie der hyperbolischen Ebene rechnerisch entwickeln läßt, werden aus den euklidischen Eigenschaften des Poincaréschen Modells hergeleitet, nachdem zwei Seiten des Dreiecks durch eine automorphe Inversion des Grundkreises (hyperbolische Spiegelung an einer hyperbolischen Geraden) in (euklidische) Durchmesser des Grundkreises übergeführt worden sind. *Fritz Hohenberg.*

**Leisenring, Kenneth:** Area in non-euclidean geometry. *Amer. math. Monthly* 58, 315—322 (1951).

Verf. begründet die Flächenmessung in der hyperbolischen Ebene in einer etwas von dem üblichen Verfahren verschiedenen Weise. Er stützt sich dabei auf die hyperbolische Elementargeometrie und das Archimedische Axiom. Das Flächenmaß wird als eine Funktion eingeführt, die für Polygone definiert ist und den üblichen Postulaten genügt. — Zwei Spitzzecke (Vierecke mit drei rechten Winkeln) haben dann und nur dann das gleiche Flächenmaß, wenn ihre spitzen Winkel gleich sind. Alle Fünfecke mit nur rechten Winkeln haben dasselbe Flächenmaß. Es stellt sich weiter heraus, daß es eine Proportionalität gibt zwischen dem Flächenmaß eines Spitzzeckes und dem Winkeldefekt. Schließlich kann dann gezeigt werden, daß für ein Dreieck das Flächenmaß und der Winkeldefekt proportional sind. *J. C. H. Gerretsen.*

**Morduckaj-Boltovskoj, D.:** Der Satz von Poncelet in der Lobačevskischen Ebene und die elliptischen Integrale. *Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser.* 77, 961—964 (1951) [Russisch].

Der Satz von Poncelet über die einem Kreise ein- und einem anderen umschriebenen Polygone beruht auf der Eulerschen Gleichung  $(1) d\varphi/\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi} - d\varphi'/\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi'}$ , die zwischen den Bogenelementen  $d\varphi, d\varphi'$  eines Kreises  $R$  an denjenigen Stellen  $P$  [ $=(R, 2\varphi)$ ] und  $P'$  besteht, an denen die Sehne  $PP'$  die Eigenschaft hat, einen inneren Kreis  $r$  zu berühren [Mittelpunkt  $=(a, \pi)$  und  $k^2 = 4R a / ((R+a)^2 - r^2)$ ]. Verf. überträgt diese Dinge auf die hyperbolische Geometrie. Zunächst leitet er im Falle zweier ineinander liegender endlicher Kreise eine ähnliche Beziehung zwischen zwei elliptischen Differentialen ab wie (1), die natürlich unter Berücksichtigung der hyperbolischen Trigonometrie abgeleitet werden muß. Der

Ponceletsatz folgt hieraus ebenfalls. Dann wird der Fall zweier Abstandslinien behandelt, deren Achsen eine gemeinsame Senkrechte besitzen. An Stelle der Schließbedingung tritt hier die Forderung, daß die erste und die letzte Seite des Polygons zu der Achse einer Abstandslinie parallel sind. Ähnliches gilt auch für den Fall eines endlichen Kreises und einer Abstandslinie, der ebenfalls behandelt wird.

Werner Burau.

**Gustin, W. and J. A. Sullivan: Contractions in a hyperbolic space.** Duke math. J. 18, 665—671 (1951).

Die Einführung der hyperbolischen Metrik im Einheitskreis  $|z| < 1$  der komplexen Zahlenebene bietet bekanntlich die Möglichkeit, funktionentheoretisch gewonnene Ergebnisse (Schwarzsches Lemma usw.) durch Aussagen über hyperbolische Entfernungen zu formulieren. Verff. schlagen den umgekehrten Weg ein. — Ein aus zwei Punktsorten, den „eigentlichen“ und „uneigentlichen“ Punkten, bestehender Raum wird mit gewissen Stetigkeitseigenschaften und einem „hyperbolischen“ reellen Entfernungsmaß versehen; hierzu wird ein Axiomensystem aufgestellt. Der damit gegebene „hyperbolische Raum“ wird durch „Kontraktionen“ abgebildet. Unter einer Kontraktion wird eine in allen eigentlichen Punkten eindeutig definierte Funktion  $x' = f(x)$  verstanden, durch die erstens der eigentliche Teil des hyperbolischen Raumes auf sich übergeht, und zweitens die Entfernung  $E(a', b')$  zwischen den Bildpunkten  $a' = f(a)$  und  $b' = f(b)$  höchstens gleich der Entfernung zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  ist:  $E(a', b') \leq E(a, b)$ ; aus letzterem folgt die „Stetigkeit“ der Kontraktionen. Eine besondere Gattung der Kontraktionen sind die „Echtkontraktionen“ (eventual contractions): Ist  $x' = f(x)$  eine Kontraktion, so sind die Iterierten  $f_v(x)$  mit  $f_1(x) = f(x)$ ,  $f_v(x) = f[f_{v-1}(x)]$  ( $v = 2, 3, \dots$ ) definiert; man bezeichnet:  $x_v = f_v(x)$ ,  $y_v = f_v(y)$ . Bei den Echtkontraktionen wird insbesondere verlangt, daß aus  $E(x_v, y_v) = E(x, y)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) die Gleichung  $x = y$  folgt. Unter einem „anziehenden Fixpunkt“ versteht man einen eigentlichen oder uneigentlichen Punkt  $P$  des hyperbolischen Raumes, in den die Iterierten  $x_v$  eines jeden eigentlichen Punktes  $x$  „einemünden“:  $\lim_{v \rightarrow \infty} x_v = p$ . Für die Kontraktionen des hyperbolischen Raumes läßt sich nun leicht das

Analogon zum Satz von G. Julia und für die Echtkontraktionen das Analogon zu einem Satz von J. Wolff beweisen. Letzteres lautet: Jede Echtkontraktion eines hyperbolischen Raumes besitzt einen anziehenden Fixpunkt. — Da der Kreis  $|z| \leq 1$  mit der Kleinschen hyperbolischen Metrik einen hyperbolischen Raum darstellt, dessen eigentliche Punkte:  $|z| < 1$  und dessen uneigentliche Punkte:  $|z| = 1$  erfüllen, und da alle dortselbst analytischen Funktionen wegen des Pichschen Satzes Kontraktionen und die im Einheitskreis analytischen nichtlinearen Funktionen Echtkontraktionen dieses hyperbolischen Raumes sind, so lassen sich das Analogon zum Julia- und Wolffschen Satz unmittelbar spezialisieren und gehen damit auf den gewöhnlichen Julia- und Wolffschen Satz für analytische Funktionen über. — Bemerkenswert ist, daß die von Caratheodory stammende Verschärfung des Juliaschen Satzes im hyperbolischen Raum nicht mehr bewiesen werden kann.

Hans Töpfer.

## Elementargeometrie:

**Veen, S. C. van: Zirkelgeometrie der Konstruktionen von Mascheroni.** (Noorduyn's Wetenschappelijke Reeks Nr. 37.) Gorinchem: J. Noorduyn en Zoon 1951. 184 S. f 5.50 [Holländisch].

Elementare Darstellung der berühmten Konstruktionen, welche sich unter ausschließlicher Verwendung des Zirkels ausführen lassen, wobei das klassische Werk von Mascheroni als Grundlage dient, aber in teilweise vereinfachter Form und systematisch geordnet. Darüber hinausgehend gibt Verf. auch Zirkelgeometrie auf der Kugel. — Inhaltsübersicht: I. Grundkonstruktionen; II. Die Hauptkonstruktionen Mascheronis; III. Einfachste Anwendungen unter Vermeidung der Konstruktion des Schnittpunktes zweier Geraden; IV. Kreisteilung; V. Anwendung der Inversion; VI. Näherungskonstruktionen; VII. Zirkelkonstruktionen auf der Kugeloberfläche. — In einem Anhang werden die Unmöglichkeitbeweise für die Lösung der bekannten drei Probleme der Antike gebracht und in einem Schlußkapitel werden einige historische Besonderheiten mitgeteilt, welche sich auf das Leben von Mascheroni beziehen.

J. C. H. Gerretsen.

**Lense, Josef: Die Winkeldreiteilung des Herrn Sauerbeck.** S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1950, 107—110 (1951).



Es wird folgendes einfaches Verfahren für die Dreiteilung eines Winkels mitgeteilt: Man halbiere den gegebenen  $\sphericalangle AOB$  durch  $OC$  (wobei  $A, B, C$  auf einem Kreis um  $O$  liegen),  $\sphericalangle BOC$  durch  $OD$ , ziehe  $BC \perp OD$  (der Schnittpunkt sei  $E$ ), mache  $EF = BE$  ( $F$  auf  $EO$ ) und konstruiere über  $BF$  das gleichseitige  $\triangle BFG$ . Dann ist  $\sphericalangle BOG$  angenähert der dritte Teil des  $\sphericalangle AOB$ . — Eine Betrachtung über die Genauigkeit des Verfahrens lehrt, daß der Konstruktionsfehler dem Betrag nach unterhalb  $8'12''$  bleibt, sobald der gegebene Winkel  $\leq \pi$  ist.

*J. C. H. Gerretsen.*

**Zinniker, A.:** Zwei neue Näherungskonstruktionen der Kreisquadratur mit Zirkel und Lineal. *Elemente Math* 6, 112—113 (1951).

**Sz. Nagy, Gyula v.:** Zwei nichtkonstruierbare Aufgaben des Dreiecks. *Elemente Math.* 6, 81—83 (1951).

In a triangle the distances from the sides of the centre of the circumscribed or the inscribed or an ascribed circle are given; the ruler-compass construction of the triangle is, in general, impossible as the problem leads to a cubic equation which is, in general, irreducible.

*Felix A. Behrend.*

**Goormaghtigh, R.:** Terminologie dans la géométrie du triangle et du tétraèdre. I, II, III. *Mathesis* 60, 24—31, 126—123, 185—187 (1951).

**Durieu, M.:** Points remarquables du triangle. *Mathesis* 60, 105—111 (1951).

**Thébault, Victor:** Sur la géométrie du triangle. *Ann. Soc. sci. Bruxelles, I. Sér.* 65, 79—86 (1951).

Verf. entwickelt zuerst einen Ausdruck für das Quadrat der Entfernung des Höhenschnittpunkts  $H$  eines Dreiecks  $ABC$  vom Orthopol einer beliebigen Geraden  $\Delta$  als Funktion des Umkreisradius  $R$ , des Abstandes der Punktes  $H$  von  $\Delta$  und der Winkel von  $\Delta$  mit  $BC, CA, AB$ . Sodann beweist er die Proportion  $G\varphi:GG' = R:OH$  ( $G, G'$  Schwerpunkte des Dreiecks  $ABC$  und des Dreiecks  $A'B'C'$  der Höhenfußpunkte,  $\varphi$  Mittelpunkt der Hyperbel von Jerabek,  $O$  Umkreismittelpunkt). Hierauf führt er die Schwerpunkte  $A_2, B_2, C_2$  der Dreiecke  $AB'C', BC'A', CA'B'$  und ihre Spiegelbilder  $A_3, B_3, C_3$  bezüglich der Seiten des komplementären Dreiecks ein und beweist, daß  $A_3, B_3, C_3$  auf dem Kreis um  $G$  mit dem Radius  $GG'$  liegen. Daran schließen sich weitere Eigenschaften der Dreiecke  $A_2B_2C_2$  und  $A_3B_3C_3$ . Aus diesen Eigenschaften folgt u. a., daß der Umkreismittelpunkt und der Punkt von Lemoine eines Dreiecks mit den Punkten von Tarry und von Steiner des ersten Brocardschen Dreiecks zusammenfallen. Mit einer Ausdehnung auf das Tetraeder schließt die Arbeit.

*Max Zacharias.*

**Ehrhart, E.:** Le triangle orienté. *Mathesis* 60, 15—23 (1951).

Verf. ist der Meinung, daß die Dreiecksgeometrie noch nicht in der Allgemeinheit behandelt worden sei, die durch die Orientierung ermöglicht werde. Er zeigt dies durch Untersuchung der Grundformeln und der Ausdrücke für die Punkte, Geraden, Kreise, Winkel, Längen und Flächeninhalte und formuliert ein Permanenzgesetz für Relationen zwischen solchen Größen.

*Max Zacharias.*

**Ehrhart, E.:** Le triangle orienté. *Mathesis* 60, 91—104 (1951).

**Toscano, L.:** Sur un triangle associé à un triangle donné. *Mathesis* 60, 9—14 (1951).

Verf. beweist, daß die Summe des Brocardschen Winkels und der beiden Steinerschen Winkel eines beliebigen Dreiecks  $\Delta$  gleich einem rechten Winkel ist, und daß es ein Dreieck  $\Delta'$  gibt, dessen Seiten  $R, R + \sigma, R - \sigma$  ( $R, \sigma$  Radien des Umkreises und des Brocardschen Kreises von  $\Delta$ ) und dessen Winkel das Doppelte des Brocardschen Winkels und der Steinerschen Winkel sind. Er behandelt die Eigenschaften des Dreiecks  $\Delta'$ .

*Max Zacharias.*

**Hadwiger, H. und P. Glur:** Zerlegungsgleichheit ebener Polygone. *Elemente Math.* 6, 97—106 (1951).

Zwei Polygone werden translativ zerlegungsgleich genannt, wenn sich beide Po-

lygone so in eine gleiche Anzahl  $n$  von Teilpolygonen  $A_1, \dots, A_n$  bzw.  $B_1, \dots, B_n$  zerlegen lassen, daß jedes  $B_i$  durch eine Translation aus  $A_i$  hervorgeht. In ähnlicher Weise wird die spieglergänzende translative Zerlegungsgleichheit definiert, indem außer den Translationen noch eine Spiegelung an einem festen Punkt der Ebene zugelassen wird. Als eine bemerkenswerte Verallgemeinerung des klassischen Zerlegungssatzes wird gezeigt, daß inhaltsgleiche Polygone immer spieglergänzt translativ zerlegungsgleich (aber im allgemeinen nicht translativ zerlegungsgleich) sind. Außerdem wird ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür angegeben, daß zwei Polygone translativ zerlegungsgleich sind. *László Fejes Tóth.*

**Štipanitch, Ernest:** Sur une application géométrique des nombres complexes. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 57—63 und französ. Zusammenfassg. 63—64 (1951) [Serbisch].

Il s'agit d'une propriété des polygones réguliers que l'on peut obtenir par des considérations géométriques des nombres complexes, à savoir: si les points  $A$  et  $B$  se trouvent sur les droites  $S_1$  resp.  $S_2$  bisectrices de deux angles voisins du polygone régulier  $T_1 T_2 \dots T_n$ , alors on peut d'une manière simple exprimer  $\sum_{k=1}^n \angle A T_k B$  par  $\arg f(z)$ , où  $f(z) = z^n - R^n =$

$\prod_{k=1}^n (z - z_k)$ . — En appliquant les résultats obtenus sur un système de cercles concentriques  $C^{(\mu)}$  ( $\mu = 1, 2, \dots, m$ ), décomposés par des lignes radiales  $L_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) en secteurs égaux,

l'A. déduit que  $\sum_{s=1}^n \angle A_{n-i}^{(j)} A_s^{(p)} A_{n-i-1}^{(j)} = 2\pi$  ( $2 \leq j \leq m$ ,  $1 \leq p \leq j$ ,  $i = 0, 1, \dots, n-1$ ;

$A_s^{(p)}$  point intersection de  $C^{(p)}$  et  $L_s$ ;  $A_0^{(j)} = A_n^{(j)}$ ). — Enfin il remarque que les conclusions analogues peuvent être déduites aussi dans le cas où les droites  $S_1$  et  $S_2$  désignent les perpendiculaires au milieu de deux cotés voisins du polygone  $T_1 T_2 \dots T_n$ . *Autoreferat.*

**Tibiletti, Cesarina:** Sul principio fondamentale della teoria delle grandezze poliedriche. Periodico Mat., IV. Ser. 29, 205—211 (1951).

Verf. gibt für den Satz von DeZolt für Polyeder mit einfachen Mitteln einen verhältnismäßig kurzen und anschaulichen Beweis. *Max Zacharias.*

**Mahler, K.:** On a question in elementary geometry. Simon Stevin 28, 90—97 (1951).

Ein Kreisbogen vom Zentriwinkel  $\leq 180^\circ$  verbindet zwei gegebene Punkte. Verf. gibt einen elementaren, aber nicht ganz einfachen Beweis, daß die Länge des Kreisbogens abnimmt, wenn sein Radius wächst. *Fritz Hohenberg.*

**Habicht, Walter und B. L. van der Waerden:** Lagerung von Punkten auf der Kugel. Math. Ann. 123, 223—234 (1951).

Es wird gezeigt, daß der Flächeninhalt  $F_n$  eines sphärischen  $n$ -Ecks  $F_n \geq (n-2) F_3$  ist, wenn jede Seite die gleiche Länge  $L$  und jede Diagonale eine Länge  $\geq L$  besitzt. Dieser Satz, der in einer Arbeit von Schütte und van der Waerden (dies. Zbl. 42, 166) benutzt wird, ergibt zugleich eine vom Ref. gefundene Abschätzung für den Mindestabstand von  $n$  Punkten einer Kugeloberfläche.

*László Fejes Tóth.*

● **Mahajani, G. S.:** An introduction to pure solid geometry. — 5th ed. Poona: 1951. 106 p. Rs. 4,00.

● **Holmes, C. T.:** Trigonometry with tables. New York: McGraw-Hill 1951. X, 291 p. \$ 3,00.

● **Page, A.:** Trigonometry. London: University of London Press Ltd. 1951. VIII, 276 p. 18.— sh.

Elementarbuch der ebenen und der sphärischen Trigonometrie mit vielen praktischen Anwendungen und einer reichhaltigen Aufgabensammlung. Inhalt: I. Sinus, Kosinus und Tangente eines spitzen Winkels. II. Form und Größe der Erde. Aufgaben der Navigation und der Architektur. III. Sekante, Kosekante und Kotangente eines Winkels. Berechnung der Zahl  $\pi$ . Das Bogenmaß. IV. Trigonometrie des Dreiecks. Ebene Vermessung. V. Trigonometrische Funktionen des allgemeinen Winkels. Sinus- und Kosinussätze. VI. Einfluß des Windes auf



die Navigation von Flugzeugen. Stereometrische Aufgaben. VII. Additionstheoreme. VIII. Konstruktion von trigonometrischen Tafeln. IX. Lösung von trigonometrischen Gleichungen. Kartenprojektionen. Umkreis, Inkreis und Ankreis eines Dreiecks. X. Weitere Formeln der analytischen Geometrie. Inverse trigonometrische Funktionen. XI. Messungen im Weltall. XII. Sphärische Trigonometrie. Navigation. XIII. Entwicklung der trigonometrischen Funktionen in Potenzreihen. XIV. Anwendung der komplexen Zahlen in der Trigonometrie.

*J. C. H. Gerretsen.*

### Analytische Geometrie. Projektive Geometrie:

● **Cell, John Wesley:** *Analytic geometry.* 2nd ed. New York: John Wiley and Sons, Inc. London: Chapman and Hall, Ltd., 1951. XII, 326 p. 30 s net.

● **Shah, A. B. and Madhumalati Apte:** *Plane analytic geometry: an intermediate course.* Poona: Ideal Book Service 1951. VII, 252 p. 5,8 rupees.

● **Zacharias, Max:** *Einführung in die projektive Geometrie.* — 4. Aufl. Mathem.-physik. Bibliothek, Reihe 1, Nr. 6. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft. 1951. 54 S. mit 21 Fig.

**Moneo, Alberto:** *Doppelpunkte der semihomographischen Transformationen.* *Gac. mat., Madrid*, I. Ser. 3, 113—124 (1951) [Spanisch].

The author considers the coincidence points of the transformations:  $\alpha) z' = (\alpha z + b)(c\bar{z} + d)^{-1}$ ; and  $\beta) z' = (a\bar{z} + b)(cz + d)^{-1}$  of the Gauss' plane, that he has called semihomographic transformations.

*Germán Ancochea.*

**Bilo, J.:** *Sur les homographies ayant des tétraèdres homologues formant un couple de Moebius.* *Mathesis* 60, 172—176 (1951).

Es wird die Frage geklärt, unter welchen Umständen eine Raumkollineation ein Tetraeder  $T_0$  in ein Tetraeder  $T_1$  überführt, das mit  $T_0$  ein Möbius-Paar bildet. Zunächst ist leicht einzusehen, daß eine solche Kollineation  $\mathfrak{K}$  sich aus einer Polarität  $\mathfrak{P}$  und einer nachfolgenden Nullkorrelation  $\mathfrak{N}$  zusammensetzt, wobei  $T_0$  ein Poltetraeder von  $\mathfrak{P}$  ist.  $\mathfrak{K} = \mathfrak{N}\mathfrak{P}$  läßt das auf der Grundquadrik  $\Phi$  von  $\mathfrak{P}$  vorhandene Vierseit von Nullerzeugenden fest und vertauscht auf dessen Diagonalen die Paare konjugierter Punkte. Die damit festgestellte notwendige Bedingung, daß die Kollineation  $\mathfrak{K}$  auf zwei Gegenkanten  $g, \bar{g}$  ihres Fixtetraeders Involutionen induzieren muß, erweist sich auch als hinreichend: Das Polarsystem  $\mathfrak{P}$  jeder das restliche Fixkantenvierseit enthaltenden Quadrik  $\Phi$  liefert zusammen mit  $\mathfrak{K}$  eine Korrelation  $\mathfrak{N} = \mathfrak{K}\mathfrak{P}$  mit einem Netz ( $g\bar{g}$ ) selbststprechender Strahlen, also ein Nullsystem. Jedes Poltetraeder  $T_0$  einer der  $\infty^1$  Flächen  $\Phi$  bildet danach mit  $T_1 = \mathfrak{K}T_0$  und  $T_{-1} = \mathfrak{K}^{-1}T_0$  je ein Möbiuspaar; die Tetraeder  $T_1$  und  $T_{-1}$  liegen übrigens polar bezüglich  $\Phi$  und entsprechen einander in der windschiefen Involution  $\mathfrak{K}^2$  mit den Achsen  $g, \bar{g}$ .

*W. Wunderlich.*

**Maccaferri, Eugenio:** *I teoremi di Pappo-Guldino.* *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 6, 323—327 (1951).

**Court, Nathan Altshiller:** *Imaginary elements in pure geometry — what they are and what they are not.* *Sereipta math.* 17, 190—201 (1951).

**Bilo, J.:** *Conditions for the equivalence of point-sets in quaternion projective geometry.* *Simon Stevin* 28, 140—145 (1951).

Auf der ins Quaternionengebiet erweiterten Geraden werden Projektivitäten untersucht und die Bedingungen für die Äquivalenz zweier Systeme von vier, fünf oder sechs Punkten der Geraden aufgestellt. Zwei allgemeine Punktquadrupel  $A, B, C, D$  und  $A', B', C', D'$  sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Projektivität zwischen den Ketten  $(ABC)$  und  $(A'B'C')$ , die durch die Punktepaare  $AA', BB', CC'$  eindeutig bestimmt ist, die mit  $D$  verbundene elliptische Involution von  $(ABC)$  in die mit  $D'$  verbundene elliptische Involution von  $(A'B'C')$  überführt. Zwei allgemeine Punktquintupel  $A, B, C, D, E$  und  $A', B', C', D', E'$  sind dann und nur dann äquivalent, wenn die Quadrupel  $A, B, C, D$  und  $A', B', C', D'$ ,  $A, B, C, E$  und  $A', B', C', E'$ , sowie  $A, B, D, E$  und  $A', B', D', E'$  äquivalent sind. Analog

wird die Äquivalenz von Punktsextupeln bezüglich der gemischten Gruppe der Projektivitäten und Antiprojektivitäten gekennzeichnet. *Fritz Hohenberg.*

**Zacharias, Max:** Die ebenen Konfigurationen  $(10_3)$ . Math. Nachr. 6, 129—144 (1951).

Ziel der vorliegenden Untersuchung ist es, alle ebenen  $(10_3)$  Punkt-Geraden-Konfigurationen systematisch zu finden. Dazu konstruiert Verf. zunächst die formal möglichen Inzidenztafeln einer solchen Konfiguration. Die drei ersten Zeilen und die drei ersten Spalten der Tafel bilden zusammen einen gemeinsamen Teil aller Möglichkeiten; daraus schließt man, daß es in jeder Konfiguration  $(10_3)$  mindestens ein Fünfeck gibt, dessen Ecken Konfigurationspunkte und dessen Seiten Konfigurationsgeraden sind. Es kann dann vorkommen, daß entweder zwei, oder nur ein, oder kein Diagonalkpunkt des Fünfecks ein Konfigurationspunkt ist; dual können entweder zwei, oder eine, oder keine Diagonalgerade des Fünfecks Konfigurationsgeraden sein; man findet so 9 Möglichkeiten für den sogenannten „Kern“ der Konfiguration, in den immer noch eine „Restfigur“ hineingelegt werden muß. Die Diskussion läßt 7 Fälle als formal möglich und verschieden erscheinen: der eine Fall ist derjenige einer Desargueschen Konfiguration  $(10_3)$ ; einen andern Fall hat Verf. schon untersucht (dies. Zbl. 42, 393). Die sieben übrigen Fälle hängen alle von der Konstruktion eines Dreiecks ab, welches einem gegebenen Dreieck umbeschrieben und einem anderen gegebenen Dreieck eingeschrieben ist; und man erkennt, daß eine solche Konstruktion in allen Fällen zu reellen Lösungen führt. Die 9 formal möglichen Fälle sind somit alle reell konstruierbar. *Eugenio Togliatti.*

**Pernet, Roger:** Un caractère topologique du groupe conforme. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1340—1342 (1951).

Im dreidimensionalen Punkttraum  $E$  sei  $(S)$  die Inversion an der Kugel  $S$  (vom Radius 1 oder  $i$ ) und  $\mathfrak{C}$  der Raum der Kreise  $C$  von  $E$ , die bei  $(S)$  invariant sind. Verf. untersucht mit topologischen Mitteln die Abbildungen  $T$  von  $\mathfrak{C}$ , denen auch im Quotientenraum  $E/(S)$  topologische Abbildungen  $t$  entsprechen. — Die komplexe Erweiterung  $S_c$  der Kugel  $S$  trägt zwei komplex-binäre Scharen von Isotropen  $X, X'$ , die auf ihren beiden  $S$  überlagernden Blättern  $F, F'$  eine Faserung liefern.  $X, X'$  sind homöomorph zwei komplexen Zahlenebenen  $\Pi(\dot{\lambda})$  und  $\Pi'(\dot{\mu})$ , die man identifizieren und durch den Kreis  $\sigma$  mit der Inversion  $(\sigma)$  mit einer Cayleyschen Struktur versehen kann. Es ist dann  $\mathfrak{C} \simeq \mathfrak{C}_1 = \Pi \times \Pi' / (\sigma)$  für  $R = 1$  (für  $R = i$  bedarf es noch einer Vertauschung der  $\dot{\lambda}$  und  $\dot{\mu}$ ). Eine Transformation  $T$  von  $\mathfrak{C}$  induziert dann in den Ebenen  $\Pi$  und  $\Pi'$  Transformationen  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{T}'$  und in  $\mathfrak{C}_1$  die Transformation  $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}'$ , zu deren Untersuchung man die mit der Kugel  $S$  verbundenen parataktischen Kongruenzen und die darin enthaltenen  $V$ -Reihen (Kreise einer Schar auf Dupinschen Zykliken) heranziehen kann. Es folgt dann, daß  $T$  die Parataxie von Kreisen und  $V$ -Reihen erhält, und daher  $\mathfrak{T}$  und  $\mathfrak{T}'$  Möbiussche Kreistransformationen sind. Es folgt weiter eine einfache Kennzeichnung der kosphärischen Kreise und daraus der allgemeine Satz, daß jede stetige Punkttransformation, welche bei der Inversion  $(S)$  invariante kosphärische Kreispaaire wieder in bei der Inversion  $(S')$  invariante kosphärische Kreise überführt, konform ist. Schließlich ergibt sich eine vollständige Klassifikation der Transformationen  $T$  in  $\mathfrak{C}_1$  (Darstellung durch zu  $T$  isomorphe direkte Produkte von geeigneten Antiinvolutionen  $\mathfrak{A}$  der Gaußschen Ebenen  $\Pi$  und  $\Pi'$ ).

*Karl Strubecker.*

**Pernet, Roger:** Une extension du groupe conforme. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1419—1421 (1951).

In Fortsetzung vorsteh. referierter Note wird die Bedingung dafür eingeführt, daß zwei Kreise  $C$  und  $C'$  kosphärisch sind. Es ergibt sich eine hyperhermitesche Form 6. Grades  $V(\lambda, \mu, \lambda', \mu', \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\lambda}', \bar{\mu}') = 0$ , die im Parameterraum der Punkte  $m(\lambda, \mu, \lambda', \mu')$  von 4 komplexen (8 reellen) Dimensionen eine siebendimensionale Mannigfaltigkeit  $V$  aussondert. Ist dann  $W$  die Mannigfaltigkeit der Punkte  $\lambda = \lambda'$  oder  $\mu = \mu'$  (wenn  $R = 1$ ) bzw.  $\lambda = \bar{\lambda}'$  und  $\mu = \bar{\mu}'$  (wenn  $R = i$ ), so sei die Mannigfaltigkeit  $V'$  erklärt durch  $V = V' \cup W$  und  $V' \cap W = 0$ . Erklärt man dann Punkte von  $V'$ , deren kosphärische Bildkreise in  $\mathfrak{C}$  sich unter festem Winkel schneiden, als äquivalent, so entsteht durch diese Äquivalenz  $R_2$  eine Teilung der Punkte  $m$  in Klassen  $m^*$ , welche ihrerseits die Punkte einer Mannigfaltigkeit  $V'/R_2$  sind, die als homogen erwiesen werden kann. — Die  $\infty^1$  aus den Antiinvolutionen  $\mathfrak{A}$  gebildeten Transformationen  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ , deren Grundkreise mit dem Kreise  $\sigma$  einem Büschel angehören, bilden eine Menge von Operationen  $e \simeq V'/R_2$  und die durch  $e \cup e^{-1}$  erzeugte Gruppe  $g$  ist in  $V'/R_2$  transitiv. Das Produkt



zweier Elemente von  $g$  ist homomorph einer Quasihomothetie, weshalb man (etwas unkorrekt)  $g$  selbst eine Gruppe von Quasihomothetien nennen kann. Es gilt dann der Satz: Die Adjunktion der Gruppe  $g$  zur konformen Gruppe  $G$  erzeugt eine quasikonforme Gruppe  $\mathfrak{G}$ , wobei die Untergruppe  $\mathfrak{G}'$ , die sich durch Beschränkung von  $G$  auf jene Untergruppe  $G'$  konformer Transformationen ergibt, welche die Kreise des Fundamentalringes von  $g$  erhalten, (bis auf Möbius-Transformationen) durch das direkte Produkt  $\mathfrak{G}' = G' \times g$  dargestellt werden kann.

Karl Strubecker.

**Hohenberg, Fritz:** Die Brennpunkteigenschaften der Kegelschnitte im komplexen Gebiet. *Elemente Math.* **6**, 121—129 (1951).

Sind  $(x, y)$  die kartesischen Koordinaten des (reellen oder komplexen) Punktes  $P$ , und sind  $d_1, d_2$  dessen Abstände von den reellen Brennpunkten  $F_1(e, 0)$  und  $F_2(-e, 0)$ , so genügen die Punkte  $P$ , für die  $\pm d_1 \pm d_2 = 2a$  ist, notwendig der Gleichung  $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$ . Ist  $a^2/e = f$ , so ergibt sich, daß für Punkte  $P(x, y)$  mit reeller Abszisse  $x$  folgende Disjunktion gilt:  $d_1 - d_2 = 2a$  für  $x \leq -f$ ,  $d_1 + d_2 = 2a$  für  $-f \leq x \leq f$ ,  $-d_1 + d_2 = 2a$  für  $f \leq x$ . Es folgt z. B., daß für die komplexen Scheitel der Hyperbel ( $a < e$ ) stets  $d_1 = d_2 = a$ , also  $d_1 + d_2 = 2a$  ist (entgegen der elementaren Hyperbeldefinition  $d_1 - d_2 = 2a$  für reelle Hyperbelpunkte)! Für die komplexen Fernpunkte der Ellipse ( $a > e$ ) aber wird  $(d_1 - d_2) = La$ , (ebenfalls entgegen der elementaren Ellipsendefinition  $d_1 + d_2 = 2a$  für reelle Ellipsenpunkte)! — Neben verschiedenen anderen komplexen Definitionen und Eigenschaften der Kegelschnitte wird schließlich ein kleines Licht auf die Kurven und Flächen mit  $n$  Brennpunkten geworfen, für deren Punkte Brennpunktsabstandsrelationen der Form  $\pm d_1 \pm d_2 \pm \dots \pm d_n = na$  ( $a = \text{const}$ ) gelten.

Karl Strubecker.

**Chakrabarti, S. C.:** On the sign of the eccentricity of the conic. *Math. Student* **19**, 49—50 (1951).

**Tallqvist, Hj.:** Einige geometrische Örter. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* **15**, Nr. 5, 28 S. (1951).

Der Punkt  $P$  habe von zwei festen Punkten der Ebene die Abstände  $d_1$  und  $d_2$ , von einer festen Geraden den Abstand  $e$ . Dann ergeben sich Kegelschnitte als Orte der Punkte  $P$ , für die z. B.  $d_1 \pm e$  bzw.  $d_1^2 + e^2$  bzw.  $d_1^2 - e^2$  bzw.  $d_1^2 + d_2^2$  konstant ist.

Fritz Hohenberg.

**Tallqvist, Hj.:** Ort konstanter Summe oder Differenz der Tangentenlängen zu zwei Kreisen. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* **15**, Nr. 2, 20 S. (1951).

Dieser Ort ist ein Kegelschnitt, der in der vorliegenden Arbeit ausführlich diskutiert wird. Bem. d. Ref.: Der Kegelschnitt läßt sich zyklographisch nach Einführung einer Orientierung sehr einfach als gemeinsamer ebener Schnitt zweier Paare von  $C$ -Drehflächen zweiter Ordnung gewinnen.

Fritz Hohenberg.

**Tallqvist, Hj.:** Einige Reflexions- und Refraktionsprobleme. *Soc. Sci. Fennica, Commentationes phys.-math.* **15**, Nr. 7, 18 S. (1951).

In der Ebene soll ein Lichtstrahl von  $A$  ausgehen und nach Spiegelung oder Brechung an einer oder an zwei Geraden bzw. an einem Kreis nach einem gegebenen Punkt  $B$  gelangen. Rechnerische Herleitung der bekannten Bedingungen.

Fritz Hohenberg.

**Biarge, Julio Fernández:** Invariantes der ebenen Schnitte der Quadriken. *Gaceta mat.*, I. Ser. **3**, 108—112 (1951) [Spanisch].

Eserciziazioni di geometria analitica elementare sugli invarianti delle sezioni piane delle quadriche.

Federico Gaeta.

**Wolkowitsch, David:** Pentagones et pentaèdres conjugués à une quadrique. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 1415—1416 (1951).

Nach P. Serret und Th. Reye versteht man unter einem „Pölfünfeck“ einer Quadrik eine Gruppe von fünf Raumpunkten  $A_i$  mit der Eigenschaft, daß für jede der zehn Ebenen  $A_j A_k A_l$  der Pol auf der Gegenkante  $A_m A_n$  liegt. Ausgehend von

der Bemerkung, daß fünf beliebige Massenpunkte ein Polfünfleck jener Quadrik bilden, die aus der zentralen Trägheitsfläche durch  $i$ -fache zentrische Streckung entsteht, entwickelt Verf. in eleganter Weise eine Reihe von (meist schon bekannten) Eigenschaften des Polfünflecks und des dazu dualen Polfünflechts. Die genannte Quadrik wird in Ebenenkoordinaten durch  $\sum m_j A_j^2 = 0$  dargestellt, wenn  $m_j$  die Masse und  $A_j = 0$  die (normierte) Gleichung des  $j$ -ten Massenpunktes bedeutet; sie wird von den durch verschwindendes Trägheitsmoment gekennzeichneten Ebenen eingehüllt und kann nur bei Zulassung auch negativer Massen reell ausfallen.  
*W. Wunderlich.*

**Ladopoulos, Panajotis:** Sur la métrique des courbes algébriques. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1417—1418 (1951).

Es seien  $C'_n, C''_n$  zwei ebene, komplexe algebraische Kurven und in ihrem Büschel  $I$  und  $J$  jene „isotropen“ Kurven, welche die absoluten Punkte enthalten ( $I \neq J$ ). Ist  $[C'_n C''_n I J]$  das Doppelverhältnis dieser vier Kurven, so nennt Verf.  $\omega_{12} = \frac{1}{2i} \log [C'_n C''_n I J] \pmod{\pi}$  das „Winkelmaß“ (den Winkel) der Kurven  $C'_n$  und  $C''_n$ .

Folgende Sätze gelten: I. Der Winkel zweier algebraischer Kurven  $n$ -ter Ordnung ist gleich der Summe der  $n$  Winkel der  $n$  (in beliebiger Art) gebildeten Asymptotenpaare der Kurven. II. Der Winkel  $\omega_{12}$  ist auch gleich der Differenz der Laguerreschen Orientierungen (Laguerre, Werke II, S. 69) der Asymptoten bezüglich derselben Achse. — Ist  $O$  Poncelets harmonisches Zentrum der Kurve  $C_n$  und sind  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die  $n$  Winkel der Asymptoten von  $C_n$  gegen eine feste Richtung,

so heißen die  $n$  Geraden durch  $O$  mit den Richtungswinkeln  $\gamma_i = \frac{1}{n} \sum \alpha_i + k \frac{\pi}{n}$

( $k = 1, 2, \dots, n$ ) die Achsen der Kurve  $C_n$ . Es gilt dann u. a. III. Die Kurve  $C_n$  und die von ihren Achsen gebildete zerfallende  $C'_n$  sind orthogonal oder parallel, je nachdem  $n$  gerade oder ungerade ist. IV. Die zirkularen algebraischen Kurven  $(n+1)$ -ter Ordnung  $C_{n+1}$ , welche durch die  $n^2$  Schnittpunkte zweier Kurven  $C'_n$  und  $C''_n$  gehen und die beiden festen Punkte  $A'$  auf  $C'_n$  und  $A''$  auf  $C''_n$  enthalten, schneiden sich noch in  $2n-1$  Punkten (Druckfehler!), die mit  $A'$  und  $A''$  auf einem Kreise liegen, in dem über dem Bogen  $A' A''$  der Peripheriewinkel  $\omega_{12}$  ruht.

*Karl Strubecker.*

**Godeaux, Lucien:** Sur la construction de certaines quartiques rationnelles. Mathesis **60**, 81—84 (1951).

Für die rationale  $C_4$  mit der Gleichung  $(ax^2 + by^2)^2 - (x^2 + y^2)(cx + d)^2 = 0$  wird eine einfache Konstruktion gegeben, die von zwei Kegelschnitten Gebrauch macht.

*Roland W. Weitzenböck.*

**Loeffler, A.:** Construction du cercle osculateur en un point quelconque d'une quartique bicirculaire. Elemente Math. **6**, 11—15 (1951).

Für den Krümmungsmittelpunkt in einem Punkt einer anallagmatischen Kurve wird eine einfache Konstruktion hergeleitet, wenn im zugehörigen Punkt des Deferent den Krümmungsradius gegeben ist.

*Fritz Hohenberg.*

### Algebraische Geometrie:

**Turri, Tullio:** Inesistenza di trasformazioni piane cicliche con sei punti fondamentali. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **20**, 30—35 (1951).

L'A. démontre que plusieurs transformations birationnelles périodiques, ayant six points fondamentaux, considérées par S. Kantor [Acta Math. **19**, 115—194 (1895)] ne peuvent exister.

*Lucien Godeaux.*

**Turri, Tullio:** Sulla costruzione delle trasformazioni involutorie del piano. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari **20**, 36—42 (1951).

L'A. montre que les couples de points homologues dans une transformation



birationnelle involutive du plan peuvent être obtenus comme intersections variables des courbes de deux faisceaux, unies pour la transformation. *Lucien Godeaux.*

**Gaeta, Federico:** Erläuternde Bemerkungen über Koinzidenzpunkte einer Korrespondenz zwischen übereinander liegenden algebraischen Mannigfaltigkeiten. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. **11**, 132—137 (1951) [Spanisch].

Fernández Biarge (ce Zbl. **38**, 317) avait cru trouver un contre-exemple pour le théorème de Severi sur les correspondances entre variétés algébriques superposées qui affirme que toute hypercoïncidence isolée est une coïncidence parfaite. Mais la coïncidence considérée par F. Biarge n'était pas isolée; le point correspondant appartenait à une droite dont les autres points étaient de coïncidence et non d'hypercoïncidence. L'A. donne ici un exemple d'une correspondance pour laquelle sont d'hypercoïncidence tous les points d'une droite tandis qu'il n'y a pas de coïncidence parfaite pour aucun de ces points. *Germán Ancochea.*

**Segre, Beniamino:** Alcune questioni algebrico-differenziali. *Portugaliae Math.* **10**, 29—36 (1951).

Verf. betrachtet in der Ebene ein Linearsystem  $\Phi_{2d}$  (mit gerader Dimension  $2d$ ) von algebraischen Kurven der Ordnung  $n$ . Es gibt in der Ebene  $\infty^{d+1}$  Differential-elemente  $E_{d-1}$  der Ordnung  $d-1$ ;  $\infty^1$  solcher  $E_{d-1}$  sind so beschaffen, daß alle  $\infty^d$  Kurven des Systems  $\Phi_{2d}$ , die eines jener  $E_{d-1}$  enthalten, notwendigerweise auch ein  $E_{d-1}$  enthaltendes  $E_d$  gemein haben; der Ort der Mittelpunkte jener  $\infty^1 E_{d-1}$  ist eine Kurve  $J_d$ , eine Kovariante des Systems  $\Phi_{2d}$ . — Für  $d=1$ , fällt  $J_1$  mit der Jakobischen Kurve eines Netzes  $\Phi_2$  zusammen. — Für  $d=2$  hat  $J_2$  die Ordnung  $10n-18$ ; in diesem Falle kann man  $J_2$  auch folgendermaßen definieren: die  $\infty^4$  polaren Kegelschnitte eines Punktes  $P$  in bezug auf alle Kurven des Systems  $\Phi_4$  bilden ein  $\infty^4$  Linearsystem, welches einen apolaren Enveloppenkegelschnitt  $\Delta_p$  besitzt;  $J_2$  ist der Ort aller jener Punkte  $P$ , die auf dem betreffenden Kegelschnitt  $\Delta_p$  liegen. Diese Eigenschaft führt leicht zur Gleichung von  $J_2$ . Die Multiplizität von  $J_2$  in einem  $l$ -fachen Basispunkt von  $\Phi_4$  ist 5 für  $l=1$  und ist  $10l-6$  im allgemeinen. Dieses letzte Ergebnis folgt aus der Betrachtung derjenigen Fläche  $F$  eines vierdimensionalen Raumes, die auf die Ebene durch das System  $\Phi_4$  abgebildet wird. Die Kurve  $J_2$  ist unbestimmt, entweder wenn  $F$  sich zu einer Kurve reduziert, oder wenn  $F$  eine parabolische Laplacesche Gleichung darstellt; dieser zweite Fall gibt Anlaß zu einem Beispiel einer Fläche  $F$  eines beliebigen mehrdimensionalen Raumes, die ein  $\infty^1$  System algebraischer asymptotischer Linien enthält ohne eine Regelfläche zu sein. — Die Untersuchung kann in verschiedenen Richtungen ausgedehnt werden. *Eugenio Togliatti.*

**Turri, Tullio:** I sistemi lineari di cubiche a modulo costante. *Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari* **20**, 1—29 (1951).

L'A. considère les systèmes linéaires de cubiques planes ayant même module et démontre que les cubiques d'un faisceau à module constant quelconque sont transformées en elles-mêmes par une homologie harmonique, que les courbes d'un réseau de cubiques harmoniques sont transformées en elles-mêmes par une homologie harmonique, enfin que les systèmes de cubiques équi-harmoniques sont de dimension 2, 4 ou 1 et que leurs cubiques sont transformées en elles-mêmes respectivement par une homographie cyclique de période 3, par une homologie de période 3 ou par une homologie harmonique. Il forme les équations des systèmes étudiés et démontre qu'il n'en existe pas d'autre. *Lucien Godeaux.*

**Gaeta, Federico:** Sur la distribution des degrés des formes appartenant à la matrice de l'idéal homogène attaché à un groupe de  $N$  points génériques du plan. *C. r. Acad. Sci.*, Paris **233**, 912—913 (1951).

Verf. entwickelt im Anschluß an seine Arbeit über algebraische Raumkurven von endlichem Residual und über Punktgruppen in der Ebene (dies. Zbl. **40**, 230) die Theorie der  $H$ -Ideale, deren Nullstellenmannigfaltigkeit aus  $N$  Punkten der

Ebene besteht. Diese Ideale sind notwendig perfekt vom Range 1 und daher durch Matrizen von  $(\varrho + 1)$  Zeilen und  $(\varrho + 2)$  Spalten darstellbar. Unter der Voraussetzung, daß die Punkte allgemein liegen, sind die in der Matrix auftretenden Formen sämtlich vom Grade  $\leq 2$ , und auch der Typus der Matrix ist dann bereits festgelegt. Verf. gibt hier das Schema des Residuals  $\varrho(N)$ , das zu einem gegebenen  $N$  gehört, und der Gradzahlen  $\mu_{ij}$  der Elemente  $f_{ij}$  der Matrix. *Wolfgang Gröbner.*

**Godeaux, Lucien:** Sur certaines surfaces algébriques possédant des points doubles uniplanaires. *Revista mat. Hisp.-Amer.*, IV. Ser. 11, 121—128 (1951).

Si studiano le superficie algebriche con punti doppi uniplanari ottenute sostituendo le coordinate per le loro potenze d'ordine  $p$ , nell'equazione di una quadrica tangente agli spigoli del tetraedro di riferimento. *Federico Gaeta.*

**Burniat, Pol:** Sur les surfaces canoniques de genres  $p_g = 4$ ,  $p^{(1)} \geq 11$ . *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. Sér. 37, 241—251 (1951).

L'A. construit des surfaces doubles dont les supports sont des surfaces de bigenre un, possédant les genres  $p_g = 4$ ,  $p^{(1)} = 13$ , 15 ou 17. Les sections planes de ces surfaces constituent le système canonique. Il montre que chacune de ces surfaces appartient à une famille de surfaces simples, respectivement d'ordres 12, 14 ou 16, possédant les mêmes invariants. *Lucien Godeaux.*

**Gallarati, Dionigi:** Sopra una notevole superficie del 6° ordine. *Boll. Un. mat. Ital.*, III. Ser. 6, 213—215 (1951).

Beispiel einer Fläche 6ter Ordnung mit einem vierfachen Punkte und der höchstmöglichen Anzahl weiterer Doppelpunkte; diese Anzahl ist 45. Verf. konstruiert diese Fläche und gibt ihre Gleichung an durch Projektion der Fläche aus dem vierfachen Punkte auf eine Doppelsebene. Die Verzweigungskurve der Doppelsebene hat die Ordnung 10, und zerfällt in 10 Doppeltangenten einer allgemeinen Kurve 4ter Ordnung  $C^4$ , deren 20 Berührungspunkte mit  $C^4$  auf einer Kurve 5ter Ordnung liegen, die  $C^4$  als Teil nicht enthält. Dieselbe Methode hat Ref. angewendet, um eine Fläche 5ter Ordnung mit einem dreifachen Punkt und 24 Doppelpunkten zu konstruieren (dies. Zbl. 13, 222).

*Eugenio Togliatti.*

**Franchetta, Alfredo:** Forme algebriche sviluppabili e relative Hessiani. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 386—389 (1951).

Soit  $F_d$  une hypersurface de  $S_{d+1}$  ayant seulement  $\infty^{d-1}$  hyperplans tangents. On sait que  $F_d$  doit contenir  $\infty^{d-1}$  droites et qu'elle est contenue dans sa hessienne  $H$ . L'A. détermine la condition nécessaire et suffisante pour que  $F_d$  soit une composante multiple de  $H$ . *Germán Ancochea.*

**Nič, Vilko:** Les surfaces des génératrices isotropes dans les congruences de droites du 1er ordre de la 3e, 2e et 1re classe. *Soc. Sci. natur. Croatica, Periodicum math.-phys. astron.*, II. Ser. 6, 97—104 und französ. Zusammenfassg. 104—105 (1951) [Serbisch].

Die Kongruenzen 1. Ordnung und 3. Klasse (gebildet von den Bisekanten einer kubischen Raumkurve  $c^3$ ) enthalten isotrope Geraden, welche insgesamt (bei allgemeiner Lage der Kubik  $c^3$  gegen den absoluten Kegelschnitt) eine algebraische Regelfläche 8. Grades  $\Phi$  mit  $c^3$  als vierfacher Kurve bilden, welche die drei in der Fernebene liegenden Bisekanten von  $c^3$  als Doppelerzeugende besitzt. Wenn  $c^3$  reell ist, kann man an Hand dieser Doppelerzeugenden fünf Realitätstypen der Fläche  $\Phi$  unterscheiden. — Zerfällt die  $c^3$  in einen Kegelschnitt  $c^2$  und eine (nichtisotrope) seiner Unisekanten  $c^1$ , so bilden die Bisekanten von  $c^1$  und  $c^2$  eine Kongruenz 1. Ordnung und 2. Klasse und die in ihr enthaltenen isotropen Geraden ergeben eine Regelfläche 6. Grades, mit dem Kegelschnitt  $c^2$  als Doppelkurve und der Geraden  $c^1$  als vierfacher Leitgeraden. Außerdem existieren zwei unendlich ferne Doppelerzeugende. — In einer Kongruenz 1. Ordnung und 1. Klasse (einer linearen Kongruenz mit eigentlichen, nichtisotropen Leitgeraden) erzeugen die isotropen Strahlen eine Regelfläche 4. Grades (VII. oder VIII. Art nach R. Sturm). Die Brenngeraden der Kongruenz sind doppelte Leitgeraden und die Ferngerade der Kongruenz ist Doppelerzeugende der Regelfläche. [Bem. des Ref.: Entgegen der Behauptung des Verf. (im Schlußsatz der Abhandlung) gibt es natürlich auch in elliptischen linearen Kongruenzen (auch in Drehnetzen!) stets Regelflächen mit isotropen Erzeugenden.] *Karl Strubecker.*



**Gemigniani, Giuseppe:** Sui sistemi lineari di ipersuperficie dotate di un punto multiplo variabile. Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 143–149 (1951).

Une nouvelle démonstration du théorème de Bertini concernant les points multiples de l'hypersurface générique d'un système linéaire. Dans le cas d'un faisceau (\*)  $f_1(x_i) + \lambda f_2(x_i) = 0$  du  $S_n$ , auquel on peut réduire le cas général, la démonstration résulte de la considération, dans l'espace à  $n+1$  dimensions de coordonnées  $(x_i, \lambda)$ , de l'hypersurface d'équation (\*). En étudiant la multiplicité dans certains points base, l'A. donne aussi un complément du théorème de Bertini.

*Germán Ancochea.*

**Akizuki, Yasuo:** Theorems of Bertini on linear systems. J. math. Soc. Japan 3, 170–180 (1951).

Die Sätze von Bertini wurden mit modernen Mitteln von O. Zariski (dies. Zbl. 25, 215) für Körper der Charakteristik  $p=0$  bewiesen. T. Matsusaka [The theorem of Bertini on linear systems in modular fields, Mem. College Sci., Kyoto Univ., Ser. A 26, (1950)] hat diesen Beweis für den ersten Satz auf  $p>0$  ausgedehnt. In der vorliegenden Arbeit wird ein neuer Beweis mitgeteilt, der die Begriffe und Sätze von A. Weil (Foundations of algebraic geometry, Amer. math. Soc., Coll. Publ. vol. 29, 1946) benützt; insbesondere werden Bedingungen für die Gültigkeit des zweiten Bertinischen Satzes bei  $p>0$  aufgestellt, nämlich dafür, daß die allgemeine  $U_{r-1}$  eines linearen Systems auf einer algebraischen Mannigfaltigkeit  $U_r$  keine singulären Punkte außerhalb der Basispunkte und der Singularitäten von  $U_r$  besitze.

*Wolfgang Gröbner.*

**Muhly, H. T.:** Integral bases and varieties multiply of the first species. Proc. Amer. math. Soc. 2, 576–580 (1951).

$k$  étant un corps algébriquement fermé de caractéristique nulle,  $V$  une variété algébrique irréductible de dimension  $r$  définie par les coordonnées homogènes de son point générique sur  $k$ , l'A. donne un nouveau critère algébrique pour que  $V$  soit complètement de première espèce au sens de P. Dubreil (se Zbl. 11, 268), c'est-à-dire parfaite au sens de W. Gröbner (ce Zbl. 33, 127 et 38, 321). Ce critère est le suivant: il faut et il suffit que l'anneau de coordonnées  $O = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$  de la variété admette, après une transformation linéaire éventuelle, une base linéaire par rapport au sous-anneau  $S = k[x_0, x_1, \dots, x_r]$ , les  $x_j$  ( $j = 0, 1, \dots, r$ ) étant algébriquement indépendants par rapport à  $k$ , et les éléments  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) de la base étant supposés homogènes. On a alors pour tout élément  $\omega \in O$ , homo-

gène de degré  $h$ :  $\omega = \sum_{i=1}^r P_i \lambda_i$ , où  $P_i \in S$  est une forme de degré  $h - r_i$ ,  $r_i$  étant le degré de la forme  $\lambda_i$ . Il en résulte, et ce fait est essentiel dans les démonstrations, que tous les éléments de  $O$  sont entiers algébriques par rapport à  $S$ . Ce critère peut aussi être formulé au moyen de la fonction caractéristique de Hilbert par les équations aux différences:  $A^i \chi(a, h) = \chi(a_j, h)$  ( $j = 1, 2, \dots, r+1$ ), en désignant par  $a$  l'idéal associé à la variété  $V$  dans  $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , et en posant  $a_j = a + (x_1) + (x_2) + \dots + (x_j)$ .

*Léonce Lesieur.*

### Vektor- und Tensorrechnung. Kinematik:

**Manarini, Mario:** Sopra una omografia vettoriale che si presenta utile nelle applicazioni. Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari 20, 151–154 (1951).

Die durch wiederholte äußere Multiplikation eines Vektors mit zwei gegebenen Vektoren erzeugte Homografie (affine Transformation) wird genauer studiert und als nützlich nachgewiesen.

*Georg Hamel.*

**Löbell, Frank:** Der „Kern“ als Basis komplexer Vektoren. Math. Z. 54, 129–135 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 38, 324) hat Verf. gezeigt, daß die Vektoren des komplexen dreidimensionalen euklidischen Raumes durch die reellen mit komplexen Zahlen belegten eigentlichen Geraden des dreidimensionalen hyperbolischen Raumes und die reellen Linienelemente seiner absoluten Fläche dargestellt werden können. Die Entwicklungen werden durchgeführt, ohne daß Koordinaten für die Vektoren verwendet werden. In der vorliegenden Arbeit wird die damals ange-deutete Absicht, weitere damit zusammenhängende Fragen zu behandeln, aus-geführt. — Das Verfahren, Koordinaten für die komplexen Vektoren einzuführen, besteht in der Angabe einer Basis linear unabhängiger Vektoren. Als Basis wird ein System von drei reellen, entweder eigentlichen oder die absolute Fläche berührenden Geraden ohne gemeinsames Lot gewählt, deren jede mit einer beliebigen komplexen Zahl belegt ist. Eine derartige Figur wird vom Verf. „Kern“ genannt. — Es stellt sich nun heraus, daß auf dieser Grundlage ein Formalismus aufgebaut werden kann, der der üblichen Vektorrechnung sehr ähnlich ist und das Rechnen mit reellen an einem Punkt  $O$  gehetzten Vektoren als Spezialfall enthält. J. C. H. Gerretsen.

Udgaonkar, B. M.: Invariants of a tensor of rank 2. Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A 34, 199—200 (1951).

Es handelt sich um die algebraischen Invarianten eines Tensors zweiter Stufe  $F^{kl}$  und des Maßtensors  $g_{ik}$ . Die Beweisführung und das Resultat sind nur richtig, wenn  $F^{kl}$  symmetrisch ist, was Verf. augenscheinlich stillschweigend voraussetzt. Bei symmetrischem  $F^{kl}$  deckt sich die Frage mit der nach den Orthogonalinvarianten einer quadratischen Form und ist das Ergebnis seit langem bekannt. Bei nicht-symmetrischen Tensoren  $F^{kl}$  liegen die Verhältnisse viel verwickelter; ein einfaches Beispiel hierzu findet man in meiner „Invariantentheorie“, p. 265.

Roland W. Weitzenböck.

Froda, Al.: Propriétés des fonctions vectorielles et leurs caractères. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Şti. A 3, 117—123, russische und französ. Zusammenfassgn. 123—125, 125—126 (1951) [Rumänisch].

$V(t)$  sei eine Vektorfunktion der reellen Veränderlichen  $t$  im  $(x, y, z)$ -Raum, die reelle Funktion  $V_u(t)$  für  $u = x, y, z$  die  $u$ -Komponente von  $V(t)$ . Eine Eigenschaft  $P$  ist vom Charakter  $VA$  (bzw.  $VA_1$ ), wenn zugleich mit  $\bar{V}(t)$  auch jedes (bzw. mindestens ein)  $V_u(t)$  die Eigenschaft  $P$  hat; sie ist vom Charakter  $AV$  (bzw.  $A_1V$ ), wenn sie sich von allen (bzw. von einem)  $V_u(t)$  auf  $\bar{V}(t)$  überträgt. Wenn der Vektor  $\bar{W}$  aus  $\bar{V}(t)$  durch eine Operation, die  $VA$  und  $AV$  ist, entsteht, heißt  $W$  vom Charakter  $VA V$ . — Begriffe wie Limes, Stetigkeit, Differenzierbarkeit an der Stelle  $t_0$  (auch einseitig) werden betrachtet; ebenso Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Beschränktheit in einem Intervall  $\delta$ ; ferner die gleichmäßige Beschränktheit einer Funktionenmenge  $V_\sigma(t)$  in  $\delta$ , unabhängig von  $\sigma$  und von  $t \in \delta$ . Alle diese Eigenschaften sind  $VA$  und  $AV$ . Eine Unstetigkeit 1. Art ist  $VA_1$  und  $AV$ , eine solche 2. Art  $VA_1$  und  $A_1V$ . Die Eigenschaft eines Vektors  $W$ , derivierter Vektor von  $V(t)$  zu sein, ist  $VA$ , aber weder  $A_1V$  noch  $AV$ . — Sätze: I. Wenn  $V(t)$  in einem abgeschlossenen  $\delta$  stetig ist, ist sie dort gleichmäßig stetig. II. Die Eigenschaft der derivierten Vektoren von  $V(t)$ , in  $\delta$  gleichmäßig beschränkt zu sein, ist  $VA$  und  $AV$ . III. Der Ableitungsvektor einer in  $\delta$  stetigen Funktion  $V(t)$  kann keine Unstetigkeit 1. Art in  $\delta$  haben. IV. Eine im abgeschlossenen  $\delta$  gleichmäßig stetige  $\bar{V}(t)$  ist in  $\delta$  gleichmäßiger Limes einer Folge stetiger Vektorfunktionen, die in  $\delta$  beliebig oft differenzierbar sind und deren Ableitungen von einer gewissen Ordnung an verschwinden (Polynome). V. Wenn die Menge der derivierten Vektoren einer in  $\delta$  stetigen  $V(t)$  in  $\delta$  gleichmäßig beschränkt ist, besitzt  $V(t)$  für alle  $t \in \delta$ , mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null, einen Ableitungsvektor.

(Aus der französ. Zusammenfassung.)

Truesdell, C.: On the equation of the bounding surface. Bull. techn. Univ. Istanbul 3, 71—78 und türkische Zusammenfassg. 71 (1951).

Nach Lagrange-Kelvin ist das Verschwinden der substantiellen Ableitung einer Funktion  $f(\mathbf{r}, t)$  ( $\mathbf{r}$  Ortsvektor) nach  $t$ :  $(1) Df/Dt = 0$  notwendig und hinreichend dafür, daß die Fläche  $f(\mathbf{r}, t) = 0$  eine mögliche Randfläche einer bewegten Flüssigkeitsmasse ist. Wie Verf. bemerkt, ist der Beweis von Lagrange sicher für



stetige Bewegungen richtig, da in diesem Falle die Fläche sogar materiell erhalten bleibt; bei unstetigen Bewegungen bestehen aber Bedenken. Verf. untersucht im Vorliegenden in Anlehnung an die Methode von Hugoniot-Hadamard erneut die Bedingung (1); seine Resultate betreffen Bewegungen mit  $\varrho = 0$  und  $\varrho = \infty$  ( $\varrho$  Dichte) auf der Oberfläche, die dort unstetig sind und bei denen (1) nicht notwendig und hinreichend zu sein braucht. Der Fall  $\varrho = \infty$  wird an einem Beispiel illustriert.

*Karl Maruhn.*

**Kilmister, C. W.:** Tensor identities in wave-tensor calculus. Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 207, 402—415 (1951).

**Horninger, H.:** Über eine planare Evolventenbewegung (zylindrische Rollung einer Ebene). Bull. techn. Univ. Istanbul 3, 104—122 und türkische Zusammenfassg. 103—104 (1951).

Verf. untersucht mit Methoden der darstellenden Geometrie jene speziellen Bewegungsvorgänge  $E$  im Euklidischen Raum, bei denen eine im Gangraum  $R$  befestigte Ebene  $\tau$  auf einem Drehzylinder  $\Gamma$  des Rastraumes  $R'$  rollt. Da als Punktbahnen Kreisevolventen in parallelen Ebenen auftreten, werden diese Bewegungsvorgänge als „planare Evolventenbewegungen“ bezeichnet. Die Bahnfläche  $\Psi$  einer beliebigen Geraden von  $R$  vom Verf. als „Evolventenschraubfläche“ bezeichnet, besitzt einen Drehkegel zum Richtkegel; ihre Striktionslinie (Evolventenschraublinie) liegt im allgem. auf einem einschaligen Drehhyperboloid, sowie einer geraden, offenen Regelschraubfläche und besitzt als Grundriß eine Kreisevolvente (Grundrißebene normal zu  $\Gamma$ ). Evolventenschraublinien entstehen auch durch gleichförmige Bewegung eines Punktes  $P$  auf einer Geraden  $j$  allgemeiner Lage bei gleichzeitiger Drehung von  $j$  mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um die Achse  $a$  von  $\Gamma$ . Ist  $j$  zu  $a$  normal oder parallel, so erhält man eine Kreisevolvente bzw. gewöhnliche Schraublinie. Zu  $\tau$  parallele Gerade beschreiben Regelschraubflächen, welche Erzeugungsweise bereits auf L. Burmester [Z. angew. Math. Phys. 33, 337—348 (1888)] zurückgeht. Jede Ebene  $\varepsilon$  von  $R$  umhüllt im allgem. eine Schraubtorse; umgekehrt gibt es ein Büschel koaxialer Bewegungen  $E$ , die eine vorgegebene Schraubtorse als Hüllbahn einer und derselben Ebene  $\varepsilon$  erzeugen. Schließlich betrachtet Verf. noch die einer Bahnregelfläche  $\Psi$  umschriebenen Bahntorsen und deren Berührungslinien mit  $\Psi$ .

*Hans R. Müller.*

**Müller, Hans Robert:** Über geschlossene Bewegungsvorgänge. Monatsh. Math. 55, 206—214 (1951).

Die Bewegungen des euklidischen  $R_3$  lassen sich nach E. Study beschreiben durch Drehungen einer dualen Einheitskugel in sich. Einer geschlossenen Kurve dieser Kugel entspricht eine geschlossene Regelfläche des  $R_3$ , aus der geodätischen Gesamtkrümmung der Kurve erhält man durch Übertragung zwei Invarianten der Regelfläche, nämlich einerseits die geodätische Gesamtkrümmung der sphärischen Bildkurve der Erzeugenden, die nach dem Satz von Gauß-Bonnet mit dem Öffnungswinkel dieses sphärischen Bildes zusammenhängt, und andererseits die wohl von W. Blaschke eingeführte Öffnungsstrecke der Regelfläche, um die eine orthogonale Trajektorie der Erzeugenden nach einem Umlauf verschoben erscheint. Der Öffnungswinkel läßt sich dual dazu deuten als der Winkel, um den die Tangentenebene einer Torse nach einem Umlauf verdreht ist, die der Regelfläche so umschrieben wird, daß ihre Erzeugende stets auf der zugehörigen der Regelfläche senkrecht steht — Torse und Regelfläche sollen dabei gemeinsame Tangentenebene haben. — Verf. überträgt weiter Integralformeln von W. Blaschke (dies. Zbl. 32, 121) für geschlossene Bewegungsvorgänge auf der Kugel mittels des Study'schen Prinzips auf solche des  $R_3$ , beispielsweise gilt für die Öffnungsstrecken  $\bar{g}$  und  $\bar{g}'$  der Regelflächen, die von der momentanen Schraubachse im Gang- und im Rastraum erzeugt werden, die Formel  $\bar{g}' - \bar{g} = \int \omega_0$ , wobei rechts die Gesamt-

schiebstrecke der Bewegung steht. Mittels der Übertragung des „Steinervektors“ läßt sich die Öffnungsstrecke der Bahnfläche einer im Gangraum festen Geraden darstellen. Als Beispiel wird die Bewegung betrachtet, bei der auf der dualen Kugel beide Polbahnen Kreise sind.

Gerrit Bol.

### Differentialgeometrie in Euklidischen Räumen:

● Cartan, Élie: *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle traitées par la méthode du repère mobile*. Paris: Gauthier-Villars 1951. VI, 270 p. 1200 francs.

Fabricius-Bjerre, Fr.: *On the osculating conics of the cycloids*. Mat. Tidsskr. B 1951, 27—41 (1951).

Die in der Arbeit betrachteten zyklischen Kurven lassen sich dadurch kennzeichnen, daß ihre Stützfunktion  $h(\theta)$  bei geeigneter Wahl des Zentrums 0 einer Gleichung der Form  $h'^2 + \mu h^2 = \nu$  mit festen  $\mu, \nu$  genügt; es dann ist  $h'' + \mu h = 0$ . Zu diesen Kurven gehören die Epi- und Hypozykloiden, die Kreisevoluten, die logarithmischen Spiralen, weiter die Parazykloiden mit der Stützfunktion  $h(\theta) = a \operatorname{Sh} m \theta$  und die Hyperzykloiden mit  $h(\theta) = a \operatorname{Ch} m \theta$ . — Die Affinnormale einer solchen Kurve enthält den Punkt, den man findet, indem man das Lot aus 0 auf die metrische Normale um  $1/3$  verlängert. Verf. bestimmt weiter den Mittelpunkt und die Gleichung des Schmiegekegelschnittes, dieser ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, wenn die Größe  $\Delta = (9 - \mu) h^2 + 4\nu$  positiv, Null oder negativ ist. — Jeder Scheitel einer zyklischen Kurve ist sextaktisch, andere sextaktische Punkte gibt es nur auf den Hyperzykloiden mit  $m > 1$  und auf diesen genau zwei. Verf. untersucht weiter in entsprechender Weise die zu den zyklischen in bezug auf einen Kreis polaren Kurven; zu ihnen gehören die Ahrenkurven und die Spiralen von Pointot.

Gerrit Bol.

Bilinski, Stanko: *Über sphärische Evolventoiden der Raumkurven*. Soc. Sci. natur. Croatica, Period. math.-phys. astron., II. Ser. 6, 106—112 und serbische Zusammenfassg. 113—114 (1951).

Verf. versteht unter einer sphärischen Evolventoide einer Raumkurve eine orthogonale Trajektorie ihrer Schmiegekugeln und leitet für sie (in vektorieller Schreibweise mit Hilfe der Frenetschen Formeln) ein System von gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen ab. Durch Umformung (Homogenisieren) wird es in symmetrische Form gebracht und für den Sonderfall einer gewöhnlichen Schraubenlinie als Ausgangskurve elementar gelöst.

Hans R. Müller.

Pylarinos, O.: *Sur une relation entre les courbes sphériques et les courbes de Bertrand*. Bull. Sci. math., II. Ser. 75, 91—96 (1951).

In vektorieller Schreibweise wird aus den Frenetschen Formeln gefolgert, daß es zu einer sphärischen Kurve  $c$  — der Radius der Trägerkugel sei  $R$  — immer  $\infty^1$  längentreu auf  $c$  bezogene Bertrand-Kurven  $c'$  gibt, deren Hauptnormalen zu den Tangenten an  $c$  jeweils (gleich- oder gegensinnig) parallel sind. Umgekehrt ist zu jeder Bertrand-Kurve  $c'$  eine solche sphärische Kurve  $c$  bestimmt. Für die Koeffizienten  $A$  und  $B$  der linearen Beziehung  $A\kappa + B\tau = 1$  zwischen Krümmung  $\kappa$  und Torsion  $\tau$  von  $c'$  gilt  $R^2 = A^2 + B^2$ . Durch verschiedene Werte von  $R$  wird eine Klassifikation der Bertrandschen Kurvenpaare gegeben.

Hans R. Müller.

Lauffer, R.: *Analytische Kurvenpaare auf einer Fläche 2.0*. Arch. der Math. 2, 461—465 (1951).

Für zwei Punkte  $U$  und  $V$ , die in Abhängigkeit von einem gemeinsamen Parameter  $t$  ein analytisches Kurvenpaar auf einer (absoluten) Quadrik  $(X|X) = 0$  durchlaufen, werden — nach Einführung eines invarianten Parameters und geeigneter Normierung — die Invarianten  $(U|\dot{V}) = -(\dot{U}|V)$ ,  $(\dot{U}|\dot{V})$  und  $(\ddot{U}|\ddot{V}) = -(\ddot{U}|\dot{V})$ , aus denen sich alle übrigen elementaren Invarianten des Kurvenpaares ableiten lassen, festgestellt und geometrisch gedeutet.

W. Wunderlich.



Deweck, M.: Courbes tracées sur une surface développable. *Mathesis* 60, 84—88 (1951).

Sind für zwei auf derselben Kegelfläche verlaufende Kurven  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  die Schnittwinkel mit einer Erzeugenden, ferner  $d_1$  und  $d_2$  die Abstände der Kegelspitze von den zugehörigen Schmiegeebenen, so gilt nach einer bekannten Formel von Peaucellier für die entsprechenden Krümmungsradien  $R_1$  und  $R_2$  die Beziehung  $R_1:R_2 = d_1 \sin^3 \sigma_2 : d_2 \sin^3 \sigma_1$ . Verf. betrachtet allgemeiner Kurvenpaare auf einer beliebigen Torse und stellt — mittels Vektorrechnung, jedoch ohne die Flächentheorie heranzuziehen — die Gültigkeit der gleichen Formel fest, wenn die Kegelspitze durch den Gratpunkt der Erzeugenden ersetzt wird. Dies war im Hinblick auf die Existenz oskulierender Kegel vorauszusehen.  
W. Wunderlich.

Finsterwalder, Sebastian: Streifengeometrie. I. S.-B. Bayer. Akad. Wiss., München, math.-naturw. Abt. 1950, 209—231 (1951).

Eine Behandlung der Differentialgeometrie der Flächenstreifen (vgl. W. Blaschke, *Differentialgeometrie I*, 4 Aufl., Berlin 1945, S. 67—84) mit den Methoden der darstellenden Geometrie. Im Zentrum steht die Bewegung des begleitenden Dreibeins des Streifens, den man sich in einen festen Aufpunkt  $O$  verschoben denkt. Dem Streifen entspricht ein Bewegungsvorgang der Einheitskugel um  $O$  in sich. Def im beweglichen Dreibein beschriebene momentane Drehvektor  $\mathfrak{f}(s) = \{a(s), b(s), c(s)\}$  dieser Bewegung — hier Formpfeil genannt — kennzeichnet den Streifen bis auf Bewegungen, wenn als Parameter  $s$  des Bewegungsvorganges die Bogenlänge  $s$  der Streifenkurve gewählt wird. Zur zeichnerischen Darstellung kann man Gangpolbahn und Rastpolbahn — hier Polriß und Kugelriß genannt — der Bewegung heranziehen, beide sphärische Kurven sind längentreu aufeinander bezogen und kennzeichnen den Streifen, wenn sie mit zwei Skalen für  $s$  und für die Länge des Formpfeils versehen werden. Weiter verwendet Verf. einen „Wickelriß“ des Streifens; er entsteht, wenn der Raum mittels der orthogonalen Trajektorien der Normalebenen der Streifenkurve auf eine feste dieser Ebenen abgebildet wird. — Für Schraubenstreifen ist  $\mathfrak{f}(s)$  fest, beide Polbahnen entarten in Punkte. Streifen bei denen eine Komponente oder zwei Komponenten von  $\mathfrak{f}(s)$  verschwinden, und Büschel von Streifen, die sich unter festem Winkel schneiden, werden eingehender betrachtet.  
Gerrit Bol.

Marcus, F.: Sur un résultat de B. Segre. *Acad. Republ. popul. Române, Bul. Sti. A* 3, 127—132, russische und französ. Zusammenfassgn. 132—133, 133 (1951) [Rumänisch].

Récemment B. Segre (ce Zbl. 37, 240) a démontré en général le théorème suivant, qui contient comme des cas particuliers, les résultats de Beltrami et de Busse. Les surfaces représentables sur un plan euclidien, de façon que leurs géodésiques se transforment en cercles (ou en particulier en droites) sont seulement les surfaces à courbure totale constante. — Dans cette Note on montre que seulement des surfaces à courbure totale constante peuvent être représentées sur le plan euclidien, afin que les courbes planes  $y = -(c_2/c) \log \cos(c x + c_1)$  ou les paraboles  $y = c_0 x^2 + c_1 x + c_2$  puissent correspondre à leurs géodésiques. On démontre l'existence de quelques classes particulières de surfaces à courbure totale constante, qui satisfont le problème. Celles-ci sont des surfaces moulures.  
Autoreferat.

Lemoine, Simone: Sur les réseaux conjugués persistants à angle constant. *C. r. Acad. Sci., Paris* 232, 1630—1631 (1951).

Questa ricerca trae origine dal noto teorema di Codazzi, secondo il quale le superficie modanate cilindriche sono le uniche suscettibili di una deformazione continua, che conservi le linee di curvatura. — L'autrice dimostra che questo è l'unico caso di rete persistente di cui le curve di una famiglia siano traiettorie delle curve dell'altra sotto un angolo costante. — La dimostrazione, semplice ed elegante, poggia su alcune formule di V. Lalan (questo Zbl. 40, 83).  
R. Calapso.

Kruppa, Erwin: Natürliche Geometrie der Mindingschen Verbiegungen der Strahlflächen. *Monatsh. Math.* 55, 340—345 (1951).

Verf. hat (dies. Zbl. 36, 115) eine „natürliche Geometrie“ der Regelflächen entworfen, die in Zukunft für die Behandlung dieses Gegenstandes maßgeblich sein dürfte. Insofern die Bogenlänge der in der Differentialgeometrie oft etwas stiefmütterlich behandelten Striktionslinie als der eine Flächenparameter gewählt wird, sind freilich Minimalkurven als Striktionslinien nicht einbegriffen. Als Invarianten treten „Krümmung“, „Torsion“, „Striktion“ der Fläche auf. Es wird gezeigt, daß sich mit den Methoden des Verf. sehr einfach „Mindingsche“ Verbiegungen der Regelflächen behandeln lassen, d. h. Verbiegungen, die wieder zu Regelflächen führen. In allen behandelten Fällen werden die Probleme darauf reduziert, die (bei einer Mindingschen Biegung nicht invariante) Torsion der neuen Fläche zu ermitteln. Diese Torsion ergibt sich je nachdem als Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung oder einer endlichen (linearen, kubischen) Gleichung.

*Eduard Rembs.*

**Pylarinos, O.: Über die Strahlensysteme, deren Brennflächenmäntel durch die Systemstrahlen konform aufeinander abgebildet werden.** Arch. der Math. 2, 449—455 (1951).

Wenn  $\omega$  den Winkel der Brennebenen des Kongruenzstrahles  $(u, v)$ ,  $2\rho$  den Brennpunkt Abstand und  $e, f, g$  die Fundamentalgrößen 1. Ordnung seines sphärischen Bildes bedeuten, so führt die Frage nach den im Titel genannten Strahlensystemen auf ein symmetrisches System partieller Differentialgleichungen, das im Sonderfalle  $\omega = \text{const.}$  diskussionsfähig ist und dann auf folgende Ergebnisse führt: a) Es ist  $\omega = 2\pi/3$ . b) Entweder bestehen die sphärischen Bilder der abwickelbaren Flächen aus zwei Scharen von Kugelloxodromen, welche die Meridiane unter Winkeln  $\pm \pi/3$  schneiden, c) oder die Brennflächen sind  $W$ -Flächen; das letzte ist stets der Fall, wenn die Brennflächen durch das Strahlensystem isometrisch bezogen sind [vgl. A. Schur, Math. Z. 19, 114—127 (1924), S. Finikoff, Ann. Mat. pura appl., IV. Ser. 1, 175—184 (1924)]. — Abschließend wird der Fall eines  $W$ -Strahlensystems behandelt. In einem Sonderfall erhält man dabei von Thybaut studierte  $W$ -Strahlensysteme, die als einzige bisher bekannte die beiden Brennflächenmäntel konform aufeinander abbilden.

*Karl Strubecker.*

**Thybaut, Alexandre et Paul Robert: Sur les surfaces engendrées par les cercles d'une congruence paratactique. I, II.** C. r. Acad. Sci., Paris 233, 775—777, 842—844 (1951).

I. Gegeben eine parataktische Kreiskongruenz  $K$ , deren horizontaler Zentralkreis (Radius 1, Mitte  $O$ ) die lotrechte Achse  $Oz$  habe, auf der der feste Punkt  $P(0, 0, 1)$  liegt. Jede stetige Schar von  $\infty^1$  Kreisen  $(C)$  der Kongruenz erzeugt eine Fläche  $\Sigma$  der Kongruenz, die man durch den Ort der Kreismitten  $C$ , d. h. eine ebene Kurve  $L$  in der Zentralebene  $z = 0$ , kennzeichnen kann. Ähnlich erhält man durch Spiegelung des festen Punktes  $P$  an den Kreisebenen  $\infty^1$  Punkte  $g$ , deren Ort eine auf der Zentralkugel (Radius 1, Mitte  $O$ ) gelegene sphärische Kurve  $G$  ist, die ebenfalls die Fläche  $\Sigma$  der Kongruenz kennzeichnet. Die Kurven  $L$  und  $G$  hängen dabei durch eine einfache Möbiussche Kugeltransformation zusammen. Verff. zeigen nun, wie man verschiedene geometrische Eigenschaften (vor allem der Möbiusschen Geometrie, aber auch gewisse metrische Eigenschaften) der Flächen  $\Sigma$  in einfacher Weise an Hand der beiden Bildkurven  $L$  (eben) und  $G$  (sphärisch) beherrschen kann. Z. B. wird sehr einfach gezeigt, daß auf jeder Regelfläche  $\Phi$ , die von den Normalen einer Fläche  $\Sigma$  längs eines Kreises  $C$  gebildet wird, stets  $\infty^1$  Paare von Fokalkegelschnitten liegen. Besonders einfach gestaltet sich durch die Abbildung die Theorie der berührenden und oskulierenden Dupinschen Zykliken der Flächen  $\Sigma$  längs ihrer Kreise  $C$ .

II. Die Note befaßt sich zunächst mit den Flächen  $\Sigma_P$  der parataktischen Kreiskongruenz  $K$ , welche einen beliebigen Kreis  $\Gamma_0$  enthalten, der nicht in  $K$  liegt. Diese Flächen tragen dann sogar  $\infty^1$  solche Kreise  $\Gamma$ , und sind i. a. algebraisch von 8. Ordnung. Die Kreise  $\Gamma$  schneiden die parataktischen Kreise  $(C)$  von  $\Sigma_P$  jeweils unter festen Winkeln. Die Kreise  $\Gamma$  sind auch untereinander bezüglich zweier Kreise von  $K$  parataktisch, und diese beiden Kreise sind mit den Fokalkreisen von  $\Sigma_P$  identisch. — Allgemein bilden die Kreise  $(C)$  auf den Flächen  $\Sigma$  eine isotherme Familie. Die Krümmungslinien von  $\Sigma$  können durch Quadraturen bestimmt werden; jeder Kreis  $(C)$  schneidet die Krümmungslinien eines Systems unter festem Winkel. Man kann die Flächen  $\Sigma$  mit einer Schar ebener Krümmungslinien vollkommen bestimmen, ebenso durch zwei Quadraturen die mit einer Schar sphärischer Krümmungslinien. Das Problem der Be-



stimmung der isothermischen Flächen  $\Sigma$  ist äquivalent der Frage nach den sphärischen Kurven fester Torsion.

Karl Strubecker.

**Bartsch, Helmut:** Übertragung der Achtfachgewebeeigenschaften auf Hyperflächengewebe des  $n$ -dimensionalen Raumes. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 17, 1—21 (1951).

Eine Verallgemeinerung bekannter Sätze über Flächen-4-Gewebe auf Hyperflächen- $(n+1)$ -Gewebe des  $R_n$ . Zur Abbildbarkeit auf  $n+1$  Büschel paralleler Hyperebenen ist die Schließung des  $n$ -dimensionalen Analogons der Achtfachfigur, also einer „ $2n+2$ -Zelle“ notwendig und hinreichend. — Die aus Hyperebenen bestehenden Gewebe mit dieser Schließungseigenschaft bestehen aus den gemeinsamen Hyperebenen eines linearen Systems von Hyperflächen zweiter Klasse, das von  $\binom{n}{2} - 1$  homogenen Parametern abhängt. Bemerkenswert ist, daß die Hyperebenen einer Zelle hier nicht wie im  $R_3$  assoziiert sind.

Gerrit Bol.

**Blaschke, Wilhelm:** Sulla geometria dei tessuti. Archimede 3, 89—97 (1951).

Eine Werbeschrift für die Fragen der Gewebegeometrie, die eine Einführung in ihre Probleme und Methoden bringen soll. Zur differentialgeometrischen Behandlung schlägt Verf. eine Abwandlung des Cartanschen Kalküls der alternierenden Formen vor, wie sie der Ref. kürzlich ausführlich dargestellt hat (G. Bol., dies. Zbl. 43, 94).

Gerrit Bol.

**Wunderlich, Walter:** Zur Statik der Strickleiter. Math. Z. 55, 13—22 (1951).

Verf. gibt einen bemerkenswerten Beitrag zur Differenzengeometrie, welche differentialgeometrische Beziehungen durch elementargeometrische Eigenschaften finiter Modelle zu veranschaulichen und zu begründen sucht. Das „finite Modell“ ist hier eine Folge windschiefer Parallelegramme, wie sie durch die Sprossen und die beiden Holmpolygone einer Strickleiter gegeben sind. Untersucht werden die Gleichgewichtslagen, bei denen an jeder Ecke die dort sich schneidenden drei Parallelegrammseiten in einer Ebene liegen; der zugehörige Kräfteplan ist dann eine konvexe Doppelpyramide, deren Mäntel längs sämtlicher Kanten denselben Keilwinkel bilden und auch längs des Basispolygons unter einem konstanten Winkel zusammenstoßen. Das Basispolygon ist einem Drehellipsoid und einem konfokalen Drehhyperboloid umschrieben mit den Scheiteln der Doppelpyramide als Brennpunkten. Beim Grenzübergang vom finiten Modell zur Differentialgeometrie gehen die Sprossen der Strickleiter in eine Regelfläche konstanten Dralls und die Holme in zwei Haupttangentialkurven dieser Regelfläche über. Die Doppelpyramide geht in einen Doppelkegel über; er bildet an der Basiskurve einen konstanten Winkel, der an jeder Stelle durch die Schmiegeebene halbiert wird. Als Nebenprodukt ergeben sich verschiedene hübsche Sätze über Drehflächen zweiten Grades. — Die Arbeit weist Berührungspunkte auf mit einer analogen Untersuchung des Ref. über Parallelegramm-Gitter mit ebenen Vierkreuzen (dies. Zbl. 35, 375); jede Parallelegrammfolge eines solchen Gitters ist eine Strickleiter in Gleichgewichtslage.

Robert Sauer.

### Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

**Bell, P. O.:** A new approach to the study of contact in the projective differential geometry of surfaces. Duke math. J. 18, 689—695 (1951).

Nello studio proiettivo differenziale di una superficie  $S_0$  descritta da un punto  $x_0(u^1, u^2)$  si fa frequentemente uso di riferimenti mobili di cui un punto fondamentale è lo stesso  $x_0$  mentre i rimanenti  $x_1, x_2, x_3$  descrivono tre superficie  $S_i$  in corrispondenza con  $S_0$  e convenientemente scelte nei diversi casi. Per un riferimento siffatto sussistono formule di derivazione del tipo:  $\partial x_i / \partial u^\alpha = \Gamma_{i\alpha}^h x_h$  le quali determinano le proprietà proiettivo-differenziali comuni alla quaterna di superficie: le  $\Gamma_{i\alpha}^h$  si presentano nella definizione di derivata intrinseca rispetto ad  $u^\alpha$ , introdotta in un precedente lavoro [Trans. Amer. math. Soc. 60, 22—50 (1946)] dello stesso Autore. Questi la utilizza ora per scrivere nel riferimento locale le condizioni di immobilità per un dato elemento (punto, retta, piano) al variare di  $x_0$  lungo una linea  $u^\alpha = u^\alpha(t)$  e servendosi di esse ottiene poi rapidamente e in forma compatta le

condizioni perchè una superficie, rappresentata nel riferimento locale, abbia con una curva  $C$  di  $S_0$ , o con la  $S_0$  stessa, nel punto  $x_0$  un contatto di ordine  $k$ .

Piero Buzano.

**Bell, P. O.: Projective differential invariants of a curve of a surface.** Duke math. J. 18, 697—705 (1951).

Sia  $S_0$  una superficie analitica dello spazio proiettivo ordinario e siano  $x_0$  un suo punto generico e  $C$  una sua curva passante per  $x_0$ . Il lavoro è dedicato allo studio degli enti geometrici seguenti: curvatura proiettiva e torsione proiettiva di  $C$  in  $x_0$ , prima forma fondamentale proiettiva di  $S_0$ , tensore di curvatura proiettiva di  $S_0$ . La trattazione è caratterizzata dall'uso di algoritmi assoluti, già introdotti dall'A. in precedenti suoi lavori (v. Ref. prec.), i quali consentono di presentare formalmente gli enti suddetti come generalizzazioni dei corrispondenti enti metrici.

Piero Buzano.

**Rozet, O.: Sur les congruences non  $W$  de droites.** Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 205—215 (1951).

Une congruence non  $W$  de droites est représentée sur l'hyperquadrique de Klein par une surface  $(J)$  satisfaisant à un système de 4 équations aux dérivées partielles complètement intégrable du troisième ordre. Aux asymptotiques d'une nappe focale correspond sur  $(J)$  une grille hyperbolique [Bompiani, Rend. Circ. Mat. Palermo 46, 91—104 (1922); B. Segre, Ann. sci. Ecole norm. sup., III. Sér. 44, 153—212 (1927); Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, III. Sér. 20, 1—46 (1928). L'A. considère les transformations de Laplace généralisées de  $(J)$  et obtient de nombreuses propriétés de la congruence. Il montre en outre que  $(J)$  possède une infinité de grilles hyperboliques.

Lucien Godeaux.

**Goldsmith, N. A.: Differential invariants of ruled surfaces belonging to one special linear complex.** Duke math. J. 18, 831—836 (1951).

In engem Anschluß an V. Hlavatýs Differentielle Liniengeometrie, Groningen 1945, und in Ergänzung der dort vollzogenen Entwicklung und Diskussion der Theorie der Regelflächen, die einem, zwei oder drei allgemeinen linearen Komplexen angehören, entwickelt und diskutiert Verf. die Theorie der Regelflächen, die einem festen singulären linearen Komplex angehören, d. h. eine feste Leitgerade haben. Schließlich werden noch die Regelflächen, welche in parabolischen linearen Kongruenzen liegen, gekennzeichnet.

Karl Strubecker.

**Saban, Giacomo: Sulle varietà quasi-asintotiche. III. Ancora sulle varietà subordinate.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 113—117 (1951).

In questa nota conclusiva di altre due precedenti (questo Zbl. 39, 385) taluni risultati si devono modificare d'accordo con le obiezioni fatte recentemente da M. Villa (v. recens. succ.).

Federico Gaeta.

**Villa, Mario: Sulle quasi-asintotiche.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 195—197 (1951).

L'A. dimostra come taluni risultati di G. Saban (questo Zbl. 39, 385) sulle quasi-asintotiche, contrastanti con precedenti risultati di Villa (questo Zbl. 39, 385), siano fondati su errate asserzioni di geometria proiettiva iperspaziale.

Piero Buzano.

**Muracchini, Luigi: Le varietà  $V_5$  i cui spazi tangenti ricoprono una varietà  $W$  di dimensione inferiore alla ordinaria.** Boll. Un. mat. Ital., III. Ser. 6, 97—103 (1951).

Una varietà  $V_k$ , a  $k$  dimensioni, appartenente ad uno spazio  $S_r$  ( $r > 2k$ ) possiede, in generale,  $\infty^k$  spazi tangenti  $S_k$  il cui luogo è una varietà  $W$  di dimensione  $2k$ . Per particolari  $V_k$  la varietà  $W$  può però avere dimensione  $< 2k$ . Nasce così il problema di determinare le particolari  $V_k$  per cui ciò avviene. Per  $k = 3, 4$  il problema è stato risolto dal Terracini. — Il Recensore (questo Zbl. 22, 168, 169) ha dimostrato come il problema ha interesse anche per altre questioni di geometria proiettiva differenziale. — L'A. risolve il problema per  $k = 5$  pervenendo al seguente risultato: Le  $V_5$  per le quali la varietà degli  $S_5$  tangenti ha dimensione 9



appartengono ad uno dei tipi seguenti: 1.  $S_0$ -coni proiettanti una  $V_4$  non soddisfacente a nessuna equazione di Laplace, oppure soddisfacenti a  $1 \leq \delta \leq 5$  equazioni di Laplace l.i.; 2.  $V_5$  sviluppabili con curva direttrice non soddisfacenti ad altre equazioni di Laplace l.i. oltre a quelle che risultano dalla proprietà detta oppure soddisfacenti ad una o due ulteriori equazioni; 3.  $V_5$  sviluppabili con superficie direttrice, generiche oppure soddisfacenti ad una ulteriore equazione di Laplace; 4.  $V_5$  sviluppabili formate da  $\infty^2 S_3$  tangenti ad una superficie generica; 5.  $V_5$  formate da  $\infty^3$  superficie (sviluppabili o non) situate negli  $S_3$  di un  $S_2$ -cono proiettante una  $V_3$  generica, oppure soddisfacenti ad una o due equazioni di Laplace, oppure situate negli  $S_3$  di un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_4$  rigata sviluppabile che soddisfa a 6 equazioni di Laplace l.i.; 6.  $V_5$  luogo di  $\infty^3 S_2$  con  $S_6$  tangente fisso lungo ogni  $S_2$ , per altro generica oppure soddisfacenti ad una o due ulteriori equazioni di Laplace; 7)  $V_5$  formata da  $\infty^2 V_3$  situate negli  $S_5$  di un  $S_4$  — cono proiettante una superficie generica; 8.  $V_5$  formate da  $\infty^2 V_3$  situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante una  $V_4$  luogo di  $\infty^2$  piani che soddisfa a 6 equazioni di Laplace l.i., oppure situata negli  $S_4$  di una  $V_6$  luogo di  $\infty^2 S_4$  con  $S_7$  tangente fisso lungo ogni  $S_4$ ; 9.  $V_5$  luogo di  $\infty^2 S_3$  con  $S_7$  tangente fisso lungo ogni  $S_3$  e per altro generica; 10.  $V_5$  luogo di due sistemi di  $\infty^2 V_3$  situate negli  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4$  di C. Segre; 11.  $V_5$  luogo di  $\infty^2 V_3$  rigate e di  $\infty^2 S_3$ , situati nei due sistemi di  $S_4$  di un  $S_1$ -cono proiettante la  $V_4$  di C. Segre; 12.  $V_5$  luogo di  $\infty^1 V_4^0$  di C. Segre tali che gli  $S_5$  tangenti nei punti di una  $V_4^0$  passano per un punto. Alcune di questa  $V_5$  si possono far rientrare in più d'uno dei tipi precedenti. L'A. comunica inoltre alcuni risultati relativi ad un valore generico di  $k$ . Le dimostrazioni appariranno in una estesa Memoria di prossima pubblicazione.

Mario Villa.

### Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Wintner, Aurel: On Riemann metrics of constant curvature. Amer. J. Math. 73, 569—575 (1951).

Let  $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$  be the arc element of a  $n$ -dimensional Riemann space, where the coefficients  $g_{ij}$  have a non-vanishing determinant and are only assumed of class  $C'$  (i. e. such as to possess continuous partial derivatives of first order). The Christoffel symbols of second kind  $\Gamma_{jk}^i$  exist and are continuous functions; hence Levi-Civita's parallel transport exists along every smooth path. The author proves the equivalence of the two following definitions of Euclidean spaces: a) No vector is changed by parallel transportation along any closed smooth path; b) there exists a transformation of coordinates  $y^i = y^i(x)$  such that the transformed arc element  $ds^2 = h_{ij} dy^i dy^j$  has constant coefficients. The proof makes use of a recent improvement of the classical existence theorem for total systems of differential equations due to Hartman and Wintner (this Zbl. 39, 168). The same proof applies to spaces with an affine connection. Then, if the components  $\Gamma_{jk}^i$  are only assumed continuous functions of  $x$ , the condition a) above is equivalent to the following condition c) there exists a transformation of coordinates which transforms the  $\Gamma_{jk}^i$  so as to make them identically zero. — The metric of  $g_{ij} dx^i dx^j$  (with the  $g_{ij}$  of class  $C'$ ) is said to be of constant curvature  $\lambda$  if the system  $\epsilon y / \partial x^i = w_i$ ,  $\partial w_k / \partial x^i = \Gamma_{ik}^h w_h - \lambda g_{ik} y$  for a suitable  $\lambda = \text{constant}$  has a solution of class  $C'$  (if the  $g_{ij}$  are of class  $C''$  this definition coincides with the ordinary one). With this definition the author proves that two metrics with the same constant curvature are equivalent.

Louis A. Santaló.

Ruse, H. S.: The Riemann complex in a four-dimensional space of recurrent curvature. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 13—31 (1951).

Der Krümmungstensor  $R_{hijk}$  eines  $n$ -dimensionalen Riemannschen Raumes  $V_n$  genügt bekanntlich den Bedingungen  $R_{hijk} = -R_{ihjk} = -R_{hikj} = R_{jkh i}$ . Führt man daher für den von zwei Vektoren  $p^r$  und  $q^s$  aufgespannten Bivektor die Koordinaten  $p^{rs} = p^r q^s - p^s q^r$  ein, so wird  $R_{hijk}$  an jeder Stelle bis auf einen skalaren Faktor gekennzeichnet durch die quadratische Gesamtheit von zweidimensionalen Flächenelementen für die  $R_{hijk} p^{hi} p^{jk} = 0$ . Im unendlich fernen  $E_3$  des Lokalraumes schneiden diese einen quadratischen Geradenkomplex aus, dessen Eigenschaften in der zu  $g_{ik} p^i p^k = 0$  als absolute Quadrik gehörigen elliptischen

Geometrie die  $V_n$  lokal weitgehend kennzeichnen. [Vgl. Verf., Proc. roy. Soc. Edinburgh 62, 64—73 (1940).] Verf. untersucht hier für  $n = 4$  den Fall, daß ein nichtverschwindender Vektor  $\kappa_p$  vorhanden ist für den  $R_{hijk} \kappa_p + R_{hikp} \kappa_j + R_{hipj} \kappa_k = 0$ . Diese Gleichung ist infolge der Bianchischen Identität befriedigt in den Räumen für die  $R_{hijk} = \kappa_p R_{hijk}$  (spaces of recurrent curvature),  $\kappa_p$  ist dann ein Gradientvektor, weiter gibt es einen solchen Vektor  $\kappa_p$  in gewissen im Sinne von E. Cartan symmetrischen Räumen ( $R_{hikp} = 0$ ). Der fragliche Komplex entartet hier in zwei ausgeartete lineare, deren Leitgeraden entweder zusammenfallen oder sich schneiden und im letzteren Fall in ihrem Schnittpunkt die absolute Quadrik berühren. Vgl. auch A. G. Walker, dies. Zbl. 39, 177. Gerrit Bol.

**Kurita, Minoru:** Characterization of certain Riemann spaces by development. Nagoya math. J. 3, 81—90 (1951).

Die Riemannschen Räume, für die das Bogenelement  $ds$  gegeben ist durch

$$(1) \quad ds^2 = a(x^i) g_{\alpha\beta}(x^\gamma) dx^\alpha dx^\beta + g_{\lambda\mu}(x^i) dx^\lambda dx^\mu,$$

[ $i = 1, \dots, n$ ;  $\alpha, \beta, \gamma = 1, \dots, k$ ;  $\lambda, \mu = k+1, \dots, n$ ; ( $k < n$ )] enthalten als Spezialfälle eine Reihe von wichtigen Räumen. K. Yano (dies. Zbl. 23, 168) hat gewisse notwendige und hinreichende Bedingungen angegeben, die eine Charakterisierung der Räume vom Typus (1) darstellen. Verf. gibt eine neue Charakterisierung der genannten Räume an, indem er die Methode der Abwicklung der euklidischen Räume, die den gegebenen Riemannschen Raum tangieren, längs gewisser Hyperflächenfamilien anwendet. So erhält er einige Sätze, die notwendige und hinreichende Bedingungen bilden dafür, daß  $ds^2$  eine von den folgenden besonderen Gestalten besitzt: a) der Koeffizient  $a(x^i)$  enthält wenigstens eine der Variablen  $x^i$ . b) der Koeffizient  $a(x^i)$  enthält keine der Variablen  $x^i$ , was sich auf den Fall  $a = 1$  reduzieren läßt. c) Spezialfall  $k = n - 1$ . d) Spezialfall  $k = n - 1$ , wobei  $g_{nn} = 1$ . e) Spezialfall  $k = n - 1$ , wobei  $a = g_{nn} = 1$ . Verf. bedient sich der Cartanschen Methode der äußeren Differentialformen. Stanislaw Golab.

**Rauch, H. E.:** A contribution to differential geometry in the large. Ann. of Math., II. Ser. 54, 38—55 (1951).

$M^n$  sei eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit mit vollständiger Riemannscher Metrik, deren Krümmung (der 2-dimensionalen geodätischen Flächenelemente) überall größer als eine positive Konstante ist;  $\bar{M}^n$  sei die universelle Überlagerung von  $M^n$ . Dann weiß man (Myers, dies. Zbl. 11, 225; Schoenberg, dies. Zbl. 5, 299):  $\bar{M}^n$  ist geschlossen (also auch  $M^n$  geschlossen und die Fundamentalgruppe von  $M^n$  endlich). Für  $n = 2$  ist somit  $M^n$  die Sphäre  $S^n$ ; für  $n > 2$  ist die Homöomorphie  $\bar{M}^n = S^n$  gesichert in dem alten Spezialfall konstanter Krümmung (Killing; Klein); dagegen ist die mit der Hermite-elliptischen Metrik versehene komplexe projektive Ebene eine  $M^4 = M^4 \neq S^4$ , deren Krümmung bei geeigneter Normierung überall  $\geq 1$  ist. In diesen Zusammenhang gehört der Hauptsatz der vorliegenden Arbeit: Es gibt eine solche Zahl  $h$ ,  $0 < h < 1$ , daß jede  $M^n$  mit positiver Krümmung  $K$ , für welche die Schwankung von  $K$  der Beschränkung  $\text{Min } K > h \text{ Max } K$  unterliegt, von der Sphäre  $S^n = \bar{M}^n$  überlagert wird. — Ein  $h$ , welches dies leistet, ist die Wurzel der Gleichung

$$(1) \quad 2 \cdot \sin(\pi \cdot \sqrt{h}) = \sqrt{h}, \quad (h \sim 0,75);$$

ob dies das beste, d. h. kleinste  $h$  ist, ist fraglich; jedenfalls muß  $4h \geq 1$  sein, da in der erwähnten Metrik der komplexen projektiven Ebene  $\text{Min } K = 1$ ,  $\text{Max } K = 4$  ist. — Der Beweis hat teils analytischen, teils topologischen Charakter. Die analytische Grundlage ist der folgende Satz Sturmscher Art, der an und für sich Interesse verdient und neu sein dürfte: Theorem 4. Zwischen den Systemen von Differentialgleichungen (2)  $y_i''(s) + R_{ij}(s) y_j(s) = 0$ , (2)  $\bar{y}_i''(s) + \bar{R}_{ij}(s) \bar{y}_j(s) = 0$  ( $i, j = 1, \dots, m$ ) bestehe die Beziehung  $R_{ij} u_i u_j > \bar{R}_{ij} u_i u_j$  für  $u \neq (0, \dots, 0)$ , und eine der beiden Matrizen  $R_{ij}$ ,  $\bar{R}_{ij}$  sei von der Form  $F(s) \delta_{ij}$ . Dann gelten für je zwei Lösungen  $y, \bar{y}$ , welche die Anfangsbedingungen  $y_i(0) = \bar{y}_i(0) = 0$ ,  $y_i' y_i'(0) = \bar{y}_i' \bar{y}_i'(0) \neq 0$  erfüllen, die Ungleichungen  $y_i y_i(s) < \bar{y}_i \bar{y}_i(s)$ , solange das Intervall  $(0, s)$  keinen zu 0 konjugierten Punkt (d. h. keine Nullstelle einer in 0 verschwindenden nicht-trivialen Lösung) von (2) enthält. (Über doppelte Indizes ist zu summieren.) — Der Beweis benutzt die Tatsache, daß die Lösungen von (2) die Extremalen für das Integral  $\int (y_i' y_i' - R_{ij} y_i y_j) ds$  darstellen. — Mit Hilfe dieses Satzes beweist man weiter Theorem 3. Für die Krümmung  $K$  der Riemannschen  $M^n$  gelte



(3)  $L < K < H$  mit positiven Konstanten  $L$  und  $H$ . Die von einem Punkt  $P \in M^n$  ausgehenden Geodätischen  $g$  bilden ein Feld, solange ihre Länge  $r \leq r_1$  mit (4)  $r_1 = \pi H^{-1/2}$  ist; dann stellen die  $r$  zusammen mit den Winkeln  $\varphi$  im Punkte  $P$  ein geodätisches Polarkoordinatensystem dar. Unter Beibehaltung von  $r$  und  $\varphi$  als geodätischen Polarkoordinaten lassen sich in eindeutiger Weise Metriken mit den konstanten Krümmungen  $L$  und  $H$  einführen (in der Umgebung jeder einzelnen  $g$ ). Behauptung: Zwischen den Längenelementen  $ds$  der gegebenen Riemannschen Metrik und den Längenelementen  $ds_L, ds_H$  der soeben eingeführten Metriken besteht die Beziehung  $ds_L \geq ds \geq ds_H$ , und das Gleichheitszeichen gilt nur entlang den Geodätischen  $g$ . — Hierzu gilt noch folgender Zusatz: Solange  $2r \leq r_1$  ist, sind die durch  $r = \text{const.}$  bestimmten geodätischen Sphären konvex in dem Sinne, daß die tangentialen Geodätischen in der Nähe des Berührungspunktes außerhalb dieser Sphäre verlaufen (von  $P$  aus gesehen). — Nach diesen Vorbereitungen kommt man zum eigentlichen Beweis des Hauptsatzes. Es gelte (3), und es sei (5)  $L \geq h$ , wobei  $h$  aus (1) bestimmt ist. Zu zeigen ist: Es existiert eine unverzweigte, d. h. lokal 1-1-deutige Abbildung einer Sphäre  $S^n$  in die  $M^n$ . — Man nehme im euklidischen  $R^n$  eine Vollkugel  $E$  mit Mittelpunkt  $p$ , Radius  $r_1$  (gemäß (4)) und Randsphäre  $\Sigma$ ; man konstruiere eine geodätische Polarabbildung  $\psi$  von  $E$  in  $M^n$ , indem man den Punkt  $\psi(p) = P$  willkürlich wählt, die Sphäre der Richtungen in  $p$  winkeltreu auf die Richtungssphäre in  $P$  und die Radien von  $E$  längentreu auf die entsprechenden Geodätischen in  $M^n$  abbildet. Diese Abbildung  $\psi$  ist lokal 1-1-deutig, da infolge (3) und (4) keine konjugierten Punkte von  $P$  auftreten. Die Längen der Bilder der auf  $\Sigma$  gelegenen Kurven und damit der Durchmesser  $\Delta$  des Bildes  $\psi(\Sigma)$ , sind, da  $L < K$  ist, gemäß Theorem 3 nach oben beschränkt; man findet  $\Delta < \pi L^{-1/2} \cdot \sin(\pi L^{1/2} H^{-1/2})$ , also wegen (5), (1) und (4): (6)  $\Delta < \frac{1}{2} r_1$ . Nun nimmt man ein zweites Parameterelement  $E$  mit Mittelpunkt  $p$ , Radius  $r = \frac{1}{2} r_1$ , Randsphäre  $\bar{\Sigma}$  und konstruiert analog zu  $\psi$  eine geodätische Polarabbildung  $\bar{\psi}$  von  $E$  in  $M^n$  so, daß  $\bar{\psi}(p) = P \in \psi(\Sigma)$  ist; dann folgt aus (6): (7)  $\psi(\Sigma) \subset \bar{\psi}(E)$ . Auch  $\bar{\psi}$  ist lokal 1-1-deutig, und überdies ist  $\bar{\psi}(\Sigma)$  konvex im Sinne des Zusatzes zu Theorem 3. Ausgehend von (7) wird nun auf Grund der lokalen Eineindeutigkeit von  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  und unter Benutzung der Konvexität von  $\psi(\Sigma)$  durch Monodromiebetrachtungen gezeigt, daß auch  $\bar{\psi}(\Sigma) \subset \psi(E)$  ist, und dies mit folgenden Präzisierungen: In dem Element  $E$  existiert ein Teilelement  $E'$ , dessen Randsphäre  $\Sigma'$  durch einen Homöomorphismus  $\theta$  so auf  $\bar{\Sigma}$  bezogen ist, daß  $\bar{\psi} \theta = \psi$  ist und daß für jeden Punkt  $q \in \Sigma'$  das  $\bar{\psi}$ -Bild einer Umgebung von  $q$  in  $E'$  zusammen mit dem  $\psi$ -Bild einer Umgebung von  $\theta q$  in  $\bar{E}$  eine topologische Überdeckung einer Umgebung des Bildpunktes  $\psi(q) = \bar{\psi} \theta(q) \in M^n$  bilden. Identifiziert man  $\Sigma'$  mit  $\Sigma$  gemäß der Beziehung  $\theta$ , so läßt sich  $E' + \bar{E}$  als Sphäre  $S^n$  auffassen, welche durch  $\psi$  und  $\bar{\psi}$  lokal eineindeutig in  $M^n$  abgebildet ist. — Nach dem Urteil des Ref. bedeutet diese Arbeit — Hauptsatz, Zwischenresultate, Beweisideen — einen sehr interessanten und prinzipiell wichtigen Fortschritt in der globalen Theorie der Riemannschen Räume. Umsomehr ist es zu bedauern, daß die Darstellung sehr unklar, ja stellenweise unverständlich ist — wenigstens konnte sich Ref. erst nach Vornahme wesentlicher Abänderungen des Textes (welche er besonders der Mitwirkung von Herrn L. Nirenberg verdankt) davon überzeugen, daß die ausgesprochenen Sätze richtig sind.

Heinz Hopf.

Eisenhart, Luther P.: Generalized Riemann spaces. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 311—315 (1951).

A space of coordinates  $x^i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) with which is associated a non-symmetric tensor  $g_{ij}$  is termed a generalized Riemann space. Let  $g_{ij}$ ,  $g_{ij}$  be the symmetric and skew-symmetric parts of  $g_{ij}$  and let  $g^{ij}$  be defined by  $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$  (assumed the determinant of  $g_{ij}$  different from zero). As generalized Christoffel symbols the author defines  $\Delta_{ijk} = \frac{1}{2} (g_{ik,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k})$ ,  $\Delta_{ij}^k = g^{kl} \Delta_{ijl}$  where the comma indicates ordinary partial differentiation. The quantities  $\Delta_{ij}^k$  are coefficients of an affine connection whose symmetric and skew-symmetric parts satisfy the following relations  $\Delta_{ij}^k = \{\bar{h}\}_{ij}^k$ ,  $\Delta_i^i = \Delta_{ij}^j = 0$  where  $\{\bar{h}\}_{ij}^k$  are the Christoffel symbols of the second kind in the  $g_{ij}$ . From the curvature tensor  $\Delta_{ijk}^h = \Delta_{ij,k}^h - \Delta_{ik,j}^h + \Delta_{ij}^l \Delta_{lk}^h - \Delta_{ik}^l \Delta_{lj}^h$  one deduces by contraction  $\Delta_{hi}^h = 0$ ,  $\Delta_{ij}^h = -\Delta_{ih}^j$ ,  $\Delta_{ij}^h = -\Delta_{ji}^h$ . — The symmetric and skew-symmetric parts of  $\Delta_{ij}^k$  are  $\Delta_{ij}^k = -R_{ij}^k + \Delta_{ij}^l \Delta_{lk}^h$ ,  $\Delta_{ij}^k = \Delta_{ji}^k$  where  $R_{ij}^k$  is the Ricci tensor for the tensor  $g_{ij}$  and the semicolon indicates covariant differentiation. From these equations one deduces that the gene-

ralized Riemann spaces for which  $\Delta_{ij} = 0$  are given by differential equations which involve linear terms in the second derivatives of  $g_{ij}$  and  $g_{ij}$ .

Luis A. Santaló.

Lichnerowicz, A.: Généralisations de la géométrie kählérienne globale. Centre Belge Rech. math., Colloque Géom. diff., Louvain du 11 au 14 avril 1951, 99—122 (1951).

Nach einer Übersicht über die Theorie der harmonischen Differentialformen von Hodge und de Rham [vgl. Commentarii math. Helvet. 19, 1—49 (1946)] werden kurz die Resultate von Hodge und dem Ref. über kählersche Mannigfaltigkeiten [vgl. Ref., Commentarii math. Helvet. 25, 257—296 (1951)] besprochen. Eine komplex-analytische Mannigfaltigkeit heißt kählersch, wenn es auf ihr eine hermitesche Metrik  $ds^2 = \sum g_{\alpha\beta} dz^\alpha d\bar{z}^\beta$  gibt, so daß die zugeordnete Differentialform  $F = i \sum g_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$  geschlossen ist. Die Koeffizienten von  $F$  haben alle verschwindende kovariante Ableitungen (S. Bochner, dies. Zbl. 38, 344). Von hier ausgehend, untersucht Verf. die Beziehungen zwischen harmonischen Formen und (reellen) Formen  $F$  beliebiger Dimension mit verschwindender kovarianter Ableitung. Eine solche Form  $F$  ist immer harmonisch, und ihr Produkt mit einer harmonischen Form ist harmonisch. Ist  $F$  vom Grad  $2(2k+1)$  und von maximalem Rang, so ist die  $(2k+1)$ -te Bettische Zahl gerade. Wenn die Riccikrümmung einer kompakten orientierbaren Mannigfaltigkeit nicht-negativ ist, so ist ihr Polynom von Poincaré durch  $(t+1)^{b_1}$  teilbar ( $b_1 = 1$ . Bettische Zahl), die Koeffizienten des Quotienten sind nicht-negativ. Weitere Anwendungen beziehen sich auf Mannigfaltigkeiten mit lokal-reduktibler Riemannscher Metrik. Zum Schluß dieses Abschnitts formuliert Verf. das Problem: notwendige Bedingungen dafür zu finden, daß die harmonischen Formen einen Modul bilden. Im nächsten Abschnitt werden die Sätze über kählersche Mannigfaltigkeiten für Riemannsche Mannigfaltigkeiten gerader Dimension bewiesen, auf welchen eine Form  $F$  vom Grad 2 und maximalem Rang existiert. [Jede solche Mannigfaltigkeit ist kählersch; man verifiziert leicht, daß für jede  $F$  zugeordnete fastkomplexe Struktur das Kriterium von Eckmann-Frölicher (dies. Zbl. 42, 405) erfüllt ist; die Verallgemeinerung ist daher nur scheinbar.] Zum Schluß werden die Sätze des Verf. [C. r. Acad. Sci., Paris 232, 677—679 (1951)] und des Ref. (l. c.) für quadratische Formen  $F$  von nicht maximalem Rang bewiesen. Der ausführliche Beweis der vom Verf. angezweifelten Sätze des Ref. über symplektische Mannigfaltigkeiten wird in den Commentarii math. Helvet. erscheinen.

H. Guggenheimer.

Clark, R. S.: The conformal geometry of a general differential metric space. Proc. London math. Soc., II. Ser. 53, 294—309 (1951).

Ziel ist die Darstellung einer konformen Theorie der von Schouten und Haantjes (dies. Zbl. 13, 366) eingeführten Räume  $V_n$ , die eine Verallgemeinerung der Finslerschen und Cartanschen Räume sind. Verf. entwickelt eine duale Theorie [abhängig davon, ob die Grundfunktion  $L(x, u)$  a) von der kovarianten Dichte  $u$  vom Gewicht  $(-p)$  oder b) von der kontravarianten Dichte  $u$  vom Gewicht  $p$  abhängt] unter der Voraussetzung, daß der Skalar  $L$  zu einem regulären Problem der Variationsrechnung führt. Verf. betrachtet die sogenannten Relativtensoren  $T(x, u)$ , d. h. Affinordichten, indem er zunächst nach E. T. Davies (dies. Zbl. 41, 303) für eine beliebige Funktion  $X$  eine Operation einführt, die die partielle Differentiation ersetzt und im Falle  $X = T$  das Gewicht nicht ändert. Dann werden mit Hilfe einer Operation („replacement operation“) zwei Operationen  $D$  und  $\hat{D}$  der kovarianten Differentiation von Relativtensoren  $T$  eingeführt, von denen  $D$  eine Verallgemeinerung einer Operation von Davies ist. Mit Hilfe dieser zwei Operationen  $D$  und  $\hat{D}$  definiert Verf. endlich das absolute Differential des Tensors  $T$ . — Im § 2 definiert Verf. eine konforme Transformation des Raumes  $V_n$  als eine solche, die das Verhältnis der Länge von zwei beliebigen Vektoren nicht ändert. Man kann auch, ähnlich wie in der Riemannschen Geometrie, eine Charakterisierung der konformen Transformationen angeben, die die Winkelmetrik nicht ändern. — Im § 3 definiert Verf. einer Definition von Fialkow folgend, die „konformmetrischen“ Tensoren und erhält mit Hilfe des Dreiindextorsionstensors und des Objektes der linearen Übertragung einen konformmetrischen Vierindextensor. Mit dessen Hilfe gelangt er endlich (§ 4) zu der konformen Konnexion des Raumes  $V_n$ . Die endgültige Formel (4.5) für die konforme Ableitung des Tensors  $T$  (die im Spezialfall, daß  $V_n$  einen Finslerschen Raum darstellt, von H. Hombu angegeben wurde) ist ziemlich kompliziert. Weiterhin erhält Verf. die Verallgemeinerung der Ricci-Identität und den Konformkrümmungstensor (§ 5). — Im § 6 bestimmt Verf. unter der Voraussetzung, daß  $T$  in bezug auf  $u$  homogen von der Ordnung Null ist, die konformmetrische Konnexion sowie den konformmetrischen Krümmungstensor. Der letzte Paragraph ist der Verallgemeinerung der Killingschen Gleichungen gewidmet.

Stanislaw Golab.

Ślebodziński, W.: Sur les espaces à parallélisme absolu doués d'une connexion semisymétrique. Colloquium math. 2, 142—148 (1951).



Etant donné un espace  $A_n(x^1, \dots, x^n)$  à parallélisme absolu et à connexion semisymétrique, les équations de structure de l'espace peuvent s'écrire (1)  $d\omega^h = \omega \omega^h$ , où  $d$  est la dérivation extérieure,  $\omega, \omega^h$  étant de formes de Pfaff avec  $\omega = s_r \omega^r$ . L'A. se pose le problème de déterminer les formes  $\omega^h$ , dès qu'on se donne les fonctions  $s_r$ . En dérivant extérieurement les (1), il en résulte que pour  $n > 2$ , la forme  $\omega$  doit être une différentielle totale exacte, et comme chaque équation  $\omega^h = 0$  est complètement intégrable, on peut poser  $\omega^h = a_h du^h$ ,  $\omega = s_r a_r du^r = -\Phi \Phi^{-1}$  et alors les (1) nous donnent  $a_h = -\Phi^{-1} s_i \partial \Phi / \partial u^i$ . En supposant  $s_i$  des fonctions indépendantes et en posant  $u^i = \partial \varphi / \partial s_i$ , on obtient les  $\omega^h$  en fonctions de  $s_i$  par les formules  $\omega^h = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_h \partial s_r} ds_r / \left( s_r \frac{\partial \varphi}{\partial s_r} - \varphi \right)$  et par conséquent la solution dépend de la fonction arbitraire  $\varphi$  dont le déterminant  $|\partial^2 \varphi / \partial s_h \partial s_r|$  doit être différent de zéro. Des considérations analogues s'appliquent dans le cas où  $s_i$  ne sont pas des fonctions indépendantes.

G. Vranceanu.

**Yaho, Kentaro and Hitosi Hiramatsu:** Affine and projective geometries of a system of hypersurfaces. J. math. Soc. Japan 3, 116—136 (1951).

Es sei ein System von Hyperflächen  $f(x^i, a^i) = 0$  gegeben mit der Eigenschaft, daß  $n$  Punkte genau eine Hyperfläche des Systems bestimmen. Betrachtet man die Funktion  $f$  als gegeben bis auf einen konstanten Faktor  $\alpha$ , so kann man nach den  $a^i$  als Funktionen von  $u_i = \alpha \partial_i f$  auflösen, und es gilt für eine Hyperfläche des Systems  $du_i - \Gamma_{ji}^h(x, u) dx^j = 0$ , wo die  $\Gamma_{ji}^h$  homogene Funktionen ersten Grades in  $u_i$  sind. Es zeigt sich, daß  $\Gamma_{ij}^h = \partial \Gamma_{ij} / \partial u_h$  die Parameter einer affinen Übertragung bilden. Betrachtet man aber die Funktion  $f$  als gegeben bis auf einen beliebigen Faktor  $\alpha(x, a)$ , so bestimmen die  $\Gamma_{ij}^h$  keine affine Übertragung, aber es läßt sich mittels  $\Gamma_{ij}^h$  und ihrer Ableitungen nach  $u_i$  eine projektive Konnexion bestimmen. Jedem Hyperflächenelement  $(x^i, u_i)$  wird ein lokaler projektiver ebener Raum zugeordnet. Sodann wird gezeigt, daß sich auf projektiv invariante Weise eine Abbildung benachbarter lokaler Räume angeben läßt, für welche das gegebene System  $f = 0$  die ebenen Hyperflächen darstellt.

Johannes Haantjes.

### Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde. Integralgeometrie:

**Valentine, F. A.:** A characteristic property of the circle in the Minkowski plane. Amer. math. Monthly 58, 484—487 (1951).

Let  $M_2$  be a Minkowski plane with the distance  $\|x - y\|$ ; a set  $\|x - a\| \leq \text{const.}$  is termed a circle. The straight line  $x, y$  divides the boundary of the circle  $\|x + y - 2z\| \leq \|x + y\|$  in the semi-circular arcs  $A'(x, y)$   $A''(x, y)$ . A necessary and sufficient condition that a bounded closed set  $S \subset M_2$  be a circle is that for each couple of points  $x, y \in S$  a semi-circular arc  $A(x, y)$  be contained in  $S$ .

István Fáry.

**Hadwiger, H.:** Der Würfel als Körper kleinster Relativoberfläche. J.-Ber. Deutsch. Math. Verein., 1. Abt. 55, 9—14 (1951).

Bildet man die Relativoberfläche einer beschränkten Punktmenge  $A$  mit einem Einheitswürfel  $W$  nach dem Vorgang von Cantor-Minkowski, so gilt folgender Satz: Unter allen Punktmengen gleichen äußeren Jordanschen Inhalts haben die zu  $W$  homothetischen Würfel die kleinste Relativoberfläche.

Alexander Dinghas.

**Hammersley, J. M.:** The total length of the edges of a polyhedron. Compositio math. 9, 239—240 (1951).

Es bedeute  $L_n$  die Kantenlängensumme eines konvexen Polyeders vom Inkugeldurchmesser 1 mit höchstens  $n$ -eckigen Flächen. Es wird gezeigt, daß  $L_n > \frac{10}{3} \left( \pi n \tan \frac{\pi}{n} \right)^{1/2}$ . Im Falle, daß über die Eckenzahl der Flächen keine Vor-

aussetzung gemacht wird, ergibt sich hieraus  $L_\infty \geq 10\pi/3$ , entgegen der vom Ref. vorher (dies. Zbl. 40, 252) angegebenen Abschätzung  $L_\infty > \pi \sqrt{\frac{1}{2}(11 + 5\sqrt{5})} = \pi \cdot 3,33019 \dots$ . Die Konstante  $10\pi/3$  übertrifft um weniger als 0,01% die letztere. Dagegen liefert die Methode des Ref. für kleine Werte von  $n$  (etwa für  $n = 3$  oder 4) bessere Schranken als die obige Abschätzungsformel für  $L_n$ . Vermutlich ist für  $n > 3$   $L_n \geq 12$  und  $L_3 \geq 6\sqrt{6}$ , und Gleichheit gilt nur für den Würfel bzw. für das reguläre Tetraeder und Oktaeder.

László Fejes Tóth.

**Santaló, L. A.: Über Paare konvexer Körper.** Gaz. Mat., Lisboa 12, Nr. 50, 7—10 (1951) [Spanisch].

Es wird in Analogie zu einem Satz von Helly gezeigt: Es sei in einer Ebene eine Menge von Paaren konvexer Bereiche gegeben; wenn je 17 von ihnen einen Punkt gemein haben, dann auch alle. Entsprechend tritt für  $r$ -tupel konvexer Körper im  $E_n$  die Zahl  $n r^3 + 1$  auf: Zwischen den einfachsten Bewegungsvarianten für Paare konvexer Bereiche in der Ebene werden mehrere Ungleichheiten bewiesen.

Wilhelm Blaschke.

**Freilich, Gerald: On sets of constant width.** Proc. Amer. math. Soc. 2, 92—96 (1951).

Dans la définition des mesures de Hausdorff de l'espace euclidien  $E^n$ , les ensembles couvrants n'interviennent que par leurs diamètres et peuvent, par conséquent, être remplacés par des ensembles de largeur (épaisseur) constante. En vue d'utiliser cette remarque en Théorie de la Mesure, l'A. compare les mesures lebesgueiennes  $k$ -dimensionnelles des sections d'un ensemble  $c$  de largeur constante  $d$  par des hyperplans parallèles à  $k$  dimensions ( $1 \leq k < n$ ). Il montre que, pour  $k = 1$ , les longueurs de deux cordes de  $c$  de même direction  $\theta$  et à distance  $\leq \delta$  diffèrent au plus de  $2(2\delta d)^{\frac{1}{2}}$ . La démonstration fait intervenir la convexité de la longueur de cordes parallèles situées dans un plan, d'où il résulte que le maximum de la différence est obtenu quand l'une des cordes se réduit à un point  $p$ , et l'inclusion de  $c$  dans une boule de rayon  $d$  passant par  $p$  et y admettant  $\theta$  comme direction tangente. Le cas de  $k > 1$  est ensuite traité par intégration; l'expression obtenue pour le module de continuité est  $2(2\delta d)^{\frac{1}{2}} \times (d/2)^{k-1} \times [\text{mes. leb. } (k-1)\text{-dim. de la boule } (k-1)\text{-dim.}]$ . [Remarque du rapporteur — Le raisonnement dans le cas  $k = 1$  est applicable au cas général. Le maximum de la différence est atteint quand une des sections se réduit à un point; sa valeur pour la boule de rayon  $d$  est un module de continuité qui est inférieur, pour  $\delta$  petit, à celui indiqué par l'A. Ainsi pour  $k = 1$ , nous obtenons  $2(\delta(2d - \delta))^{\frac{1}{2}}$  au lieu de  $2(2\delta d)^{\frac{1}{2}}$ , pour  $k = 2$ ,  $\pi \delta(2d - \delta)$  au lieu de  $2d(2\delta d)^{\frac{1}{2}}$ .]

Christian Pauc.

**Bieri, H.: Ein  $(V, M)$ -Problem mit Nebenbedingung.** Experientia 7, 392—394 (1951).

Lösung des folgenden Variationsproblems: Unter allen konvexen Rotationskörpern von der festen Länge  $l$  denjenigen zu ermitteln, der bei vorgegebenem Volumen  $V$  das größte Integral der mittleren Krümmung aufweist. Es wird gezeigt, daß für  $0 < V \leq V_1$  Zylinder, für  $V_1 < V < V_2$  Kegelstümpfe und für  $V_2 \leq V$  Kegel die verlangte Extremaleigenschaft besitzen, wobei  $V_1/l^3$  und  $V_2/l^3$  gewisse numerische Konstanten sind.

László Fejes Tóth.

**Lorch, E. R.: Differentiable inequalities and the theory of convex bodies.** Trans. Amer. math. Soc. 71, 243—266 (1951).

Verf. gründet die Theorie der konvexen Körper (bei Differenzierbarkeit ihrer Oberflächen) auf eine neue Definition, welche neben infinitesimalen Forderungen als eine Forderung im Großen die Homöomorphie zwischen der Oberfläche und der dazu „dualen“ Fläche verlangt. Des näheren geschieht folgendes: Im euklidischen  $E^n$  der Punkte  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sei  $G(x)$  eine positiv homogene Funktion vom Grad  $r$  ( $\neq 0$  und 1) mit einem „Strahlbereich“  $\Omega$  ( $0 \notin \Omega$ , aber mit  $x \in \Omega$  ist auch  $\gamma x \in \Omega$  für jedes positive  $\gamma$ ) als Definitionsbereich, und im übrigen hinreichend oft differenzierbar. Die Flächen  $G(x) = c$  ( $c$  eine beliebige positive Konstante) heißen konvex



auf  $\Omega$ , wenn  $r > 1$ , ferner die quadratische Form  $\sum_1^n \frac{\partial^2 G}{\partial x_i \partial x_j} z_i z_j$  positiv definit ist für alle  $x \in \Omega$ , und schließlich die „dualisierende“ Transformation  $x_i^* = \partial G / \partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , nicht nur lokal, sondern in ganz  $\Omega$  1-1-deutig ist. Der Bildbereich  $\Omega^*$  ist alsdann wieder ein Strahlbereich, und in ihm ist eine homogene Funktion  $F(x_1^*, \dots, x_n^*)$  vom Grad  $r(r-1)^{-1}$  definierbar, so daß  $x_i = \partial F / \partial x_i^*$  die Umkehrung der obigen Transformation ist. Mit  $G = c$  ist auch  $F = b$  konvex. Geschlossene konvexe Flächen ( $\Omega = E^n - \{0\}$ ) sind auch im klassischen Sinne konvex. — Die Extremumaufgabe, bei konvexem  $G = c$  alle nicht-negativen Funktionen  $\Phi(x)$ ,  $x \in \Omega$ , zu bestimmen, welche für jedes  $x \in \Omega$  die Gleichung  $\sup_{y \in \Omega} \frac{\sum y_i \partial G / \partial x_i}{\Phi(y)} = \frac{\sum x_i \partial G / \partial x_i}{\Phi(x)}$  erfüllen, beantwortet Verf. dahin, daß  $\Phi(x) = k \left[ \sum x_i \frac{\partial G}{\partial x_i} \right]^{1/r}$  mit beliebigem positiven kon-

stanten  $k$  die einzigen Lösungen sind. Die Extremumaufgabe führt zum Ungleichungstyp  $\sum y_i x_i^* \leq \Phi(y) \psi(x^*)$ ,  $y \in \Omega$ ,  $x^* \in \Omega^*$ , wenn man  $(\sum x_i \partial G / \partial x_i) / \Phi(x)$  mittels obiger Umkehrtransformation als  $\psi(x^*)$  schreibt, und damit zu einer allgemeinen Methode, solche Ungleichungen aufzustellen. Als Beispiel hierzu wird die Höldersche Ungleichung behandelt. — Die Betrachtung verschiedener konvexer Flächen geschieht in Gestalt eines Systems von konvexen Scharen  $G_i = c_i$  mit gemeinsamen  $\Omega$  und  $\Omega^*$ , von welchem noch verlangt wird, daß es gegenüber Linear-kombinationen mit positiven Koeffizienten geschlossen ist. In einem solchen System können eine Metrik eingeführt und damit Approximationsprobleme behandelt werden. Zuletzt wird die Theorie der gemischten Volumina konvexer Körper entwickelt, für die mit Verwendung der oben erwähnten Transformationen einige neuartige, für den weiteren Ausbau wohl bedeutsame Integralformeln aufgestellt werden.

Georg Aumann.

**Santaló, L. A.: Verallgemeinerung einer Ungleichung von H. Hornich auf Räume von konstanter Krümmung.** Revista Un. mat. Argentina 15, 62—66 (1951) [Spanisch].

Die vom Ref. (dies. Zbl. 22, 267) angegebene Ungleichung für das Volumen  $V$  der Menge aller Punkte des  $R_n$ , die von einer rektifizierbaren Kurve  $C$  der Länge  $L$  einen Abstand  $\leq R$  haben, wird hier auf Räume konstanter Krümmung verallgemeinert; es ist dort

$$V \leq k^{-(n-1)} \left[ \kappa_{n-1} L \sin^{n-1}(kR) + n \kappa_n \int_0^R \sin^{n-1}(k\rho) d\rho \right],$$

wo  $\kappa_i = \pi^{i/2} / \Gamma(i/2 + 1)$  (das Volumen der Einheitskugel in einem euklidischen  $R_i$ ) und  $k^2$  die Krümmung des Raumes ist ( $k$  reell oder rein imaginär). Der Beweis geht aus von der Integralformel:

$$\int n dP = L 2 \kappa_{n-1} k^{-(n-1)} \sin^{n-1}(kR),$$

wo  $n$  die Zahl der Punkte ist, welche die Kugelfläche um  $P$  mit dem Radius  $R$  mit  $C$  gemein hat. Ist nun  $m_i$  das Volumen der Menge aller Punkte  $P$ , so daß die Kugelfläche um  $P$  mit dem Radius  $R$  genau  $i$  Punkte mit  $C$  gemein hat (für  $i = 0$  die Menge aller Punkte, so daß die betr. Kugel  $C$  im Innern enthält), so ist  $\int n dP = m_1 + 2 m_2 + 3 m_3 + \dots$  und  $V = m_0 + m_1 + m_2 + \dots$ . Hieraus folgt nach einer Hilfsbetrachtung über geodätische Linien die obige Ungleichung. Hans Hornich.

**Ghosh, Birendranath: Random distances within a rectangle and between two rectangles.** Bull. Calcutta math. Soc. 43, 17—24 (1951).

Let  $X, Y$  be two fixed figures in the plane and let  $x, y$  be two variable points,  $x \in X, y \in Y$ . Let us denote by  $r$  the distance  $xy$  and by  $dx, dy$  the elements of area at the points  $x, y$  respectively. The integrals  $I(X, Y; R) = \int dx dy$  ( $x \in X, y \in Y, r \leq R$ ),  $J_k(X, Y) = \int r^k I(X, Y; r) dx dy$  ( $x \in X, y \in Y$ ) have some applications in statistics (problems of topographic variation). The author evaluate such integrals for the following particular cases of rectangles  $X, Y$ : a) Calculation of  $I(X, Y; R)$  and  $J_k(X, Y)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) for coincident rectangles; b) Calculation of  $I(X, Y; R)$  for equal squares with common diagonal line, equal squares with corner-point contact and equal adjacent squares. Some indication about more general cases are also given.

Luis A. Santaló.

## Angewandte Geometrie:

● **Pirlet, J.:** *Statik der rahmenartigen Tragwerke.* Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1951. VII, 168 S. DM 24.—

Text presents a method of analyzing rigid frames the joints of which rotate but can not translate. The bending moments at the ends of the various members are the unknown quantities. The procedure first requires determination of fixity quotients (Einspanngrade) for both ends of all members. These can range from zero (simply supported) to unity (fixed) and for the normal case are found by a tabular computation process involving the characteristics of the other members in the system. From the fixity quotients and the loads the desired end-moments are found. An approximate, short-cut method is described. Numerical calculations are used for illustration.

*M. P. White.*

● **Wrtilek, Franz:** *Tangenten- und Krümmungskreiskonstruktionen an ebenen Kurven mittels Deutung eines Kurvenparameters.* Monatsh. Math. 55, 215—228 (1951).

Der ebenen Kurve  $c(x = x(u), y = y(u))$  wird die Raumkurve  $c^*(x = x(u), y = y(u), z = u)$  zugeordnet. Wird  $c$  punktwise durch Schnitt zweier Scharen von Konstruktionslinien erhalten, die mit denselben Parameterwerten  $u$  kotiert seien, so ist  $c^*$  Schnittkurve zweier durch ihre Schichtenlinien gegebenen Flächen. Einfache räumliche Konstruktionen ergeben Tangenten und Krümmungskreise von  $c$ , z. B. wird eine Verfeinerung der Krümmungskreiskonstruktion von Nicolaides angegeben. Anwendung auf die Rastpolbahn einer Schubkurbelbewegung. — Für eine Parabel folgt, daß die Krümmungsmittelpunkte eines Punktes  $P$  auf der Verbindungsgeraden des Gegenpunktes von  $P$  mit der Krümmungsmittelpunkte des Parabelscheitels liegt.

*Fritz Hohenberg.*

● **Balser, L.:** *Einführung in die Kartenlehre (Kartennetze).* (Math.-physik. Bibliothek Nr. 81.) Leipzig: B. G. Teubner-Verlagsgesellschaft 1951. 2. Aufl. 50 Abb. 64 S. DM 3.—

● **Gougenheim, André:** *Transformations des projections conformes de la sphère.* C. r. Acad. Sci., Paris 233, 226—228 (1951).

Bei Verwendung geographischer Koordinaten nimmt dieselbe Abbildung der Erdkugel auf die Ebene verschiedene Formen an, je nachdem, ob der Pol oder ein anderer Punkt der Kugel als Hauptpunkt gewählt wird. Für die konformen Abbildungen der Kugel auf die Ebene werden Transformationsformeln abgeleitet, die den Zusammenhang zwischen den als Polar-, Äquatorial- und Horizontalprojektion bezeichneten Fällen derselben Abbildung herstellen.

*W. Hofmann.*

● **Fox, Charles:** *The determination of position and velocity on the earth's surface.* J. Math. Physics 30, 146—155 (1951).

Die Aufgabe, Standort und Geschwindigkeit eines Fahrzeugs in einem geschlossenen Raum desselben — unabhängig von allen Hilfsmitteln der Außenwelt — zu bestimmen, ist nicht nur für die Technik wichtig, sondern stellt auch in mancher anderer Hinsicht ein interessantes Problem dar. Schon früh wurde auf die Möglichkeit hingewiesen, diese Aufgabe mit Hilfe des Kreisel zu lösen. Verf. zeigt an Hand eines von ihm erdachten Gedankenexperimentes, auf welche Weise sich eine solche Lösung theoretisch durchführen ließe. Hierzu ist die Bestimmung von vier Unbekannten: der geogr. Länge, der geogr. Breite, sowie der beiden Komponenten der Geschwindigkeit des Fahrzeugs erforderlich. Da die Wahl des Nullmeridians willkürlich ist, bleibt bei der Bestimmung der Länge selbstverständlich auch eine Konstante willkürlich. Diese vier Größen sind nicht voneinander unabhängig: Zwischen ihnen bestehen die Beziehungen:  $d\lambda/dt = n/a$  und:  $d\varphi/dt = w/a \cdot \cos \lambda$ . Hierbei bedeuten:  $\lambda$  die geogr. Breite,  $\varphi$  die geogr. Länge,  $a$  den Erdradius und  $n, w$  die beiden Geschwindigkeitskomponenten längs des Meridians und des Parallelkreises. Es sind daher zur vollständigen Bestimmung dieser Größen nur noch zwei Gleichungen erforderlich, zu deren Aufstellung zwei verschiedene Messungen genügen würden. Da sich die Bestimmung der Lotrichtung — auch im geschlossenen Raume — stets durchführen läßt, ist es grundsätzlich möglich, die beiden erforderlichen Messungen mit Hilfe eines Gyroskops in zwei zueinander senkrechten Ebenen durchzuführen. Man hat es im



betrachteten Falle mit der erzwungenen Bewegung eines Kreisels zu tun, dessen Trägheitswiderstand bei geeigneter Anordnung eine elastische Spannung hervorrufen wird, die sich grundsätzlich messen läßt. Andererseits ist der Trägheitswiderstand mit dem Impuls des Kreisels durch bestimmte Beziehungen verknüpft. Man erhält so zwei zusätzliche Gleichungen, die — zusammen mit den beiden, bereits angeführten Relationen — eine Bestimmung der gesuchten Größen gestatten. Die Integration des Gleichungssystems bereitet allerdings einige Schwierigkeiten. — Eine eingehendere Diskussion zeigt, daß die geschilderte Methode nur dann hinreichend genau ist, wenn die West-Ostkomponente der Geschwindigkeit sehr klein ist. *H. Nabl.*

## Topologie:

Müller, Gert H.: Über die Eigenschaften der Teilmengen eines Kuratowskischen Raumes. II. *Portugaliae Math.* 10, 53—70 (1951).

In a first paper (see this *Zbl.* 39, 393) the author had deduced from the Kuratowsky axioms ( $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$  not included) all the properties which may characterize point sets in connection with the operations of closure and complementation; these properties being expressed by the symbols of inclusion, equality, mutual exclusion and overlapping. One of the main results was that only 14 distinct sets may be generated by a given set, the operators by means of which they are obtained being denoted by  $k, l, n, m, \lambda, v, \mu$ , and the same letters dashed. — In this paper the axiom  $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$  is assumed. The author obtains all those among the properties defined in his first paper which are either additive or multiplicative; those also which are cogredient in the sense of Hausdorff. Most interesting is the last section dealing with different types of connexity. Using his own notations the author defines a space  $R$  as connected when the equation  $\lambda X = l X$  has only the solutions  $R$  and  $0$ . This is the classical notion, called by the author 0-connexity. Now he defines 6 other types of connexity by substituting for the above mentioned equation certain other similar equations. A last type is one implying all the preceding ones. The author shows that these types may be defined also by the property that  $R$  cannot be the union of two non empty subsets having the same property,  $k = \lambda$ , for instance. In the end an interesting survey of all the implications which exist between the different types of connexity defined in the paper is made and a diagram exhibits them all very clearly. *C. Racine.*

Michael, Ernest: Topologies on spaces of subsets. *Trans. Amer. math. Soc.* 71, 152—182 (1951).

Given a space  $X$  with a  $T_1$ -topology  $T$  [or space  $(X, T)$ ] the author defines the „finite“ topology  $2^T$  for the „hyperspace“  $2^X$  — whose elements are the (non-null) closed subsets of  $X$  — to be the topology determined by the subbase of open sets of the forms: (i)  $\{E \in 2^X \mid E \subset G\}$  and (ii)  $\{E \in 2^X \mid E \cap G \neq \text{the null set } \Phi\}$ , where  $G$  runs through the open subsets of  $(X, T)$ . — Similarly given a space  $X$  with uniform structure  $U$  — with  $A = [\alpha]$  as indexing set for the neighbourhoods of points — a uniform structure  $2^U$  is defined over  $2^X$  which is determined by neighbourhood systems — with  $A$  as indexing set — of the form:  $\mathfrak{B}_\alpha(E) = \{F \in 2^X \mid \bigcup_{e \in E} [V_\alpha(e)]\}$  and  $|E \subset \bigcup_{f \in F} [V_\alpha(f)]\}$ .  $|U|$ , and  $|2^U|$  denote the topologies defined by the uniform structures  $U$  and  $2^U$ .

— These definitions of the topology  $2^T$  or uniform structure  $2^U$  are also extended to the hyperspace  $\mathfrak{H}(X)$  of all (non-null) subsets of  $X$  by replacing  $2^X$  by  $\mathfrak{H}(X)$  in the definitions above; while  $\mathfrak{C}(X)$  denotes the subspace of  $2^X$  consisting of the compact closed subsets of  $(X, T)$ . With these definitions the author considers first the effect on the hyperspaces of assuming further specialising conditions on the basic space. The main results established here are the following where the hyperspaces are assumed to take the finite topology:  $2^X$  is separable, compact or compact Hausdorff when, and only when,  $X$  is a space of the same type;  $\mathfrak{C}(X)$  is compact, locally compact, Hausdorff, regular, completely regular, first or second countable, zero-dimensional, totally disconnected, or discrete when, and only when,  $X$  is also a space of the same sort. — If  $(X, U)$  is a space of uniform structure, it is shown that the finite topology  $2^{[U]}$  is identical with the uniform topology  $|2^U|$ .

on  $(X)$  always; they are identical on  $2^X$  also when  $X$  is normal and  $U$  is the uniform structure defined by the Stone-Čech compactification of  $X$ . With these associated topologies for the hyperspaces the author next considers various natural functions between these. Some typical results are: The function  $f: E \rightarrow \bar{E}$  is a retraction (uniform retraction) of  $\mathfrak{A}(X)$ ,  $2^T$  on  $(2^X, 2^T)$  [of  $\mathfrak{A}(X)$ ,  $2^U$  on  $(2^X, 2^U)$ ] — when  $X$  has a  $T_1$ -topology  $T$  [a uniform structure  $U$ ]. The function  $\sigma: \mathfrak{A} \rightarrow \bigcup_{E \in \mathfrak{A}} [E$  is a continuous (uniformly continuous) mapping of  $\mathfrak{A}(\mathfrak{A}(x))$  in  $\mathfrak{A}(X)$ ,

as also of  $\mathfrak{C}(\mathfrak{C}(X))$  in  $\mathfrak{C}(X)$  — where as above these hyperspaces take the finite (uniform) topologies. The function  $f^*: E \rightarrow f(E)$  is a continuous (uniformly continuous) mapping of  $\mathfrak{A}(X)$  in  $\mathfrak{A}(Y)$  when, and only when, the given mapping  $f: x \rightarrow f(x)$  of  $X$  on  $Y$  is continuous (uniformly continuous) from  $X$  to  $Y$ ; with the same conventions  $f^*$  is a homeomorphism (isomorphism) if, and only if,  $f$  is also such. — In the last sections the author examines the possibility of having a „selection“  $f$  from a subspace  $\mathfrak{D}$  of  $2^X$  to  $X$  — i. e. a continuous function from  $\mathfrak{D}$  to  $X$  such that  $f(E) \in E$  for each  $E$  from  $\mathfrak{D}$ . The main propositions wherein the existence of such selections comes into question are the following: A necessary and sufficient condition that every continuous function  $g$  from a compact Hausdorff space  $X$  to a Hausdorff space  $Y$  should have a continuous inverse  $g'$  [i. e. a continuous function  $g'$  of  $Y$  in  $X$  such that  $g(g'(y)) = y$  for each  $y$  in  $Y$ ] is that there should be a selection from  $\mathfrak{D}$  to  $X$ , whenever  $\mathfrak{D}$  is a closed subset of  $2^X$  whose elements constitute a covering of  $X$  by disjoint subsets. — When  $X$  is a space with a Hausdorff topology  $T$  under which all the connected components of  $X$  are open, then (i) there exists a selection from  $(2^X, 2^T)$  to  $(X, T)$  if, and only if, there is a linear (i. e. total) order on  $X$  such that the order topology is coarser than  $T$  and such that every closed ( $T$ ) set has a first element, (ii) there exists a selection from  $(\mathfrak{C}(X), 2^T)$  to  $(X, T)$  if, and only if, there is a linear order on  $X$  such that the order topology is coarser than  $T$ . — When  $(X, T)$  is a connected space, any selection to  $X$  from the subspace of  $(2^X, 2^T)$  consisting of the two-element subsets of  $X$  only, can be extended uniquely to the subspace  $\mathfrak{D}$ , when  $\mathfrak{D}$  denotes (i) the family of all  $n$ -element subsets of  $X$  (for  $n \geq 2$ ) or (ii) a subfamily of  $\mathfrak{C}(X)$  containing all finite subsets of  $X$ ; and from these hyperspaces the number of distinct selections to  $X$  is either 0 or 2. — In denoting the family of closed subsets of a space  $X$  by  $2^X$  the author makes a departure from the usual convention of denoting the family of all subsets of  $X$  by  $2^X$ , which appears all the stranger since the family of all (non-null) subsets also comes into question and is represented by a symbol  $\mathfrak{A}(X)$ . The author has also left a certain number of corrections to the reader; a few are noted below which are likely to be misleading at a first reading: On page 156, line 9 from below for „ $\subseteq \subset 2^X$ “ read „ $\subseteq \subset 2^{X''}$ “; on page 162, in the Prop. 4. 4. 1 and its proof  $2^X$  should be replaced by  $\mathfrak{C}(X)$ ; on page 174, line 17 for „ $x \in U$ “ read „ $x \notin U$ “; and on page 176, lines 6 and 7 the symbol „ $\cap$ “ should be replaced by „ $\cup$ “.

V. S. Krishnan.

Est, W. T. van und Hans Freudenthal: Trennung durch stetige Funktionen in topologischen Räumen. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 359—368, Indagationes math. 13, 359—368 (1951).

In diesem wichtigen Beitrag zum Studium der Trennbarkeitseigenschaften in topologischen Räumen findet man eine vollständige Analyse der Implikationen zwischen den wichtigsten Trennungsaxiomen. Diese und auch einige neue Trennungsaxiome sind wohl klassifiziert. — Erstens sind vier Trennungsmöglichkeiten definiert für je zwei Untermengen  $A, B$  eines topologischen Raumes  $R$ : nämlich: offene (bzw. abgeschlossene) Trennung, Bezeichnung  $A \tau_o B$  (bzw.  $A \tau_a B$ ):  $A$  und  $B$  besitzen fremde offene (bzw. fremde abgeschlossene, d. h. abgeschlossene Hüllen offener) Umgebungen; stetige (bzw. abgeschlossene stetige) Trennung, Bezeichnung  $A \tau_s B$  (bzw.  $A \tau_{as} B$ ): es gibt eine stetige Abbildung  $f$  von  $R$  in die Menge der reellen Zahlen, so daß  $f(A) \cap f(B) = 0$  (bzw.  $f(A) \cap f(\bar{B}) = 0$ ). — Wenn  $\tau$  einen Raum, in dem  $p \tau q$  für alle Punktpaare  $p \neq q$  gilt,  $(p \tau A)$  einen Raum, in dem  $p \tau A$  gilt für alle Punkte  $p$  und abgeschlossene Mengen  $A$  mit  $p \notin A$ ,  $(A \tau B)$  einen Raum, in dem  $A \tau B$  für alle Paare abgeschlossener Mengen  $A, B$  mit  $A \cap B = 0$  gilt. — Zwischen den oben definierten 12 Trennungsaxiomen sind die folgenden Implikationen bewiesen:

$$\begin{aligned} \{ (A \tau_o B) \sim (A \tau_a B) \sim (A \tau_{as} B) \sim \text{norm.} \} &\rightarrow \{ (p \tau_{as} A) \sim \text{voll. reg.} \} \rightarrow \{ (p \tau_o A) \sim (p \tau_a A) \sim \text{reg.} \} \\ &\quad \downarrow \quad \quad \quad \downarrow \\ (A \tau_s B) &\rightarrow (p \tau_s A) \rightarrow \{ (p \tau_s q) \sim (p \tau_{as} q) \} \rightarrow \{ p \tau_a q \} \\ &\quad \quad \quad \downarrow \\ &\quad \quad \quad \{ \text{Hau.} \sim (p \tau_o q) \}. \end{aligned}$$



Mit Beispielen von passend konstruierten Räumen erreichen die Verff. die Folgerungen: 6.1  $Hau \rightarrow (p\tau_a q)$ ; 6.2  $(A\tau_s B) \rightarrow \text{reg.}$ ; 6.3  $(p\tau_s q) \rightarrow (p\tau_s A)$ ; 6.4  $\text{reg} \rightarrow (p\tau_s q)$ ; 6.5 voll. reg.  $\rightarrow (A\tau_s B)$ ; 15.1  $(A\tau_s B) \& \text{voll. reg.} \rightarrow \text{norm.}$ ; 15.2  $(A\tau_s B) \& \text{reg.} \rightarrow \text{voll. reg.}$  — Diese und einige andere Beispiele bilden den Kern dieses Beitrages. Alle Beispiele genügen ferner dem ersten Abzählbarkeitsaxiom. Wegen der Aussage 6.1—6.5 bemerkt man, daß in dem oben gegebenen Schema alle Implikationen erschöpft sind.

V. S. Krishnan.

**Freudenthal, Hans: Ein Kompaktheitskriterium.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 295—296, Indagationes math. 13, 295—296 (1951).

Verf. beweist, daß ein separabler, metrischer Raum  $R$  dann und nur dann kompakt ist, wenn das folgende gilt: Ist  $F$  eine Menge stetiger, reeller auf  $R$  definierter Funktionen mit den Eigenschaften 1) aus  $f_1, f_2 \in F$  folgt  $\max(f_1, f_2) \in F$ , 2) für alle  $f \in F$ ,  $\inf f(x) = 0$ , so gibt es eine Folge  $x_i \in R$  mit  $\lim f(x_i) = 0$ . István Fáry.

**Est, W. T. van and Hans Freudenthal: A note on a compactness criterion of H. Freudenthal.** Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. A 54, 369—370, Indagationes math. 13, 369—370 (1951).

The authors give a sharpening of Freudenthal's result (see preceeding review) and its extension for completely regular spaces.

István Fáry.

**Klee, jr., V. L.: Some characterizations of compactness.** Amer. math. Monthly 58, 389—393 (1951).

The author proves a theorem on embedding of a (separable, metric) space  $M$  in the space  $C(M)$  of continuous functions defined on  $M$ . He applies this result to prove some of Vaughan's theorems amongst others. A typical theorem is: A proper subset of a metrizable space is compact if (and only if) in each allowable metric it is a distance-set, i. e. to each point of the complement there is a nearest point in the set.

István Fáry.

**Fulton jr., Lewis M.: Decompositions induced under finite-to-one closed mappings.** Duke math. J. 18, 287—295 (1951).

Es sei  $X$  ein separabler, metrischer Raum der Menger-Urysohnschen Dimension  $n$ . Eine Darstellung von  $X$  als Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Teilmengen  $F_i$ , die zu je  $j$  einen höchstens  $(n - j + 1)$ -dimensionalen Durchschnitt haben ( $j = 2, \dots, n + 2$ ), heiße eine reguläre Zerlegung von  $X$ . Verf. beweist folgenden Satz: Es sei  $X = U_1 \cup \dots \cup U_m$  eine endliche, offene Überdeckung von  $X$ ;  $f$  eine abgeschlossene stetige Abbildung von  $X$  auf einen separablen, metrischen Raum  $Y$ ; dabei habe jeder Punkt von  $Y$  höchstens  $k$  Urbildpunkte ( $k$  endlich, fest); dann existiert eine reguläre Zerlegung von  $X$  in Teilmengen  $F_i$  der  $U_\mu$  derart, daß die (abgeschlossenen) Bildmengen  $f(F_i)$  zu je  $s$  einen höchstens  $(n + k - s)$ -dimensionalen Durchschnitt haben ( $s = 2, \dots, n + k + 1$ ) [ $Y$  ist höchstens  $(n + k - 1)$ -dimensional nach W. Hurewicz (W. Hurewicz and H. Wallman, Dimension Theory, Princeton 1941)].

Georg Nöbeling.

**Dugundji, J.: An extension of Tietze's theorem.** Pacific J. Math. 1, 353—367 (1951).

Tietze's theorem asserts that any real-valued continuous function defined over a closed subset  $A$  of a metric space  $X$  can be extended to a continuous real-valued mapping of  $X$ . The author shows that an analogous extension theorem is valid for continuous mappings of  $A$  into any locally convex linear space. In this general case he gives an explicite formula for the extension, exhibiting a certain kind of linearity in the resulting extension. This permits to answer a question of the reviewer proposed in 1933 (this Zbl. 7, 252, see p. 4 of that paper). The paper contains some applications to the theory of linear spaces (in particular a characterization of the normed linear spaces for which Brouwer's fixed-point theorem holds in their unit spheres) and to the theory of absolute neighbourhood retracts (abbreviated ANR) considered without hypothesis of the separability. In particular it is proved following „factorization“ theorem: Let  $Y$  be an ANR; then there exists a polytope  $P$  (in

general infinite) and a continuous mapping  $g$  of  $P$  into  $Y$  such that if  $X$  is any metric space and  $f$  a continuous mapping of  $X$  into  $Y$  then there exists a continuous mapping  $\varphi$  of  $X$  into  $P$  such that  $g\varphi$  is homotopic to  $f$ . Karol Borsuk.

**Utz, W. R.:** A note on unrestricted regular transformations. *Pacific J. Math.* **1**, 447—453 (1951).

**Bezeichnungen.** Es sei  $W$  das System aller reellen, stetigen Funktionen  $g(t)$  der reellen Veränderlichen  $t$ , erklärt für  $t \geq 0$  derart, daß  $g(0) = 0$ ,  $g(t) > 0$  für  $t > 0$  und  $g(t') + g(t'') \geq g(t)$ , falls  $t' + t'' \geq t$ ; insbesondere ist also  $g(t') \leq g(t'')$  für  $t' < t''$ . — Es sei  $M$  ein metrischer Raum und  $[p, q]$  die Entfernung von  $p, q \in M$ . Eine Abbildung  $T(x) = y$  von  $M$  auf einen metrischen Raum  $N$ , kurz  $T(M) = N$ , heißt *unrestricted regulär*, kurz *u-regulär* (W. A. Wilson, *dies. Zbl.* **10**, 378), wenn ein  $g \in W$  existiert derart, daß  $[T(p), T(q)] = g([p, q])$  für beliebige  $p, q \in M$ ; ein solches  $g$  heißt eine *Skala* von  $T$ ; jedes *u-reguläre*  $T$  ist *eindeutig* und *stetig*. — **Ergebnisse.** (Vor.: Alle auftretenden  $T$  sollen *u-regulär* sein.) (1) Ist  $T$  *u-regulär* mit der Skala  $g$ , so ist  $T^n = T(T^{n-1})$  ebenfalls *u-regulär* und hat  $g^n = g(g^{n-1})$  als eine Skala. — (2a) Wenn  $g(t) < t$  für alle  $t > 0$ , dann existiert zu jedem Paar  $p, q \in M$  und jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $k = k(\varepsilon, p, q)$  mit  $[T^n(p), T^n(q)] < \varepsilon$  für jedes  $n > k$ . — (2b) Wenn  $g(t) > t$  für jedes  $t > 0$ , dann existiert ein  $d > 0$  und zu beliebigen  $p, q \in M$  ein  $k = k(p, q, d)$  mit  $[T^n(p), T^n(q)] > d$  für jedes  $n > k$ . — (2c) Wenn  $g(t) = t$  für alle  $t$ , dann ist  $T$  *isometrisch*. — (3) Ist  $M$  *beschränkt*, so sind die Fälle (2a) und (2b) *ausgeschlossen*. — (4) Ist  $M$  *beschränkt* und sind die  $T^n$  *gleichgradig stetig* (d. h. gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $d = d(\varepsilon) > 0$  derart, daß  $[T^n(p), T^n(q)] < \varepsilon$  falls  $[p, q] < d$ ) für  $n = 1, 2, \dots$ , so ist  $T(M) = M$  *isometrisch*. — (5) Ist  $T(M) = M$  *punktwise periodisch* (also  $p = T^n(p)$  für  $n = n(p)$ ), so ist  $T$  *isometrisch*. — Den Schluß bildet die Formulierung einer Frage, die sich bei Heranziehung einer von E. J. Mickle (*dies. Zbl.* **32**, 214) eingeführten Funktionenklasse ergibt. Otto Haupt.

**Mickle, Earl J.:** Frechet and Kerekjarto equivalence. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 518—521 (1951).

Let  $P_1, P_2$  be homeomorphic Peano spaces, let  $\mathfrak{P}$  be a metric space with distance  $d(p, p')$ ,  $p, p' \in \mathfrak{P}$ , let  $T_i: P_i \rightarrow \mathfrak{P}$ ,  $i = 1, 2$ , be any two continuous mappings from  $P_1$  and  $P_2$  into  $\mathfrak{P}$ .  $T_1$  and  $T_2$  are said to be *Frechet-equivalent* ( $F$ ) if for every  $\varepsilon > 0$  there exists a homeomorphism  $h_\varepsilon$  from  $P_1$  onto  $P_2$  such that  $d[T_1(p), T_2(h_\varepsilon p)] < \varepsilon$  for any point  $p \in P_1$ .  $T_1$  and  $T_2$  are said to be *Kerekjarto equivalent* ( $K$ ) if  $T_1, T_2$  admit *monotone-light factorizations*  $T_1 = l m_1, T_2 = l m_2$ ,  $m_1: P_1 \rightarrow \mathfrak{M}, m_2: P_2 \rightarrow \mathfrak{M}, l: \mathfrak{M} \rightarrow \mathfrak{P}$ , with the same middle space  $\mathfrak{M}$  and the same light factor  $l$ . The relations between the two equivalences have been discussed, especially in the case when  $P_1, P_2$  are 2-manifolds, by J. W. T. Youngs [*Ann. of Math.* II. Ser. **45**, 753—785 (1944)].  $F$ -equivalence always implies  $K$ -equivalence;  $K$ -equivalence does not imply in general  $F$ -equivalence, though there are a few cases where this implication can be proved, e. g. when  $P_1, P_2, \mathfrak{M}$  are 2-cells, or are 2-spheres. In the present paper the author takes into account mappings  $T_1, T_2$  from 3-dimensional manifolds  $P_1, P_2$ . The author proves by examples that even in the case when  $P_1, P_2$  are 3-cells,  $K$ -equivalence does not imply  $F$ -equivalence and so it is proved that in the 3-dim. case the relations between  $K$ - and  $F$ -equivalence are weaker than in the 2-dim. case. Lamberto Cesari.

**Young jr., Gail S.:** A generalization of the Rutt-Roberts theorem. *Proc. Amer. math. Soc.* **2**, 586—588 (1951).

A theorem on the separation of point pairs in the plane or 2-sphere due to Rutt and Roberts is stated in the following manner, and also proved by R. L. Moore in his „Foundations of point-set theory“ (Th. 112. Ch. IV, p. 296; New York 1932): „If  $O$  is a continuum and  $G$  is a collection of continua all containing  $O$  and such that no two of them have in common any point of  $S - O$  and the sum of all the continua



of  $G$  is a compact continuum  $M$ , and  $A$  and  $B$  are two distinct points of  $S - M$  which are not separated from each other by any one continuum of the collection  $G$ , then  $A$  and  $B$  are not separated by  $M^c$ . — The author proves here a generalization of this theorem concerning linking in normal spaces acyclic in dimension  $(i + 1)$ , using Čech cycles and homologies on compact sets. Following is the statement of the generalization: Let  $S$  be a normal space acyclic in dimension  $i + 1$ , and let  $Z^i$  be a cycle on a compact subset  $K$  of  $S$ . Let the compact set  $M$  in  $S - K$  be the union of a collection  $G = \{C_\alpha\}$  of closed sets satisfying the following: (1) for every  $\alpha$ ,  $Z^i \sim 0$  in  $S - C_\alpha$ ; (2) there is a set  $C$  which is the intersection of each two elements of  $G$  and which links no  $(i + 1)$ -cycle of  $S$ ; (3) no closed set which is a union of elements of  $G$  links any  $(i + 1)$ -cycle; and (4) any closed set which is the union of more than one element of  $G$  can be split into two closed proper subsets which are unions of elements of  $G$ . Then  $Z^i \sim 0$  in  $S - M^c$ . — The last condition [condition (4)], which enters essentially in a form of induction argument in the demonstration, is also shown to be verified in the special case when  $S$  is a compact metric space and the trace of the family  $G$  on each compact subset of  $S - C$  is upper semi-continuous.

V. S. Krishnan.

**Sitnikov, J.:** Über die Homologieumgürtung von Kompakten im Euklidischen Räume. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 153–156 (1951) [Russisch].

Beweis der beiden von Verf. (dies. Zbl. 43, 171) ausgesprochenen Charakterisierungen der Dimension  $r$  eines Kompaktums  $\Phi$  im euklidischen  $R^n$  ( $r < n - 1$ ) durch Eigenschaften der Komplementärmenge  $R^n - \Phi$ .

Ewald Burger.

**Sitnikov, K.:** Ein Dualitätssatz für nicht-abgeschlossene Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 359–362 (1951) [Russisch].

Es wird folgender allgemeine Dualitätssatz bewiesen: Sei  $M^n$  eine geschlossene  $n$ -dimensionale (Homologie-) Mannigfaltigkeit, die in den Dimensionen  $q$  und  $q + 1$  azyklisch ist. Dann sind für eine beliebige Menge  $A \subseteq M^n$  und  $B = M^n - A$  die mit denselben Koeffizientenbereichen genommenen Homologiegruppen  $\Delta^q B$  und Kohomologiegruppen  $\nabla^{n-q-1} A$  isomorph. Hierbei ist  $\Delta^q B$  definiert mittels folgender Zyklen: Ein Zyklus  $z^q$  in  $B$  ist eine Folge  $\{z_k^q, x_k^{q+1}\}$  von in einem Kompaktum  $\Phi \subseteq B$  liegenden  $\varepsilon_k$ -Zyklen  $z_k^q$  und  $\varepsilon_k$ -Ketten  $x_k^{q+1}$  ( $\varepsilon_k \rightarrow 0$ ), wobei  $\partial x_k^{q+1} = z_{k+1}^q - z_k^q$  ist. Der Zyklus  $z^q$  berandet in  $B$ , wenn auf einem Kompaktum  $\Phi'$ ,  $\Phi \subseteq \Phi' \subseteq B$ , derartige  $\varepsilon'_k$ -Ketten  $y_k, x_k$  ( $\varepsilon'_k \rightarrow 0$ ) existieren, daß  $\partial y_k = z_k^q$ ,  $\partial x_k = y_{k+1} - y_k - x_k^{q+1}$  ist. Für bikompakte Koeffizientengruppen fällt  $\Delta^q B$  mit der Bettigruppe  $\Delta_c^q B$  „mit kompakten Trägern“ zusammen. Die Kohomologiegruppe  $\nabla^p A$  beruht in bekannter Weise auf der Betrachtung der unendlichen Kozyklen in den Nerven der stern-endlichen Überdeckungen der Menge  $A$ . — Verf. legt ferner die Beziehungen seines Dualitätssatzes zum allgemeinen Dualitätssatz von Alexandroff (dies. Zbl. 33, 133) klar.

Ewald Burger.

**Hilton, P. J.:** Calculations of the homotopy groups of  $A_n^2$ -polyhedra. II. Quart. J. Math., Oxford II. Ser. 2, 228–240 (1951).

Cet article constitue la suite d'un article précédent du même A. (ce Zbl. 39, 396). L'A. détermine ici le  $(n + 2)$ -groupe d'homotopie  $\pi_{n+2}(K)$  d'un  $A_n^2$ -polyèdre  $K$ ; on calcule successivement  $\pi_{n+2}(K^n)$ ,  $\pi_{n+2}(K^{n+1})$ ,  $\pi_{n+2}(K^{n+2})$ , en usant à chaque étape d'un théorème de suspension. Ceci exige la résolution du problème préliminaire suivant: déterminer le groupe  $\pi_{n+2}(K_\sigma)$  du complexe  $K_\sigma = S^n \cup E^{n+1}$ , obtenu en ajoutant à la sphère  $S^n$  une  $(n + 1)$ -cellule  $E^{n+1}$ , dont la sphère-bord est appliquée sur  $S^n$  avec degré  $\sigma$ . Si  $\sigma$  est impair,  $\pi_{n+2}(K_\sigma)$  est nul. Si  $\sigma$  est pair,  $\pi_{n+2}(K_\sigma)$  est une extension d'un groupe d'ordre 2 par un groupe d'ordre 2. Pour  $\sigma \equiv 0 \pmod{4}$ , cette extension est une somme directe; pour  $\sigma \equiv 2 \pmod{4}$ , l'A. conjecture que  $\pi_{n+2}(K_\sigma)$  est cyclique d'ordre 4, et ceci lui permet de décrire explicitement  $\pi_{n+2}(K)$  comme extension. Le cas  $n = 3$  nécessite une étude spéciale, mais conduit à des résultats analogues.

René Thom.

Whitehead, J. H. C.: On the theory of obstructions. Ann. of Math., II. Ser. 54, 68—84 (1951).

Cet article contient une démonstration des théorèmes de Whitney et Postnikov sur la classification des applications d'un  $(n-1)$ -complexe  $K_n$  dans un espace  $E$  (WC-complexe)  $(n-1)$ -connexe dont le groupe  $\pi_n(E)$  admet un nombre fini de générateurs. L'A. définit comme dans un article précédent (ce Zbl. 37, 261) le groupe  $\Gamma(\pi_n(E))$ , ainsi que l'opérateur de „bord dérivé“:

$$\alpha: H_{n+2}(X) \rightarrow \Gamma(H_2(X)) \quad (n=2) \quad \text{ou} \quad H_n(X)/2H_n(X) \quad (n>2).$$

Soit  $\{\alpha\}$  la classe de  $H^{n+2}(X, \Gamma)$  qu'il définit. Si  $\{1\}$  désigne la classe fondamentale de  $H^n(X, \pi_n)$ , alors l'usage de complexes „réduits“ montre que:  $\{\alpha\} = p_1(1)$  pour  $n=2$  et  $S^2(1)$  pour  $n>2$ , où  $p_1$  désigne la carré de Pontrjagin. Ces formules se transposent pour donner la différence de deux obstructions associées à deux applications  $f, g$  d'un couple  $(K, L)$  dans  $X$ , en fonction de la classe différence  $(f^* - g^*)(1)$ . Dans le problème de la classification des applications de  $K^{n+1}$  dans  $X$ , l'usage de la formule  $p_1\delta^* = \delta^*p_0$  nécessite (dans le cas  $n=2$ ) l'introduction du carré de Postnikov  $p_0$ .

René Thom.

Rochlin, V. A.: Über eine Abbildung der  $(n+3)$ -dimensionalen Sphäre in die  $n$ -dimensionale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 541—544 (1951) [Russisch].

Bekanntlich ist es zweckmäßig, die Homotopiegruppen  $\pi_{n+k}(S^n)$  der Sphären  $S^n$  nach dem Wert von  $k$  in Serien einzuteilen, da für  $n \geq k+2$  die Freudenthalsche Einhängung  $E$  einen Isomorphismus von  $\pi_{n+k}(S^n)$  auf  $\pi_{n+k+1}(S^{n+1})$  liefert. In der ersten Serie ( $k=1$ ) ist das Verhalten der Einhängung  $E$  auch für den Wert  $n=2$  bekannt, desgleichen in der zweiten Serie ( $k=2$ ) auch für  $n=2, 3$  (Pontrjagin, dies. Zbl. 35, 111 und G. W. Whitehead, dies. Zbl. 37, 397). In der dritten Serie ( $k=3$ ) ist das Verhalten von  $E$  auch für  $n=3, 4$  bekannt [Hurewicz-Steenrod, Proc. nat. Acad. Sci. USA 27, 60 (1941); G. W. Whitehead, Ann. of Math., II. Ser. 51, 192—237 (1950)], jedoch nicht für  $n=2$ . Verf. zeigt nun, daß  $E\pi_5(S^2) = 0$  ist. Auf Grund der Eigenschaften von  $E$  für  $k=3$  und  $n \geq 3$  genügt es, zu beweisen, daß  $E^n\pi_5(S^2) = 0$  ist für hinreichend großes  $n$ , wobei  $E^n$  die  $n$ -fache Iteration von  $E$  bedeutet. Sei  $h_2$  die Erzeugende von  $\pi_5(S^2)$ ,  $h_n = E^{n-2}h_2$ . Verf. gibt eine Konstruktion der Abbildung  $h_n$  nach der lokalen Methode von Pontrjagin durch ein orthogonales  $n$ -Bein-Feld  $H_n^0$  auf einer 3-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $T_0^3$  im  $R^{n+3}$  an. Nun wird  $R^{n+3}$  als Hyperebene eines  $R_1^{n+4}$  aufgefaßt und gezeigt, daß sich für hinreichend großes  $n$  das Feld  $H_n^0$  fortsetzen läßt auf eine 4-dimensionale beschränkte Mannigfaltigkeit  $M^4$ , die in einem der von  $R^{n+3}$  bestimmten Halbräume von  $R_1^{n+4}$  liegt und  $T_0^3$  als Rand besitzt. Hieraus folgt die Nullhomotopie von  $h_n$ . (Anmerkung des Ref.: Das Ergebnis steht im Widerspruch zu einem unpublizierten Resultat von G. W. Whitehead und P. Hilton [vgl. Massey and Whitehead, Bull. Amer. math. Soc. 57, 491 (1951)].)

Ewald Burger.

Chern, Shiing-shen and E. Spanier: A theorem on orientable surfaces in four-dimensional space. Commentarii math. Helvet. 25, 205—209 (1951).

$M$  sei eine differenzierbare, geschlossene, orientierte Fläche im euklidischen  $R^4$ . Man ordnet jedem Punkt  $x$  von  $M$  diejenige orientierte 2-dimensionale Ebene durch den festen Punkt 0 des  $R^4$  zu, welche der Tangentialebene an  $M$  in  $x$  parallel ist; so entsteht eine Abbildung  $t$  von  $M$  in die Mannigfaltigkeit  $G$  der 2-dimensionalen Ebenen durch 0. Bekanntlich ist  $G$  homöomorph mit dem cartesischen Produkt zweier Kugelflächen und besitzt also eine, aus zwei solchen Flächen  $S_1, S_2$  bestehende Basis der zweiten Homologiegruppe; es gilt daher eine Homologie  $t(M) \sim u_1 S_1 + u_2 S_2$  mit ganzen Koeffizienten  $u_1, u_2$ . Das Ziel der Arbeit ist der Beweis des Satzes:  $u_1 = u_2 = \frac{1}{2}\chi$ , wobei  $\chi$  die Eulersche Charakteristik von  $M$  ist; er zerfällt in die beiden Teile (1)  $u_1 + u_2 = \chi$ , (2)  $u_1 - u_2 = 0$ . Blaschke (dies. Zbl. 36, 114) hat in der Sprache und mit Methoden der Differentialgeometrie (1) bewiesen und (2) ohne Beweis aus Symmetriegründen als gültig angenommen; der Wunsch, diese Lücke auszufüllen, hat die vorliegende Arbeit veranlaßt. — Der Beweis arbeitet mit einfachen Begriffen und Methoden aus der Fasertheorie.



$\Omega$ , sei die charakteristische Cohomologieklassse des Tangentialbündels von  $M$ ; es wird bewiesen, daß  $\Omega_t = (u_1 + u_2) \cdot M^*$  ist, wobei  $M^*$  den Grundcozyklus von  $M$  bezeichnet; die Behauptung (1) ist also gleichbedeutend mit  $\Omega_t = \chi \cdot M^*$ , und die Richtigkeit hiervon ist bekannt. Ferner betrachtet man die Abbildung  $n$  von  $M$  in  $G$ , die durch die Normalebenen (an Stelle der Tangentialebenen) von  $M$  vermittelt wird; zunächst zeigt man, daß  $n(M) \sim u_1 S_1 - u_2 S_2$  ist; ist dann  $\Omega_n$  die charakteristische Klasse des Normalenbündels über  $M$ , so folgt analog wie vorher:  $\Omega_n = (u_1 - u_2) \cdot M^*$ ; die Behauptung (2) ist also gleichbedeutend mit  $\Omega_n = 0$ ; die Richtigkeit hiervon aber ist enthalten in einem Satz von Seifert (dies. Zbl. 13, 369) oder auch in dem folgenden Satz, für den ein kurzer Beweis angegeben wird: „Ist  $M$  eine differenzierbare, geschlossene, orientierbare Mannigfaltigkeit (beliebiger Dimension) in einer Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M'$  höherer Dimension, und ist  $M$  homolog 0 in  $M'$ , so ist die charakteristische Klasse des Normalenbündels von  $M$  gleich 0.“

Heinz Hopf.

Pastidès, N.: Sur les points fixes des transformations cycliques des domaines plans. Ann. sci. École norm. sup., III. Sér. 68, 169—184 (1951).

Die Resultate dieser Arbeit sind seit langem bekannt (siehe z. B. Kérekjártó, Vorlesungen über Topologie, Berlin 1923): Periodische Abbildungen eines ebenen, einfach zusammenhängenden, berandeten Bereiches sind entweder direkt und dann homöomorph mit Drehungen der Kreisscheibe um einen genauen Teil von  $2\pi$ , oder sie sind indirekt und homöomorph mit Spiegelungen der Kreisscheibe an einem Durchmesser.

Walter Brödel.

Dirac, G. A.: Note on the colouring of graphs. Math. Z. 54, 347—353 (1951).

Die chromatische Zahl  $K(G)$  eines Graphen  $G$  ist die kleinste natürliche Zahl von der Eigenschaft, daß die Knotenpunkte von  $G$  sich derart in fremde Klassen der Anzahl  $K(G)$  zerlegen lassen, daß zwei Knotenpunkte derselben Klasse nicht durch eine Kante von  $G$  verbunden sind. N. G. de Bruijn hat gezeigt, daß ein unendlicher Graph immer einen endlichen Teilgraphen von derselben chromatischen Zahl enthält. Auf Grund dieses Satzes läßt sich das Problem der Bestimmung der chromatischen Zahl eines unendlichen Graphen  $G$  auf dasjenige der endlichen Teilgraphen von  $G$  zurückführen. Ein Knotenpunkt  $a$  von  $G$  heißt ein kritischer Knotenpunkt, falls  $K(G - a) = K(G) - 1$  ist, wobei  $G - a$  den Teilgraphen von  $G$  bezeichnet, den man durch Entfernung des Knotenpunktes  $a$  und der darin endigenden Kanten aus  $G$  erhält. Ein Knotenpunkt  $b$  von  $G$  ist ein wesentlicher Knotenpunkt, falls  $G$  einen Teilgraphen von derselben chromatischen Zahl enthält, in dem  $b$  ein kritischer Knotenpunkt ist. Verf. beweist manche Sätze über kritische und wesentliche Knotenpunkte, von denen folgende zwei auch hier angeführt werden: Sind  $a$  und  $b$  kritische Knotenpunkte von  $G$ , so ist  $a$  ein wesentlicher Knotenpunkt von  $G - b$ . — Jeder Knotenpunkt eines zusammenhängenden Graphen  $G$  mit  $K(G) = 3$  ist wesentlich, insofern  $G$  keinen Trennpunkt enthält. Dabei wird ein Knotenpunkt  $c$  als ein Trennpunkt von  $G$  bezeichnet, falls  $G - c$  nicht zusammenhängend ist.

Tibor Szele.

Ore, Oystein: A problem regarding the tracing of graphs. Elemente Math. 6, 49—53 (1951).

Verf. betrachtet eine spezielle Klasse  $A$  endlicher und zusammenhängender Eulerscher Graphen, die folgendermaßen definiert wird: Jedes Element  $G$  aus  $A$  soll mindestens eine Ecke  $a$  besitzen, derart, daß ein Punkt, welcher in  $a$  startet,  $G$  vollständig durchlaufen hat, jede Kante nur einmal, sobald alle in  $a$  mündenden Kanten von ihm überstrichen worden sind, wenn er einzig die Vorschrift innehält, von jeder unterwegs erreichten Ecke aus längs einer noch nicht durchmessenen Kante weiterzulaufen.  $A$  ist identisch mit der Klasse  $B$  von Eulerschen Graphen, deren Elemente  $G$  keine Cykel haben dürfen, welche eine bestimmte Ecke nicht enthalten. Die Anzahl der ausgezeichneten Ecken ist höchstens 2. Verf. gliedert seinen Beweis, indem er zeigt: 1. Jeder Eulersche Teilgraph eines Elementes aus  $A$  gehört zu  $A$ . 2. Ist  $2n$  der Grad von  $a$ , dann ist  $G$  die direkte Summe von  $n$  Cykeln. 3. 2 Cykel durch  $a$  ohne gemeinsame Kanten haben höchstens 2 gemeinsame Ecken. Aus 1, 2 und 3 folgt das Hauptresultat leicht. Aus letzterem erkennt man

auch unmittelbar eine Konstruktionsvorschrift für die Elemente aus  $A$ , indem man die Teilgraphen in Betracht zieht, welche aus ihnen durch Löschen der Ecke  $a$  samt ihren Kanten entstehen.

F. Bäßler.

**Ungar, Peter:** A theorem on planar graphs. J. London math. Soc. 26, 256—262 (1951).

$f(G)$  bezeichne die Eckenzahl eines zusammenhängenden Graphen  $G$ . Unter der Länge eines Kantenweges verstehe man die Anzahl seiner Kanten.  $d(A, B)$  sei die Länge des kürzesten Weges zwischen den Ecken  $A$  und  $B$ . Das Maximum von  $d(A, B) = d(G)$  für alle Eckenpaare heiße Durchmesser von  $G$ . Eben heißt  $G$ , wenn sein Incidenzschema ohne Selbstüberschneidungen in der Ebene realisiert werden kann. Verf. beweist den Satz I: In jedem ebenen Graphen  $G$  existiert zu jedem ganzen positiven  $k$  eine Eckenmenge  $J$ , so daß jede Komponente von  $G - J$  höchstens  $k$  Ecken besitzt und  $f(J) \leq 12k^{1/2} (\lg f(G))^{3/2} f(G)$  ist. Dabei ist  $G - J$  der Teilgraph, welcher aus  $G$  durch Herausheben der Ecken  $J$  und aller von ihnen ausgehenden Kanten entsteht. Für  $2 \leq k \leq 10^5$  ist I belanglos, da dann  $12k^{1/2} (\lg f(G))^{3/2} > 1$  ist. Das Fundament des Beweises bilden die 2 Hilfssätze: 1. Wenn  $f(G) > 10^5$  und  $d(G) \geq 2 \lg^2 f(G)$  ist, dann existiert eine nicht leere Eckenmenge  $J$ , so daß jede Komponente von  $G - J$  höchstens  $f(G) - (d+1)f(J)/2 \lg f(G)$  Ecken besitzt.  $G$  muß nicht eben sein. 2. Ist  $G$  eben,  $d$  sein Durchmesser, dann existiert ein  $J$  mit  $f(J) \leq 2d+1$ , so daß die Eckenzahl jeder Komponente von  $G - J$  höchstens  $2 f(G)/3$  ist. 1 und 2 garantieren die Existenz von Punktmengen  $J_0, J_1, J_2, \dots, J_q$ , derart, daß  $J_1$  einer größten Komponente  $G_1$  von  $G - J_0$ ,  $J_2$  einer größten Komponente  $G_2$  von  $G - J_0 - J_1$  angehört usw., so daß schließlich keine Komponente von  $G - J_0 - J_1 - \dots - J_q$  mehr als  $k$  Ecken besitzt, und allgemein die Abschätzung  $f(J_k) \leq 2\sqrt{3} f(G_k - G'_k) \sqrt{\lg f(G_k) f(G'_k)}$  gilt.  $G'_k$  ist eine Maximalkomponente von  $G_k - J_k$ . In mehreren Schritten folgt aus diesem Resultat durch geeignete Zusammenfassung, Summierung und erneute Abschätzungen die Ungleichung von I. Für nicht ebene Graphen gilt I nicht. Verf. zeigt für jedes  $k$  die Existenz regulärer kubischer Graphen, bei denen  $f(J)$  immer  $> f(G)/4$  ist, wenn jede Komponente von  $G - J$  höchstens  $k$  Ecken enthält. Für jeden Cykel  $C$  von  $G$  gilt  $f(C) \geq k$ . (Druckfehler: S. 257 Zeile 11 von unten steht  $<$  statt  $>$ .)

F. Bäßler.

## Theoretische Physik.

**Infeld, L. and T. E. Hull:** The factorization method. Reviews modern Phys. 23, 21—68 (1951).

Die hier dargestellte „Methode der Faktorzerlegung“, welche auf eine Arbeit von Schrödinger (dies. Zbl. 23, 86) zurückgeht, will ein möglichst allgemeines Verfahren zur Lösung von Eigenwertproblemen linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom Sturm-Liouville'schen Typus:  $(1) \frac{d}{d\theta} \left( p \frac{dP}{d\theta} \right) + qP + \lambda \varrho P = 0$  liefern. [Dabei sollen  $p(\theta) \geq 0$ ,  $\varrho(\theta) \geq 0$  sein und  $\varrho/p$  überall existieren;  $\lambda$  ist der Eigenwertparameter.] Der Hauptvorteil des Verfahrens ist der, daß der übliche Umweg über die allgemeine Lösung von (1), aus der dann die den Randbedingungen genügenden Funktionen ausgewählt werden, vermieden wird; es wird überhaupt nur innerhalb des Raumes der den Randbedingungen genügenden Funktionen operiert. — Die Idee der Methode ist die folgende: Zunächst wird (1) durch die Substitution  $y = (p\varrho)^{1/2} P$ ,  $dx = \left( \frac{\varrho}{p} \right)^{1/2} d\theta$  in die Standardform  $(2) \frac{d^2 y}{dx^2} + r(x; m)y + \lambda y = 0$  übergeführt. [Die Funktion  $r(x; m)$  soll dabei wie angedeutet noch von einem ganzzahliger Werte fähigen Parameter  $m$  abhängen; gesucht sind Eigenwerte und Eigenfunktionen in Abhängigkeit von diesem Parameter.] Es wird dann (2) durch ein System von zwei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung ersetzt:

$$(3) \quad \begin{cases} H_{m+1}^- \cdot y(\lambda; m) = [\lambda - L(m+1)]^{1/2} y(\lambda; m+1) \\ H_m^+ \cdot y(\lambda; m) = [\lambda - L(m)]^{1/2} y(\lambda; m-1) \end{cases}$$

mit  $H_m^\pm = k(x; m) \pm d/dx$ . Dabei sind  $k(x; m)$  und  $L(m)$  aus  $r(x; m)$  zu bestimmen (s. weiter unten). Ist eine solche „Faktorzerlegung“ von (2) gefunden, so können die gesuchten Eigenfunktionen leicht konstruiert werden: Sei  $L(m)$  eine monoton wachsende (resp. fallende) Funktion von  $m$ ; sei ferner  $l$  eine ganze Zahl. Dann sind die Eigenwerte gegeben durch  $\lambda_l = L(l+1)$ . [resp.  $\lambda_l = L(l)$ ], und die zugehörigen Eigenfunktionen sind  $y(\lambda_l; m)$ , wo  $0 \leq m \leq l$  [resp.  $m \geq l$ ]. Für die  $y(\lambda_l; m)$  gilt folgendes Konstruktionsverfahren:

$$L(m+1) > L(m): H_{m+1}^- y(\lambda_l; l) = 0; y(\lambda_l; m-1) = H_m^+ \cdot y(\lambda_l; m),$$

$$L(m+1) < L(m): H_m^+ y(\lambda_l; l) = 0; y(\lambda_l; m+1) = H_{m+1}^- \cdot y(\lambda_l; m).$$

— Das Problem, eine Faktorzerlegung (3) für eine gegebene Differentialgleichung (2) zu finden, beansprucht den größten Teil der Arbeit. Ausgehend von möglichen  $k(x; m)$  werden sechs



Typen von Differentialgleichungen aufgestellt, die — allerdings untereinander verknüpft — alle wesentlichen Fälle umfassen. [Ausgeschlossen ist dabei immerhin eine transzendente Abhängigkeit von  $k(x; m)$  von  $m$ .] Diese sechs Typen bilden, in Form einer Tabelle, welche  $k(x; m)$  und  $L(m)$  zu vorgegebenem  $r(x; m)$  liefert, das einzige für die Faktorzerlegung benötigte Hilfsmittel. Fälle, die mit keinem der sechs Grundtypen exakt übereinstimmen, können zum Teil durch Kunstgriffe („Artificial Factorization“) auf diese zurückgeführt werden. — Zur Illustration der Methode werden dann alle in der Physik gebräuchlichen Eigenwertprobleme behandelt; die wichtigeren unter ihnen z. T. auf verschiedene Weise. Dies illustriert die Tatsache, daß die Faktorzerlegung durch das Problem nicht eindeutig bestimmt ist, was mit den erwähnten Querverbindungen zwischen den Zerlegungstypen zusammenhängt. Einige spezielle Ausartungen treten gerade bei physikalisch wichtigen Differentialgleichungen auf: 1. Für die Differentialgleichung der Zylinderfunktionen ist  $L(m) = 0$ , so daß nur die Rekursionsformeln, jedoch keine „Schlüsselfunktion“ (für die  $H_l^+ y = 0$  oder  $H_{l+1}^- y = 0$  gilt) existiert. Das Verfahren liefert also hier nicht die vollständige Lösung des Problems. 2. Beim Problem des harmonischen Oszillators hängt  $r(x; m)$  nicht von  $m$  ab. Man würde durch direkte Anwendung der Methode wie immer unendlich viele Sequenzen von Eigenfunktionen finden, deren jede hier aber sämtliche Funktionen enthielte, so daß jede Eigenfunktion unendlich oft aufträte. Dies wird durch den Kunstgriff vermieden, daß man die Bedeutung von  $\lambda$  und  $m$  vertauscht. Dieses Problem wird sehr breit behandelt und auf neutrale und geladene Mesonfelder mit vorgegebenen Quellen angewandt. — Als weitere Anwendungen der Faktorzerlegung wird anschließend die Berechnung von (physikalisch sinnvollen) Matrixelementen behandelt; aus dem Konstruktionsprozeß für die Eigenfunktionen folgen direkt Rekursionsformeln für diese. — Schließlich wird noch eine neue Form der Störungstheorie entwickelt, die darin besteht, die Faktorzerlegung approximativ durchzuführen (im Sinne einer Entwicklung nach Potenzen eines Störparameters). Außer für einen der Zerlegungstypen werden die Rechnungen allerdings hierbei i. a. komplizierter als bei den üblichen Methoden; doch ist als Vorteil zu buchen, daß die Störung  $n$ -ter Ordnung der Eigenwerte nicht die Kenntnis der Störung ( $n - 1$ )-ter Ordnung der Eigenfunktionen voraussetzt. Für den einen Zerlegungsfall, in welchem die Rechnungen einfacher werden, wird als Beispiel der Starkeffekt berechnet. — Über die Grenzen der Methode ist in der Arbeit [außer einer oben erwähnten Beschränkung auf rationale  $k(m)$ ] nichts zu finden. Doch zeigt die ausführliche Behandlung aller bis heute für den Physiker wichtigen Probleme, daß man i. a. wird damit rechnen können, mit Hilfe der hier dargestellten Methode und den Zerlegungstabellen im Anhang die im Verlaufe physikalischer Untersuchungen auftretenden Randwertprobleme lösen zu können.

M. R. Schafroth.

Vallée, Robert: „Opérateurs d'observation“ et théorie de l'information. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1428—1430 (1951).

Exploitant une idée précédemment énoncée [C. r. Acad. Sci., Paris, **233**, 1350—1351 (1951)], l'A. définit deux types d'opérateurs destinés à représenter ce qui se passe réellement [fonction  $f(x, t)$ ] à partir de ce qui est observé [ $g(x, t)$ ]. Il admet que  $g(x, t)$  peut être obtenue soit comme l'image de Fourier du produit d'une fonction  $Z(\lambda, \mu, \nu, \omega)$  (opérateur de filtrage) par la transformée de Fourier  $\varphi(\lambda, \mu, \nu, \omega)$  de  $f(x, t)$  soit comme le produit de  $A(x, t)$  (opérateur de limitation de champ) par  $f(x, t)$ . Le cas général s'obtient par le produit de ces opérations auquel peut s'ajouter une fonction de bruit destinée à établir un certain indéterminisme. A titre d'application, une forme généralisée de la formule de Shannon est donnée.

Antoine Visconti.

Corrsin, Stanley: A simple geometrical proof of Buckingham's  $\pi$ -theorem. Amer. J. Phys. **19**, 180—181 (1951).

Bodea, E. I.: A four-dimensional atomistic measure system leading to a natural classification of basic physical constants. Anais Acad. Brasil. Ci. **23**, 73—90 (1951).

Jovanovitch, D. K.: Sur le principe de l'incertitude et „La causalité de groupe“ dans la physique contemporaine. Bull. Soc. Math. Phys. Serbie **3**, 1—9 und französ. Zusammenfassg. 10 (1951) [Serbisch].

## Mechanik:

• Burgatti, Pietro: *Memorie scelte*. Bologna: Nicola Zanichelli 1951. VI, 354 p.

This is a selection of 38 among the 114 papers published between 1895 and 1938 by Pietro Burgatti. They are mainly devoted to classical theoretical mechanics and related topics.

Mauricio Matos Peixoto.

**Sul'gin, M. F.:** Verallgemeinerung des Poissonschen Theorems auf den Fall holonom nicht-konservativer Systeme. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 23—26 (1951) [Russisch].

Dans le cas d'un système dynamique holonome non conservatif, les équations de Hamilton s'écrivent:

$$(1) \quad \dot{q}_i = \partial H / \partial p_i; \quad \dot{p}_i = -\partial H / \partial q_i + Q_i(q_i, p_i, t); \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

L'A. note d'abord qu'en introduisant  $2n$  variables auxiliaires  $s_i$  et  $u_i$  et qu'en posant:

$$K = \sum_1^n \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} s_i + \left( \frac{\partial H}{\partial q_i} - Q_i \right) u_i \right]$$

les  $4n$  variables  $q_i, u_i, s_i, p_i$  vérifient le système hamiltonien:

$$(2) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial K}{\partial s_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial K}{\partial u_i}; \quad \dot{u}_i = \frac{\partial K}{\partial p_i}; \quad \dot{s}_i = -\frac{\partial K}{\partial q_i}.$$

Puis l'A. montre comment la connaissance d'une intégrale première de (1) et d'une intégrale première de (2) conduit à la formation d'une seconde intégrale de (1).

*Julien Kravtchenko.*

**Bucerus, Hans:** Der freie Fall auf der rotierenden Erde. S.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1950, 77—83 (1951).

This paper is devoted to the problem of the falling body when the rotation  $\omega$  of the earth is taken into account. Essentially, the difference between this and the usual treatment is that the attraction of the earth and the centrifugal force are not put together in a single term and that  $\omega^2$  is not neglected. *Mauricio Matos Peixoto.*

**Sextl, Theodor:** Über die Bewegung eines Massenpunktes in einem widerstehenden Mittel veränderlicher Dichte. Acta phys. Austr. 5, 148—151 (1951).

Die Differentialgleichung für den vertikalen Fall eines Körpers im Schwerfeld bei einem einer Potenz der Geschwindigkeit proportionalen Widerstand in einem Medium, dessen Dichte sich nach einem Exponentialgesetz mit der Höhe verändert, läßt sich bei den Exponenten 1 und 2 formal integrieren. *Georg Hamel.*

**de Castro Brzezicki, A.:** Über die Bewegung eines Massenpunktes im Vakuum. Gac. mat., Madrid 3, 217—219 (1951) [Spanisch].

**Colombo, G.:** Sulle configurazioni di equilibrio di un velo flessibile ed inestendibile, sviluppabile. Rend. sem. mat. Univ. Padova 20, 153—166 (1951).

L'A. considera un velo flessibile, inestendibile, sviluppabile in un triangolo o quadrangolo piano, due lati opposti del quadrangolo o un vertice e il lato opposto del triangolo fissati nello spazio, gli altri due lati liberi da forze; ogni elemento del velo è soggetto a forze dipendenti solo dalla sua giacitura. L'A., con un opportuno sistema di coordinate, scrive in forma semplice le equazioni d'equilibrio del velo e dimostra che, per il velo quadrangolare, non esistono, in generale, configurazioni regolari di equilibrio, mentre tali configurazioni sono possibili per il velo triangolare.

*Dario Graffi.*

**Voronov, A. A.:** Freie Schwingungen eines Oszillators mit veränderlicher Reibung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 517—520 (1951) [Russisch].

Pour représenter les lois de certains phénomènes oscillatoires, l'A. est conduit à proposer l'équation:

$$(1) \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = -k^2 f(x) \operatorname{sign} \dot{x}; \quad f(x) > 0$$

qui met en compte le frottement interne variable avec l'abscisse. Des hypothèses appropriées, faites relativement à  $f(x)$ , permettent d'intégrer (1) par le procédé de Liapounov. On arrive ainsi à rendre compte de ce fait expérimental: le décremént de l'amortissement est indépendant de la fréquence de l'oscillateur.

*Julien Kravtchenko.*



**Haag, Jules:** Sur la synchronisation d'un oscillateur par une force sinusoïdale indépendante de la vitesse. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 117—118 (1951).

Verf. ergänzt hier seine vorausgegangene Mitteilung (dies. Zbl. **42**, 100) für den dort beiseite gelassenen Fall der Grenzresonanz (Frequenz der erregenden Kraft gleich einem Vielfachen der Grenzfrequenz des schwingenden Systems für Eigenschwingungen verschwindender Amplitude). Er stellt fest, daß der singuläre Punkt nur ein Sattel- oder Wirbelpunkt, aber kein Knotenpunkt sein könne, daher auch keine stabil zu nennende periodische Bewegung möglich sei. — Erörterung eines von Minorsky gegebenen Beispiels (dies. Zbl. **42**, 100). Uwe Timm Bödewadt.

**Ludeke, Carl A.:** Predominantly subharmonic oscillations. J. appl. Phys. **22**, 1321—1326 (1951).

**Siegel, Carl Ludwig:** Über eine periodische Lösung im ebenen Dreikörperproblem. Math. Nachr. **4**, Erhard Schmidt z. 75. Geburtstag, 28—35 (1951).

Verf. hat wiederholt in Göttinger und Princeton Vorlesungen eine vereinfachte Lösung des Hillschen Mondproblems vorgetragen, welche sich mehr an die in der Analysis übliche Potenzreihenmethode anschließt und dementsprechend zu einem Konvergenzbeweis führt. Er legt sie hier sogleich für ein allgemeineres Problem I dar, das zuerst Moulton [Trans. Amer. math. Soc. **7**, 537—577 (1906)] — wenigstens in großen Zügen — behandelt hat in Anlehnung an die Poincaré-

sche Kontinuitätsmethode: durch Potenzreihen (1)  $x = \sum_{m=0}^{\infty} A_m(t) \left(\frac{\tau}{2\pi}\right)^m$  nach der Periode  $\tau$  mit Koeffizienten  $A_m(t)$ , die er rekursiv als trigonometrische Polynome der unabhängigen Zeit  $t$  durch Auflösung von linearen Differentialgleichungen berechnet. Es handelt sich um ein ebenes Dreikörperproblem. Ausgangsbewegung sind die Keplerkreise des Punktes  $P_2$  der Masse  $m_2$  und des Punktes  $P_3$  der vereinten Massen  $m_1 + m_3$  um ihren gemeinsamen Schwerpunkt. Um diesen läßt man ein bewegtes Koordinatensystem mit derselben konstanten Winkelgeschwindigkeit rotieren (in geeigneten Maßeinheiten, die auch sonst einige Konstanten vereinfachen). In diesem sucht man dann bei Aufhebung der Verbindung der Massen  $m_1$  und  $m_3$  eine periodische Bewegung, bei der (der Mond)  $P_1$  eine kleine, geschlossene Kurve, näherungsweise einen kleinen Keplerkreis um (die Erde)  $P_3$  beschreibt, desgleichen mit derselben Periode  $\tau$  (die Sonne)  $P_2$ . — Die beiden Differentialgleichungen für die relativen komplexen Koordinaten  $x$  von  $P_1$  bez.  $P_3$  und  $1 + y$  von  $P_2$  bez. des Schwerpunktes  $P_0$  von  $P_1$  und  $P_3$  lauten

$$\ddot{x} + 2i\dot{x} + \mu x^{-1/2} \bar{x}^{-3/2} - \left(1 + \frac{m_2}{2}\right)x - \frac{3m_2}{2}\bar{x} = p(\text{sic})! \quad \ddot{y} + 2i\dot{y} - \frac{3}{2}(y + \bar{y}) = q,$$

wobei  $p$  und  $q$  mit quadratischen Gliedern beginnende Potenzreihen in  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$  sind, die jedenfalls für  $|x| + |y| < 1$  konvergieren. Die Koeffizienten dieser Potenzreihen sind Polynome mit rationalen Zahlenkoeffizienten in  $\mu = m_1 + m_3$ ,  $\delta = m_1/\mu$ . In den geeigneten Maßeinheiten ist noch  $m_2 = 1 - \mu$ . Spezialfälle sind das (von Brown behandelte) Problem II der periodischen Lösungen der Mondbewegung im restringierten Dreikörperproblem. Hier ist  $\delta = 0$ . — Endlich das Hillsche Problem III der Variationsbahn des parallaxenfreien Mondproblems mit  $\delta = 0$ ,  $\mu = 0$ . — An III hat Hill ein neues, für die astronomische Praxis entscheidendes Verfahren entwickelt. Er macht den Fourieransatz (2)  $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n t / \tau}$  und erhält aus der Diffe-

rentialgleichung und dem Jacobischen Integral ein unendliches System von Gleichungen für die unbekannten reellen Koeffizienten  $a_n$ , das er durch Potenzreihen in  $\tau/2\pi$  befriedigt. Diese von Brown auch auf das Problem II angewandte Methode der unendlich vielen Variablen wurde von A. Wintner mathematisch begründet, vgl. die zusammenfassende Darstellung in The analytical foundations of celestial mechanics, Princeton 1941 (dies. Zbl. **26**, 23), p. 388—400, vgl. auch die Note dazu p. 440. II wurde übrigens von E. Hopf [S. Ber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin 1929, 401—413] auch mit der Kontinuitätsmethode behandelt — kürzer und befriedigender als von Moulton. — Verf. betrachtet seinen neuen, wesentliche analytische Züge des Problems enthüllenden Lösungsansatz als in der Mitte zwischen den beiden Verfahren (1) und (2) stehend. Er geht aus von einer Entwicklung der komplexen Variablen  $x$  nach Potenzen von  $\xi$  und  $\eta$ , wobei  $\xi^6 = \eta^6 = \frac{\tau}{2\pi} e^{i 3\pi i t / \tau}$  (Vorzeichen je nach dem Umlaufssinn) ist, und sagt (in

der Schlußzusammenfassung): „und das Weitere verläuft dann im wesentlichen nach dem seit Newtons Zeiten üblichen Schema für die Lösungen von Differentialgleichungen durch Potenzreihen.“ Zum Glück enthält die Arbeit dieses „Weitere“, Koeffizientenberechnung und Konvergenzbeweis, im einzelnen knapp und kunstvoll, aber endgültig formuliert. Alle Abschätzungen der Majorantenmethode gelten gleichmäßig für  $0 \leq \mu \leq 1$ ,  $0 \leq \delta \leq 1$ . Der Konvergenzbeweis wird in einem Bereich  $|\xi + \eta| < c_1^{-1}$  erbracht und kann, wie Verf. angibt, für praktische Zwecke benutzt werden. [Evidente Druckfehler, die aber doch den Sinn stören: in der auf (11) folgenden

Formel für  $x^{-1/2} \bar{x}^{-5/2}$  muß  $\mu^{-2/3}$  stehen, in (14)  $\left(1 + \frac{m_2}{2}\right)x$ , in (6)  $-\frac{3m_2}{2}\bar{x}$ . — Zum Schluß gestattet sich Ref. noch auf die Arbeiten von O. Perron hinzuweisen, insbesondere: S. Ber. Bayr. Akad. Wiss. München 1936, 157–176; Math. Zs. 42, 593–624 (1937); dies. Zbl. 14, 333, 16, 380. Dort wird das allgemeine Problem I ebenfalls unter Verwendung komplexer Schreibweise und einer von G. D. Birkhoff stammenden und auch von E. Hopf benutzten Transformation in Anlehnung an die Kontinuitätsmethode neuartig, einfach und streng gelöst. — Außerdem ist noch auf die weitere von Lichtenstein entwickelte Methode der sukzessiven Approximationen hinzuweisen, die Ref. [Math. Z. 31, 197–257 (1929), insbes. S. 239–250] auf das Hillsche Problem III der Variationsbahn des Mondes angewandt hat. Diese Methode behandelt die linearen Glieder mittels eines Greenschen Tensors, die nichtlinearen durch sukzessive Approximationen. Schließlich bekommt man die Lösung als Potenzreihen im Hillschen Periodenquotienten  $m = \tau/2\pi$  mit Koeffizienten, die bezüglich der Zeit  $t$  die Periode  $\tau/2$  haben.

Ernst Hölder.

**Michailovitch, Dobrivoje: Contribution à l'étude d'un problème particulier de  $n$  corps.** Bull. Soc. Math. Phys. Serbie 3, 11–33 und französ. Zusammenfassg. 33–34 (1951) [Serbisch].

En partant de quelques résultats, qu'il a obtenu dans la recherche du problème de l'entrechoc de trois corps [Vesnik Društva mat. fiz. Srbije 1, Nr. 1 (1949), 2, Nr. 1/2 (1950)], l'A. généralise dans cet article ces résultats au problème de  $n$  corps, en se basant sur les recherches faites par H. G. Block [Medelanden lunds astron. Observatorium, II. Ser., Nr. 6 (1909)]. Par les méthodes d'analyse vectorielle l'A. a généralisé le théorème sur le pol de gravitation pour le problème d'entrechoc de  $n$  corps, et a appliqué le résultat au problème de quatre corps, en se bornant au cas où, aux solutions exactes comme aux intégrales particulières du problème, répond la configuration d'un tétraèdre régulier. — En se basant sur le résultat de Block, que la constante d'intégration dans l'intégrale d'aire est nulle, l'A. a montré que, dans le cas du problème de  $n$  corps, les projections des vecteurs  $\vec{r}_i$ , par lesquels on fait varier ces vecteurs constants qui déterminent les solutions particulières, sur les axes rectangulaires d'un trièdre, sont liées par les trois relations linéaires. — Puisque on a déterminé les solutions particulières au cas de la configuration d'un tétraèdre régulier, l'A. donne les équations différentielles d'où découle une solution du problème dans la première approximation, et montre le fait, que par les trois relations linéaires entre les projections des vecteurs  $\vec{r}_i$  ce système peut être réduit à six équations, au lieu de neuf. La réduction correspondante par ces relations peut être effectuée aussi au cas du problème de  $n$  corps. — Enfin, l'A. a montré que, dans le problème d'entrechoc de  $n$  corps, les projections des vecteurs grad <sub>$\vec{r}_i$</sub>   $\sqrt{V}$  sur les axes d'un trièdre (où  $V$  désigne la fonction de force)

sont liées aussi par les trois relations linéaires.

Autoreferat.

**Crocco, Arturo: La barriera della temperatura nei missili geodetici.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 97–103 (1951).

Als Vorstufe zu einer Untersuchung der Flugbahnen weitreichender Raketengeschosse im Hinblick auf die beim Atmosphärendurchgang drohende „Temperaturmauer“ wird hier der mittlere Bahnabschnitt betrachtet, aufgefaßt als im leeren Raum durchflogener Ellipsenbogen, der beiderseits bis zur Erdoberfläche verlängert gedacht wird. Einer der beiden Brennpunkte ist die Erdmitte. Das Ergebnis der Untersuchung lautet: Die kleinste Anfangsgeschwindigkeit (und damit die hinsichtlich der zu erwartenden Temperatur günstigste Ellipse) für eine geforderte Reichweite ergibt sich dann, wenn der andere Brennpunkt auf der Sehne des Flugbogens liegt. — Der Aufstiegs- und der Abstiegsbogen sollen in späteren Mitteilungen behandelt werden.

Uwe Timm Bödewadt.

**Crocco, Arturo: La barriera della temperatura nei missili geodetici. II. Dinamica del missili a getto attivo.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 3–10 (1951).

Nachdem im ersten Teil (s. vorsteh. Ref.) die Kennzeichen der günstigsten Ellipsenflugbahnen ermittelt worden waren, gibt Verf. hier eine Tafel der Hauptwerte solcher Bahnen für Reichweiten bis zu 16000 km. Diese enthält auch die Angaben für den immer in 1/16 der Reichweite angenommenen Anschlußpunkt der Aufstiegsbahn. Die Gleichungen der Aufstiegsbahn werden dann aufgestellt, indem die Bahnbeschleunigungen in Längs- und Querrichtung durch die von den



Schub-, Luft- und Schwerkraften erzeugten Beschleunigungen ausgedrückt werden. Durch Zusammenfassung der Schub- und Luftkraft-Beschleunigungen zur (im Fluge allein innerlich meßbaren) Andruckbeschleunigung vereinfacht Verf. die Gleichungen, um im folgenden Teile die Bahnrechnung vom Standpunkt des (menschlichen oder automatischen) Piloten ausführen zu können. — [In Formel (1) fehlt an zweiter Stelle die Schwerkraftbeschleunigung  $g$ .] *Uwe Timm Bödewadt.*

• **Ministry of Supply: Internal ballistics.** London: H. M. Stationery Office 1951. X. 311 p. 25 s. net.

### Elastizität. Plastizität:

• **Föppl-Sonntag: Tafeln und Tabellen zur Festigkeitslehre.** München: R. Oldenbourg-Verlag 1951.

Die heute weit verstreute Literatur über neuere Ergebnisse der Festigkeitsforschung wird in vorliegendem Buche in hohem Maße der Fachwelt zugänglich gemacht, wobei die erforderlichen Anwendungsformeln sowie die zugehörigen Systemskizzen sorgfältig wiedergegeben sind. Infolge der Vielseitigkeit des Inhaltes wird das Buch von weiten Kreisen sehr begrüßt werden. *H. Neuber.*

• **O'Rourke, R. C.: Three-dimensional photoelasticity.** J. appl. Phys. 22, 872—878 (1951).

Die Grundaufgabe der Photoelastizität im dreidimensionalen Falle besteht darin, solche Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen zu finden, die gestatten, den Ausbreitungsvorgang elektromagnetischer Wellen in schwach anisotropen und inhomogenen Medien mit hinreichender Annäherung zu bestimmen. Dies gelingt Verf. dadurch, daß er die für inhomogene, isotrope Medien entwickelte Methode von Sommerfeld-Runge auf schwach anisotrope, inhomogene Medien überträgt. Er wird dabei auf eine verallgemeinerte Hamilton-Jakobische Differentialgleichung für die Phasen der beiden Wellen geführt, die sich mit endlicher Geschwindigkeit in solchen Medien ausbreiten können. Bei Beschränkung auf eine bestimmte Klasse von Spannungszuständen liefert die Methode ein einfaches Mittel, rotations- und kugelsymmetrische Probleme zu behandeln. Das entsprechend abgewandelte Neumannsche Gesetz liefert die Möglichkeit, die Fehler abzuschätzen, die begangen werden, wenn man an Stelle der nach dem Fermatschen Prinzip gewonnenen Wellenstrahlen gerade Linien annimmt. Zum Schluß wird auf das sogenannte allgemeine Problem der Photoelastizität eingegangen, in dem Rotation der Hauptspannungsrichtungen in der Ebene der Wellenfront während des Ausbreitungsvorganges vorausgesetzt wird. Auch hier wird auf die Methode von Sommerfeld-Runge zurückgegriffen. Es wird gezeigt, daß bei entsprechend kleiner, von der Wellenlänge abhängender Rotation deren Einfluß auf die integrierte Phase vernachlässigt werden kann. *Erwin Hardtwig.*

• **Robinson, Kenneth: Elastic energy of an ellipsoidal inclusion in an infinite solid.** J. appl. Phys. 22, 1045—1054 (1951).

Ein vollkommen elastisches, homogenes, dreiachsiges Ellipsoid ist in ein unendlich ausgedehntes, elastisches, homogenes Medium eingebettet. Ellipsoid und Medium haben verschiedene Elastizitätskonstanten. Verschiebungen und Spannungen durchsetzen die Grenzfläche stetig. Es wird das Problem gelöst, Verschiebungen, Spannungen und Deformationsenergie in Form geschlossener Ausdrücke darzustellen unter der Voraussetzung, daß eingeschlossener und umgebender Körper gleichförmiger Änderungen ihrer (als spannungsfrei angenommenen) spezifischen Volumina unterworfen werden. Anschließend wird die vom physikalischen Standpunkt aus interessante Abhängigkeit der Deformationsenergie von Gestalt und Volumen des Einschlusßkörpers, von den elastischen Konstanten beider Medien und Änderungen des spezifischen Volumens diskutiert. Als Abschluß wird auf die Lösung des entsprechenden Problems für den Sonderfall hingewiesen, daß — zusätzlich zu den bereits vorhandenen Bedingungen — im Unendlichen homogener Spannungszustand herrscht mit Hauptspannungsrichtungen parallel zu den Achsen des eingeschlossenen Ellipsoides. *Erwin Hardtwig.*

• **Sengupta, A. M.: Some problems of elastic plates containing circular holes. I.** Bull. Calcutta math. Soc. 43, 27—36 (1951).

Der Spannungszustand in einer doppelt gelochten Scheibe wird in zwei Spezialfällen mit Hilfe von bipolaren Koordinaten behandelt. Die Scheibe unterliegt im ersten Fall der Einwirkung eines Kräftepaars, im zweiten Fall der Einwirkung eines Druckzentrums. Der Angriffspunkt beider Singularitäten ist der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke der Kreislochmittelpunkte. Zahlenbeispiele für die Spannungsverteilung.

*E. Weinel.*

**Sternberg, E., R. A. Eubanks and M. A. Sadowsky:** On the stressfunction approaches of Boussinesq and Timpe to the axisymmetric problem of elasticity theory. J. appl. Phys. **22**, 1121—1124 (1951).

Das Problem, die Verrückungen bei achsensymmetrischer Deformation von Umdrehungskörpern zu bestimmen, ist von verschiedenen Autoren behandelt worden, zuletzt von A. Timpe, C. Weber, H. Neuber sowie von A. und L. Föppl. In vorliegender Arbeit wird auf die Darstellung der Verrückungen vermöge der Spannungsfunktionen von J. Boussinesq und von Timpe zurückgegriffen. Problem und Lösung werden in krummlinigen, orthogonalen achsensymmetrischen Koordinaten formuliert bzw. angeschrieben. Auf eine zwischen den beiden Spannungsfunktionen bestehende Beziehung wird hingewiesen.

*Erwin Hardtwig.*

**Green, A. E. and R. T. Shield:** Finite extension and torsion of cylinders. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A **244**, 47—86 (1951).

Nach Zusammenstellung der von Green und Zerna (dies. Zbl. **36**, 132) und den Verff. (dies. Zbl. **39**, 410) abgeleiteten tensoriellen Formeln für die Verzerrungen, Spannungen und den Zusammenhang zwischen diesen bei Existenz einer allgemeinen Verzerrungsfunktion, insbesondere für isotropes Material, behandeln Verff. im ersten Teil der Arbeit die kombinierte Beanspruchung eines Zylinders von konstantem Querschnitt unter endlicher Längsdehnung mit nachfolgender infinitesimaler Verdrehung, wobei sich bei inkompressiblem Material besondere Eigentümlichkeiten ergeben. In analoger Weise läßt sich die kombinierte Beanspruchung durch hydrostatischen Druck und infinitesimale Torsion behandeln. — Im zweiten Teil befassen sich die Verff. mit den Effekten zweiter Ordnung bei reiner Torsion, falls das Material isotrop und inkompressibel ist und die Verzerrungsenergiefunktion linear von der ersten und zweiten Invarianten des Verzerrungstensors abhängt. In den Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen werden alle Glieder vernachlässigt, die im Verdrehungswinkel pro Längeneinheit mindestens von dritter Ordnung sind. Falls der konstante Querschnitt des Stabes eine einfach geschlossene Kurve ist, läßt sich das Problem mit Hilfe der Theorie komplexer Funktionen einfach darstellen durch Bestimmung zweier komplexer Funktionen einer Veränderlichen, die im Querschnitt regulär sind und am Rande passenden Bedingungen genügen. Wenn die Funktion bekannt ist, die den Querschnitt auf das Innere des Einheitskreises konform abbildet, lassen sich die Formänderungen und Spannungen darstellen mit Hilfe der Lösung einer Integralgleichung. Insbesondere ergibt sich, daß gegenüber der infinitesimalen Verdrehung keine zusätzliche Querschnittsverwölbung eintritt. Die allgemeinen Formeln werden angewendet auf den Fall, daß der Querschnitt eine Cardioide, Lemniscate oder Epitrochoide ist. — Der letzte Teil behandelt mit den bereitgestellten Hilfsmitteln der Funktionentheorie unter Einhaltung der Voraussetzungen des zweiten Teils die kombinierte Beanspruchung durch endlichen Längszug und Torsion unter Berücksichtigung der Effekte zweiter Ordnung hinsichtlich der Verdrehung. Diese Theorie wird erläutert am Stabe mit elliptischem Querschnitt.

*Ruth Moufang.*

**Vălcovici, V.:** Sur le flambage des colonnes pesantes immergées. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Sti. A **3**, 107—113, russische und französ. Zusammenfassgn. 113—114, 114—115 (1951) [Rumänisch].

En utilisant les résultats obtenus dans ses travaux antérieurs, l'A. montre que la ligne élastique d'une colonne pesante immergée est donnée par l'équation

$$y = \int_{u_0}^{\alpha^{1/3}(x-\omega)} p(u) du$$

où l'on a mis  $p(u) = C_1 C(u) + C_2 S(u) + q \alpha^{-2/3} p_3(u)$ ,  $C(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{3n}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdots (3n-1)3n}$ ,

$S(u) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{3n+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdots 3n(3n+1)}$ ,  $p_3(u) = C(u) \int_0^u S(u) du - S(u) \int_0^u C(u) du =$

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{3n+2}}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdots (3n+1)(3n+2)}$ ,  $u_0, \alpha, \omega, q$  étant certaines constantes du problème.



$C_1$  et  $C_2$  étant les constantes d'intégration qui se déterminent par les conditions aux limites imposées à la colonne considérée. — La condition d'instabilité (qui détermine le flambage) est exprimée par la relation  $S^{(i)}(u_0)/C^{(i)}(u_0) = S^{(i)}(u_i)/C^{(i)}(u_i)$ . Cette équation fournit la liaison entre la longueur critique  $l$  et la compression. La détermination de ces solutions est préparée par la séparation des racines des fonctions  $C(u)$ ,  $S(u)$ ,  $C'(u)$ ,  $S'(u)$ . Autoreferat.

**Ashwell, D. G.:** The axis of distortion of a twisted elastic prism. *Philos. Mag.* VII. Ser. 42, 820—832 (1951).

In der Theorie der Verdrehung prismatischer Stäbe von Saint-Venant und späteren Forschern wird angenommen, daß die relative Verdrehung zweier Querschnitte gegeneinander um eine Achse erfolgt, die durch die Schwerpunkte der Querschnitte hindurchgeht. In dieser Note wird bewiesen, daß dies nicht zutrifft, sobald die Längsspannungen und die Krümmung der Fasern, die sie verursachen, mit berücksichtigt werden, so daß in diesen Fällen die Verdrehungsachse (deutsch: Schubmittelpunkt) von der Mittelachse verschieden ist. Die vom Verf. durchgeführten Versuche sprechen für die Richtigkeit seiner Theorie.

*Theodor Pöschl.*

**Ziegler, Hans:** Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben und Wellen. *Z. angew. Math. Phys.* 2, 265—289 (1951).

Das Stabilitätsproblem der geraden Stäbe und Wellen wurde durch Greenhill unter Anwendung eines raumfesten Bezugssystems behandelt. Später gab Grammel weitere Lösungen an, indem er von den Clebsch-Kirchhoffschen Gleichungen ausging. Verf. behandelte in einer früheren Arbeit [*Schweiz. Bauzeitg.* 66, 463 (1948)] den Sonderfall des spannungslos verwundenen Stabes, wobei er das Hauptachsensystem des unverbogenen Stabes benutzte. In der vorliegenden Arbeit wird versucht, die insbesondere bei Vorhandensein eines Torsionsmomentes bestehende Diskrepanz zwischen Theorie und Versuch durch eine Modifikation in der Wahl des Bezugssystems zu überbrücken, wobei jedoch auf die Notwendigkeit der Durchführung weiterer Versuche zur völligen Klärung hingewiesen wird. *H. Neuber.*

**Lattanzi, Filippo:** Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. I. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 10, 395—400 (1951).

Die Note gründet sich auf das folgende, von C. L. Ricci (1911) aufgestellte elementare Theorem: Eine Kraft  $F$ , die normal zu einem Querschnitt eines an einem Ende fest eingespannten Balkens wirkt, erzeugt eine Drehung des Querschnitts am anderen, freien Balkenende um die Antipolare des Angriffspunktes von  $F$  in bezug auf die transversale Elastizitätsellipse. Und ein Kräftepaar, dessen Momentenvektor zu dieser Querschnittsebene geneigt ist, erzeugt eine Drehung um den Durchmesser, der zur Parallelen der Spur dieser Ebene auf der Querschnittsebene konjugiert ist. — Durch eine Erweiterung dieses Satzes wird die Verformung und die Spannungsverteilung in einem Balken ermittelt, der an seinen Enden nachgiebig elastisch gelagert und durch ein System von äußeren Kräften belastet ist. *Theodor Pöschl.*

**Lattanzi, Filippo:** Applicazione della teoria dell'ellisse di elasticità trasversale allo studio di un'asta curva elasticamente vincolata agli estremi. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur.*, VIII. Ser. 11, 45—52 (1951).

Weiterführung und Verallgemeinerung der in der Note I (siehe das vorsteh. Referat) gegebenen Entwicklungen. *Theodor Pöschl.*

**Ökubo, H.:** The torsion and stretching of spiral rods. I. *Quart. appl. Math.* 9, 263—272 (1951).

Ausgehend von den elastischen Grundgleichungen wird das Problem der symmetrisch beanspruchten Spiralfeder behandelt. Der Lösungsgang beruht auf der Einführung von Schraubenkoordinaten. Die Symmetrie gestattet die Elimination einer Koordinate. Die weitere Rechnung enthält sinngemäß Vernachlässigungen von Gliedern, welche Potenzen des Steigungsparameters enthalten, und führt auf ähn-

liche Beziehungen, wie sie bereits Göhner aufgestellt hat [s. Zbl. für Mech. 5, 251 u. 295 (1937); 11, 159 (1942)]. Diese Arbeiten waren dem Verf. offenbar nicht bekannt.

*H. Neuber.*

**Craggs, J. W.:** The influence of compressibility in elastic-plastic bending. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 241—247 (1951).

In der klassischen Biegetheorie eines Stabes mit Endmomenten stellt sich als Folge des Hookeschen Gesetzes heraus, daß alle Spannungskomponenten mit Ausnahme der Längsspannung verschwinden. Verf. untersucht, ob diese Erscheinung auch im Falle des elastoplastischen Zustandes erhalten bleibt und benutzt hierzu ein vereinfachtes elastoplastisches Problem. Es stellt sich hierbei heraus, daß auch quervergerichtete Normalspannungen auftreten.

*H. Neuber.*

**Sevčenko, K. N.:** Das axialsymmetrische elasto-plastische Problem für eine Platte, die durch eine kreisförmige Öffnung geschwächt ist. Priklad. Math. Mech. 15, 519—520 (1951) [Russisch].

Für eine Platte, welche innerhalb einer kreisförmigen Öffnung achssymmetrisch belastet ist, wird der elastoplastische Spannungszustand berechnet. Die Volumenänderung wird vernachlässigt und ein lineares Verfestigungsgesetz angenommen. Hinsichtlich ihrer äußeren Berandung wird die Platte als unendlich groß angesehen. Die Integration erfolgt im Anschluß an eine frühere Arbeit des Verf. in Parameterdarstellung. Unter Beachtung der Kontinuität der Spannungskomponenten beim Übergang vom elastischen zum plastischen Verhalten des Werkstoffes werden die Konstanten bestimmt.

*H. Neuber.*

**Geiringer, Hilda:** On the plane problem of a perfect plastic body. Quart. appl. Math. 9, 295—308 (1951).

Für den idealplastischen Körper wird durch Einführung einer Parameterdarstellung das ebene Gleichgewichtsproblem zunächst allgemein für isotrope Fließbedingung, anschließend für die Fließbedingungen von Mises, Saint-Venant u. a. integriert. Der Verlauf der charakteristischen Kurven wird diskutiert. Es war Verf. offenbar nicht bekannt, daß die vollständige Lösung des ebenen Plastizitätsproblems für beliebiges isotropes und anisotropes Fließgesetz bereits im Jahre 1949 vom Ref. gegeben wurde (dies. Zbl. 33, 29). Schließlich wird das Problem der Wellenausbreitung unter vereinfachenden Annahmen behandelt.

*H. Neuber.*

**Nye, J. F.:** The flow of glaciers and ice-sheets as a problem in plasticity. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 207, 554—572 (1951).

Untersuchung der Verteilung der Spannungen und der Geschwindigkeiten in einem ideal-plastischen Gletscher und einer solchen Eisschicht. Es wird angenommen, daß das Eis eine konstante Fließspannung aufweist und ähnlich wie andere polykristalline plastische Stoffe den Lévy-Misesschen oder den Trescaschen Fließbedingungen genügt. Die erhaltene Lösung bezieht sich auf einen zweidimensionalen Fließvorgang einer langen Platte über einen schwach-welligen Abhang. Es wird ein aktiver und ein passiver Fließzustand unterschieden, entsprechend der Rankine'schen Unterscheidung in aktiven und passiven Erddruck, und ein einfacher algebraischer Ausdruck für das Auftreten des einen oder anderen angegeben, der von der relativen Krümmung des Gletscherbettes abhängt. Beispiele und Schriftenverzeichnis.

*Theodor Pöschl.*

**Volterra, Enrico:** On elastic continua with hereditary characteristics. J. appl. Mech. 18, 273—279 (1951).

Die bekannte Bewegungsgleichung eines eingliedrigen Schwingers mit „nachwirkender“ Dämpfung wird erweitert für den Fall eines dreidimensionalen Körpers mit allgemeinem linearen Spannungs-Dehnungs-Gesetz mit einer solchen Dämpfung, ferner auf den Fall der freien radialen Schwingungen einer isotropen Kugel, auf die freien Schwingungen von flexiblen Fäden und auf die Querschwingungen von Stäben mit verschieden gelagerten Enden, sowie von rechteckigen und kreisförmigen Membranen übertragen.

*Theodor Pöschl.*



**Aržanyč, I. S.:** Die Fundamentalintegrale der Gleichung der Dynamik eines elastischen Körpers. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 513—516 (1951) [Russisch].

Die bekannte Bewegungsgleichung der klassischen Elastizitätstheorie wird bei zwei verschiedenen Randbedingungen hinsichtlich der Zeit einer Laplacetransformation unterworfen, worauf es gelingt, für die Variablen Integralgleichungen aufzustellen. Dabei kann es sich sowohl um das Innere eines einfach zusammenhängenden Bereiches handeln wie um das Äußere. Als gesuchte Variable dienen rotor und divergenz.

*Georg Hamel.*

**Koiter, W. T.:** On Grammel's linearisation of the equations for torsional vibrations of crankshafts. Nederl. Akad. Wet., Proc., Ser. B 54, 464—467 (1951).

Es wird gezeigt, daß in der von Grammel [Z. angew. Math. Mech. 15, 47 (1935)] durchgeführten Linearisierung der Torsionsschwingungsgleichungen für Kurbelwellen zwei Glieder fehlen, die von der gleichen Größenordnung sind wie der Anteil, der die Schwankungen der Drehmassen berücksichtigt, die also nicht von vorn herein vernachlässigt werden dürfen. Es ist daher zu befürchten, daß das Grammelsche Vorgehen zu fehlerhaften Ergebnissen führt, sobald die Schwankungen der Drehmassen nicht mehr vernachlässigbar sind. Indessen zeigt die nähere Untersuchung, daß sich die fraglichen Glieder, die jedes für sich genommen ins Gewicht fallen, zusammen in erster Näherung gerade gegenseitig aufheben, so daß die Grammelsche Theorie letzten Endes doch wieder zum richtigen Ergebnis führt.

*Rudolf Zurmühl.*

**Pieruschka, E.:** Stoffgesetze und Wellen zähelastischer, isotroper Medien. Ingenieur-Arch. 19, 271—281 (1951).

Durch Einführung eines allgemeinen Spannungstensors werden unter Verwendung der Bezeichnungen der Tensorrechnung die dynamischen Grundgleichungen für zähelastische Stoffe aufgestellt und durch Einführung der Beziehungen des Spannungstensors zum Verzerrungs- und Verzerrungsgeschwindigkeitstensor in verschiedener Weise spezialisiert. Geeignet ausgeführte Grenzübergänge ergeben dann die bekannten Stoffgesetze, und zwar das Newtonsche, das Gesetz für strömende rein-elastische Stoffe, das Hookesche, das Maxwell-Frommsche Stoffgesetz, ein Gesetz, das durch eine synthetische Überlagerung von elastischen und plastischen Verzerrungen gewonnen wird, und schließlich ein Stoffgesetz, bei dem der Deformations-Geschwindigkeits- und Beschleunigungstensor Beiträge zum Spannungstensor liefern. — Im letzten Abschnitt werden in ähnlicher Auffassung die Wellen in zähelastischen isotropen Stoffen behandelt, wobei sich als Planwellen die Kompressions- oder Longitudinalwellen und die Scherungs- oder Transversalwellen ergeben, die eingehend diskutiert werden.

*Theodor Pöschl.*

**Oldroyd, J. G.:** The motion of an elastico-viscous liquid contained between coaxial cylinders. I. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 271—282 (1951).

Ähnlich wie in anderen Arbeiten des Verf. wird die periodische und stationäre Bewegung einer zäh-elastischen Flüssigkeit durch einen engen ringförmigen Bereich zwischen zwei langen coaxialen Zylindern untersucht, wobei die Materialeigenschaften bei kleinen Gleitungen durch drei Konstanten, einen Zähigkeitskoeffizienten und zwei Relaxationszeiten festgelegt werden. Im besonderen werden oszillatorische Bewegungen des äußeren gegen den inneren Zylinder betrachtet, der an einem tordierten Draht aufgehängt ist. Aus Beobachtungen der Frequenzen und der Amplituden-Verhältnisse können die Materialkonstanten der Flüssigkeit bestimmt werden.

*Theodor Pöschl.*

**Schwarzl, F.:** Näherungsmethoden in der Theorie des viscoelastischen Verhaltens. I. Physica 17, 830—840 (1951).

Das Verhalten linear-viscoelastischer Stoffe wird i. a. durch ein System verwickelter Gleichungen beschrieben, die Integraltransformationen enthalten und da-

her nicht auf experimentell gewonnene Kurven angewendet werden können, die nur graphisch definiert sind. Mittels einer von Alfrey (High Polymers 6) angegebenen Näherung wird eine einfache Lösung erhalten. Durch Differentiation der Kriechkurve bzw. der Relaxationskurve können sowohl das „Verzögerungsspektrum“ als auch das „Relaxationsspektrum“ erhalten werden, ohne den  $E$ -Modul zu verwenden.

*Theodor Pöschl.*

**Schwarzl, F.: Näherungsmethoden in der Theorie des visco-elastischen Verhaltens. II.** *Physica* 17, 923—929 (1951).

Das Begriffssystem der viscoelastischen Theorie wird ergänzt durch eine Näherungsgleichung für die Berechnung der Spektra aus den imaginären Komponenten der komplexen „Nachgiebigkeit“ (compliance) und des Dämpfungsmoduls. Die Entwicklungen des Verf. werden in Verbindung gebracht mit den von Maxwell und Lord Kelvin eingeführten „Elementen“. Die wichtigsten Ergebnisse sind: Die Kriechkurve verläuft parallel zum Realteil der „Compliance“, und zwar etwas oberhalb von dieser, und die Relaxationskurve ist parallel zum Realteil des Dämpfungsmoduls, und zwar etwas unterhalb davon.

*Theodor Pöschl.*

**Horio, M. and S. Onogi: Forced vibration of reed as a method of determining viscoelasticity.** *J. appl. Phys.* 22, 977—981 (1951).

Von den Methoden zur akustischen Messung von physikalischen Eigenschaften für hoch-polymere Stoffe hat sich seit einigen Jahren die der erzwungenen Schwingungen von Stäben als vorteilhaft erwiesen; dabei ist das eine Ende der Stäbe frei, während das andere eingespannt und zu sinusförmigen Biegeschwingungen angeregt wird. Die für diesen Fall geltende Differentialgleichung wird in der Form angesetzt  $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + E_1 \kappa^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \eta \kappa^2 \frac{\partial^5 y}{\partial x^4 \partial t} = 0$ , worin  $\rho$  die Dichte,  $E_1$  den Elastizitätsmodul,  $\eta$  den Zähigkeitskoeffizienten und  $\kappa$  den Trägheitshalbmesser des Querschnitts um die Biegeachse bedeuten. Das letzte Glied kommt dadurch zustande, daß der Einfluß der Zähigkeit proportional der Geschwindigkeit  $\partial y / \partial t$  der Biegeschwingungen gesetzt wird. Es werden die Resonanz-Frequenzen und -Bandbreiten der Frequenzkurven in einem Bereich von 10 bis 500 Hertz beobachtet und befriedigende Übereinstimmungen festgestellt.

*Theodor Pöschl.*

**Truesdell, C.: A new definition of a fluid. II. The maxwellian fluid.** *J. Math. pur. appl.*, IX. Sér. 30, 111—158 (1951).

(Teil I s. dies. Zbl. 38, 380.) Zunächst eine ausführliche historische Einleitung mit einer kritischen Würdigung der zahlreichen Versuche, die klassische Theorie von Navier und Stokes zu verallgemeinern. Dann Angabe der bestimmenden Gesichtspunkte, insbesondere eines Prinzips von Brillouin. Der Standpunkt ist ein rein phänomenologischer unter Ausschluß molekulartheoretischer Überlegungen. Isotropie wird nicht vorausgesetzt, nur als Sonderfall behandelt. Wesentlich ist, daß nur drei dimensionsbehaftete Konstante vorkommen dürfen, eine der Zähigkeit, eine der Wärmeleitung und eine Normaltemperatur, und daß Richtigkeit in den Dimensionen beachtet wird, was einige Vorgänger versäumt haben. Die Maxwell'sche Flüssigkeit wird dann dadurch definiert, daß Spannung und Wärmestrom Funktionen der genannten drei Konstanten sind, ferner von Druck und Temperatur und dann vor allem von allen räumlichen Ableitungen von Druck, Temperatur und Geschwindigkeit; endlich noch von der räumlich verteilten Kraft. Wichtig ist noch, daß beim Verschwinden der Vektoren und Tensoren der Spannungstensor sich auf den Druck, der Wärmestrom sich auf Null reduziert. Zur Beherrschung des großen Apparates wird Entwicklung in Potenzreihen vorausgesetzt.

*Georg Hamel.*

**Gross, B. and H. Pelzer: On creep and relaxation. III.** *J. appl. Phys.* 22, 1035—1039 (1951).

Im Anschluß an zwei vorhergehende Noten *ibenda* 18, 212 (1947), 19, 257



(1948)] wird die Theorie des linearen reversiblen Kriechens erweitert, wobei auch plastische Verformungen herangezogen werden. Zwischen den Verteilungsfunktionen und den Relaxationszeiten der Spannungen und Dehnungen werden allgemeine Beziehungen aufgestellt, wobei die Hilfsmittel der Laplace-Transformation und der Mittag-Lefflerschen Funktion verwendet werden. Insbesondere wird gezeigt, wie die Existenz einer plastischen Komponente die Verteilungsfunktion der Relaxationszeiten beeinflusst.

*Theodor Pöschl.*

## Hydrodynamik:

● **Pröll, Arthur:** Grundlagen der Aeromechanik und Flugmechanik. Wien: Springer-Verlag 1951. XIV, 612 S. 278 Textabb. DM 48.—.

Seinem Titel entsprechend gliedert sich das Buch in zwei, ihrem Umfange nach nahezu gleich große Teile. Der erste, aerodynamische Teil beginnt mit einer Erörterung der physikalischen Grundbegriffe. In den drei folgenden Abschnitten wird dann die reibungslose Potentialströmung inkompressibler Medien behandelt. Dabei wird die bekannte, meist stationär und eben vorausgesetzte Hydrodynamik in korrekter, leicht faßlicher Weise aufgebaut. Dann folgt ein Abschnitt über Reibungseinflüsse, ein Abschnitt über Tragflügeltheorie und ein letzter Abschnitt über Gasdynamik. Der flugmechanische Teil ist wie folgt gegliedert. Nach einem Abschnitt über die Grundbegriffe werden zunächst die Flugleistungen behandelt. Hier wird auch die Theorie der Luftschraube gebracht. Dann kommen Geschwindigkeits-, Steig- und Sonderleistungen an die Reihe. Die letzten drei Abschnitte bringen nichtstationäre Flugzustände, statische Stabilität und dynamische Stabilität der Flugzeuge. — Der Zielsetzung des Verf. entsprechend umfaßt das Buch den Geschwindigkeitsbereich bis etwa zur halben Schallgeschwindigkeit. Der Inhalt umfaßt dabei das Wissen zur Zeit des Kriegsendes, und Verf. stützt sich im wesentlichen auf deutsche Autoren. Das Buch wird also vor allem jenen Lesern gute Dienste leisten, die in die Aeromechanik oder in die Flugmechanik der niederen Geschwindigkeit eingeführt werden wollen, und jenen Fachmännern des In- und Auslandes, welche sich über die Arbeiten in Deutschland etwa bis zum Ende des letzten Krieges unterrichten wollen. — Gewisse Wünsche sind allerdings noch offen geblieben. Mit der Bedeutung des Pfeil- und Dreieckflügels bei Schallgeschwindigkeit ist auch jene bei niedrigerer Geschwindigkeit stark gewachsen. Eine kurze Darstellung der einfachen Theorie von R. T. Jones für tragende Dreiecke und des unendlichen schiebenden Flügels wäre sehr willkommen gewesen. Ebenso hätten viele ein kurzes Eingehen auf die aeroelastischen Problemstellungen und auf das Flattern begrüßt. Weitere Wünsche liegen dem Ref. besonders betreffs des kurzen Abschnittes über Gasdynamik am Herzen. Die Definition der Machzahl als Verhältnis von Flug- und Schallgeschwindigkeit (S. 10) ist zu speziell, zumal diese Definition später (S. 293 u. 294) nicht konsequent aufrecht erhalten wird. Bei Angaben über die Schallgeschwindigkeit und Maximalgeschwindigkeit wird neben der Temperatur überflüssigerweise auch der Druck angegeben (etwa Abb. 145). Ausdrücke wie „Energieverlust“ oder „Zusammenbruch der Potentialströmung“ (S. 317 oben) werden besser vermieden, wenn der Platz für eine ausführliche Erläuterung fehlt, da sonst nur falsche Vorstellungen geweckt werden. Den praktischen Rechnungen liegen bis zu hohen Überschallgeschwindigkeiten ja doch fast ausschließlich Potentialströmungen zugrunde, auch wenn nicht linearisiert wird. Bei den Kanaltypen (S. 321) sollten auch die Injektorkanäle erwähnt werden. Abb. 159 ist irreführend, da sie einer Doppelflügelordnung entstammt. Bei dieser Gelegenheit auch gleich der unvermeidliche Druckfehlerteufel: Bei der Angabe des Druckmittelpunktes auf S. 315 ist ein Versehen unterlaufen. In Gl. (23, 10) gehört  $\Phi$  anstatt  $\Psi$ . In Abb. 224 sind 2 Höhenangaben vertauscht. — Im übrigen ist die Wiedergabe des Stoffes, die Darstellung und Gruppierung, die Anordnung der Gleichungen und Bilder sehr klar und übersichtlich. Das Buch ist als eine Zusammenfassung der schon klassisch gewordenen Gebiete seines Titels sehr zu begrüßen und zu empfehlen.

*Klaus Oswatitsch.*

**Gotusso, Guido:** Un principio variazionale in idrodinamica piana. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 10, 130—132 (1951).

Es sei  $\psi$  die Stromfunktion einer ebenen Strömung und  $\Delta\psi = -F'(\psi)$ . Verf. zeigt, daß für die tatsächlich auftretende Strömung die Funktion  $T - K$  einen stationären Wert hat, wobei  $T$  die kinetische Energie ist und  $K$  die Funktion bedeutet:  $K = \varrho \int_{\sigma} F d\sigma = -\varrho \int_{\sigma} d\sigma \int \Delta\psi d\psi$ , und bemerkt, daß das zu variierende

Integral eine Erweiterung des Dirichletschen darstellt.

*Theodor Pöschl.*

**Muggia, Aldo:** Sul calcolo dell'interferenza elica-ala. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl. Sci. fis. mat. natur., VIII. Ser. 11, 53—57 (1951).

Der Einfluß eines drallfreien Schraubenstrahles auf einen Tragflügel wird für den Fall betrachtet, daß der Schraubenstrahl in der Mitte vom Tragflügel geschnitten wird und in Spannweitenrichtung völlig symmetrische Verhältnisse vorliegen. Für die Berechnung der Auftriebsverteilung aus der Prandtl'schen Tragflügelgleichung wird ein dem „Multhoppverfahren“ (1938) völlig entsprechendes Verfahren entwickelt, bei dem die Integralgleichung nur für eine beschränkte Anzahl von passend gewählten Punkten erfüllt wird.

Walter Wuest.

Müller, W.: Längsbewegung eines Rotationskörpers in der Flüssigkeit. Ingenieur-Arch. 19, 282—295 (1951).

Man erhält bekanntlich das Geschwindigkeitsfeld um geschlossene Rotationskörper, indem man auf der Achse eine Quell- und Senkenverteilung annimmt, deren Gesamtergiebigkeit längs der Belegungsstrecke verschwindet. Während sich aber Fuhrmann in seiner grundlegenden Arbeit (1911) auf eine Zusammenfassung von einfachen Quell- und Senkenelementen, vor allem Quell- und Senkenpunkten sowie Quell- und Senkenstrecken mit abschnittsweise konstanter oder linear veränderlicher Stärke beschränkte, wird das Verfahren in der vorliegenden Arbeit auf stetige Quellverteilungen erweitert. Um einen möglichst gleichmäßigen Druckverlauf zu erhalten, empfiehlt es sich, hierbei stetige Funktionen zu wählen, deren Ableitungen sich auch stetig verhalten. Die mathematische Behandlung gestaltet sich besonders übersichtlich, wenn man gleichzeitig Ellipsoidkoordinaten  $\zeta$ ,  $\mu$  und bei der weiteren Ausgestaltung der Rechnung Kugelfunktionen verwendet. Alle Ausdrücke sind nach diesen in endlicher Form entwickelbar, wenn die Quellverteilung durch eine ganze rationale Funktion darstellbar ist. Fast alle benötigten Ausdrücke können auf die neu eingeführten Funktionen  $P_\nu$ ,  $Q_\nu$ , zurückgeführt werden, die mit den zugeordneten Kugelfunktionen durch die Beziehungen

$$P_\nu = \sqrt{1 - \mu^2} P_\nu^1; \quad Q_\nu = \sqrt{\zeta^2 - 1} Q_\nu^1$$

verknüpft sind. Zur praktischen Handhabung der Rechnung werden für diese überstrichenen Funktionen Formeln angegeben und für die  $Q_\nu$  numerische Werte für  $\nu = 1 \dots 5$  und Argumentwerte  $\zeta = 1,000$  bis  $1,050$  (Schrittweite  $0,001$ ) zusammengestellt. — Im zweiten Teil der Arbeit wird das Verfahren auf eine Reihe von Beispielen angewandt, insbesondere auf lineare, quadratische, kubische und biquadratische Verteilungsfunktionen. Im Fall einer kubischen Verteilungsfunktion gibt es eine einfach unendliche Mannigfaltigkeit von Formen, von denen vier Beispiele samt der Druckverteilung zeichnerisch dargestellt werden. Für eine biquadratische Verteilungsfunktion gibt es eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit von Verteilungsfunktionen. Wie Verf. mitteilt, ist eine von ihm und seinem Mitarbeiter Fr. Eser 1944/45 durchgeführte „Systematik der aus einer biquadratischen Quellsenkenverteilung ableitbaren Rotationskörper“ mit etwa 40 Zeichnungen zum größten Teil verloren gegangen. In der vorliegenden Arbeit werden hiervon drei Beispiele abgebildet. Der dritte Teil befaßt sich mit unstetig verteilten Quellen und Senken, insbesondere mit Punktquellen und -senken sowie mit dem Einfluß eines axialen Dipols. In einem Nachwort kündigt Verf. an, daß er nach der gleichen Methode auch die Querbewegung und die Schräganströmung von Rotationskörpern zu untersuchen beabsichtigt, wobei dann zusätzlich eine Verteilung von quergestellten Dipolen hinzutritt.

Walter Wuest.

Davies, C. N. and Mary Aylward: The trajectories of heavy, solid particles in a two-dimensional jet of ideal fluid impinging normally upon a plate. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 889—911 (1951).

Zur Deutung von Messungen an Staubabscheidevorrichtungen wird die Bahn von festen Partikeln in einer idealen zweidimensionalen Flüssigkeitsströmung aus einer schlitzförmigen Öffnung gegen eine senkrecht zu ihr in veränderlichem Abstand stehende Platte schrittweise berechnet. In Abhängigkeit vom Verhältnis der Geschwindigkeiten entlang der Platte und im Schlitz wird die Wirksamkeit der Staubabscheidung (Trefferzahl auf die Platte) für verschiedene Teilchengrößen abgeleitet.

Joachim Pretsch.

• Schlichting, H.: Grenzschicht-Theorie. (Wissenschaftliche Bücherei.) Karlsruhe: G. Braun 1951. 295 Abb. 32 Tab. 483 S. DM 45.—.

Die stürmische Entwicklung der Grenzschichtforschung, besonders in den beiden letzten Jahrzehnten, kam durch eine kaum noch zu überblickende Flut von Veröffentlichungen in aller Welt zum Ausdruck. Die umfassenden Darstellungen der Grenzschichttheorie sind veraltet, und so entspricht das neue, stattliche und ausführliche Werk einem ausgesprochenen Bedürfnis. Es gibt die in der Weltliteratur publizierten Fortschritte in übersichtlicher und klarer Darstellung geordnet und nach ihrer Tragweite bewertet wieder. Dabei sind die während des letzten Krieges und danach bis heute erzielten und teilweise schwer zugänglichen Ergebnisse von besonderem Interesse. Noch nicht 50 Jahre seit der Begründung der Grenzschichttheorie durch Ludwig



Prandtl breitet dieses verdienstvolle Werk eine erstaunliche Schau auf die für die Luftfahrtforschung, für die Entwicklung der Strömungsmaschinen, für die Fragen des Wärmeübergangs, für die dynamische Meteorologie und für viele andere Felder der Naturwissenschaft und Technik entscheidenden Ergebnisse vor dem Leser aus. — Inhaltsübersicht: A. Grundgesetze der Strömung einer zähen Flüssigkeit (physikalische Grundlagen, Begriff der Grenzschicht, Navier-Stokessche Gleichungen, deren Eigenschaften und wichtige Beispiele exakter Lösungen, Theorie der schleichenden Strömungen); B. Laminare Grenzschichten (die Grenzschichtgleichungen, ihre Eigenschaften und die bekannten exakten Lösungen im ebenen Fall, rotationssymmetrische und dreidimensionale Grenzschichten, instationäre Grenzschichten, approximative Lösungsmethoden, Grenzschichtbeeinflussung, insbesondere Absaugung der Grenzschicht, Temperaturgrenzschichten in laminarer Strömung, Grenzschichten in kompressibler Strömung). C. Der Umschlag von laminarer zu turbulenter Strömung (Entstehung der Turbulenz als Stabilitätsproblem der laminaren Grenzschichten, Berechnung des Umschlagpunktes, Stabilität bei Grenzschichtabsaugung, Einfluß einer Dichteschichtung, Einfluß der Wandkrümmung und Stabilität gegenüber dreidimensionalen Störungen). D. Turbulente Grenzschichten (Grundzüge und theoretische Ansätze zur Berechnung turbulenter Grenzschichten, die turbulente Rohrströmung, Reibungswiderstand für Platte und rotierende Scheibe, turbulente Reibungsschicht bei Druckabfall und Druckanstieg, Probleme der freien Turbulenz, Verfahren zur Ermittlung des Profilwiderstands). Literaturhinweise nach jedem der 24 Kapitel und am Schlusse des Bandes, ferner zahlreiche Tabellen und eine Fülle ausgezeichnete Figuren. — Es ist das Verdienst des Verf., den außerordentlich umfangreichen und vielschichtigen Stoff in einer geschickt gegliederten, klaren und auf das praktisch Belangvolle besonders bedachten Darstellung bewältigt zu haben. Es wendet sich mit dieser Darstellungsweise freilich in erster Linie an den interessierten Ingenieur in Forschung und Praxis, zugleich an die Studierenden der Ingenieurwissenschaften. Diesen Lesern wird der Zugang zu einem Forschungszweig, der seiner ganzen Entwicklung nach stark von der Theorie her bestimmt wird, erleichtert. Dafür wird der Mathematiker, auch wenn ihm die mathematischen Schwierigkeiten und offenen Probleme der theoretischen Grundlegung und der benutzten Verfahren bekannt sind, beklagen, daß die spärlichen Ansätze zur mathematischen Strenge, etwa die schöne Untersuchung von H. Schmidt und K. Schröder, in dieser umfassenden Darstellung nicht gewürdigt werden. Zwar wird er zugeben müssen, daß eine auf mathematische Strenge bedachte Darstellung verfrüht erschiene, weil auf Schritt und Tritt offene Probleme des Interesses der Mathematiker harren, aber vielleicht gerade deswegen hätte er gehofft, daß dem Leser — auch dem Leser, an den sich das Buch wendet — gelegentlich angedeutet würde, wo und inwiefern die eine oder andere Betrachtung alles andere als mathematisch legal ist. Nun, das wird die Freude an diesem Werk, dessen große Verdienste unbestritten sind, nicht schmälern dürfen. Hoffen wir, daß es auch in die Hand sehr vieler Mathematiker gelangt und damit gewiß auch deren Interesse für ein Anwendungsgebiet erweckt, das nicht nur praktisch höchst wichtig, sondern auch mathematisch besonders reizvoll ist. Es darf nicht unerwähnt bleiben, daß der Druck und die Ausstattung des Werkes hervorragend sind. *Henry Görtler.*

**Howarth, L.: The boundary layer in three dimensional flow. — II. The flow near a stagnation point.** *Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1433—1440 (1951).*

Teil I siehe dies. Zbl. 43, 191. Es werden die dreidimensionalen Grenzschichtgleichungen an einer allgemeinen Körperoberfläche diskutiert. Dabei wird gezeigt, daß diese sich auf ein Paar simultaner gewöhnlicher Differentialgleichungen dritter Ordnung zurückführen lassen, die einen einzigen Parameter  $c$  enthalten, der durch die reibungslose Außenströmung bestimmt wird. Der Parameter  $c$  kann beschränkt werden auf den Bereich  $c = 0$  bis  $c = 1$ , wobei der erste Wert der ebenen Strömung und der letztere dem rotationssymmetrischen Problem des axial angeströmten Rotationskörpers entspricht. Numerische Lösungen sind für die Fälle  $c = 0,25, 0,50, 0,75$  berechnet worden.

*H. Schlichting.*

**Berker, Ratip: Sur l'impossibilité pour un fluide visqueux homogène ou hétérogène d'un mouvement à la Poincot.** *Bull. techn. Univ. Istanbul 3, 61—66 (1951).*

Poincaré bzw. Appell haben gezeigt, daß die Bewegung eines aus reibungsloser homogener bzw. inhomogener Flüssigkeit bestehenden Körpers  $S$ , der sich wie ein starrer Körper verhält, sich bezüglich eines Schwerpunktes  $G$  auf eine gleichförmige Rotation um eine durch  $G$  verlaufende feste Achse reduziert. Verf. zeigt, daß dieser Satz auch dann gültig bleibt, wenn es sich um eine homogene oder inhomogene zähe Flüssigkeit handelt.

*Karl Maruhn.*

**Weil, Herschel: On the extrusion of a very viscous liquid.** *J. appl. Mech. 18, 267—272 (1951).*

Untersuchung der Strömungsvorgänge beim Pressen einer sehr zähen Flüssig-

keit (wie Gummi) beim zweidimensionalen Ausfluß aus einem Bereich in Form einer Halbebene in einen daran angesetzten unendlichen Halbstreifen. Die Vorgänge entsprechen in gewisser Weise dem Durchfluß einer zähen Flüssigkeit durch eine Düse. In den beiden genannten Bereichen und im Übergangsgebiet werden die Stromlinien bestimmt und untersucht, in welcher Weise die Fließvorgänge im Halbstreifen von der Poiseuilleschen Strömung abweichen und inwieweit diese Abweichungen von Bedeutung sind. Es kommt dabei auf die Lösung der biharmonischen Differentialgleichung  $\Delta\Delta\psi = 0$  in den angegebenen Bereichen an, die durch Reihenentwicklungen geleistet und in Form von Kurven und Tabellen dargestellt wird. Als Nebenergebnis werden die ersten komplexen Wurzeln der Gleichungen  $\sin \varphi = \pm 2 \varphi / 3 \pi$  bestimmt.

Theodor Pöschl.

**Squire, H. B.:** The round laminar jet. Quart. J. Mech. appl. Math. 4, 321—329 (1951).

Es wird eine exakte rotationssymmetrische Lösung der Navier-Stokesschen Gleichungen mitgeteilt, und von dieser gezeigt, daß sie die Strömung in einem runden laminaren Strahl darstellt, die schon früher von H. Schlichting (1933) als Lösung der Grenzschichtgleichungen angegeben wurde. Diese Strömung kann auch aufgefaßt werden als die Wirkung einer Kraft in einem Punkt einer zähen Flüssigkeit. Es wird auch das Temperaturfeld einer Wärmequelle angegeben, die sich in der Austrittsöffnung des Strahles befindet.

H. Schlichting.

**Pai, S. I.:** On the stability of two-dimensional laminar jet flow of gas. J. aeronaut. Sci. 18, 731—742 (1951).

Die Stabilität eines ebenen laminaren Strahles ist nach der Methode der kleinen Schwingungen bei inkompressibler und kompressibler Strömung untersucht worden. Hauptergebnisse: a) Für inkompressible Strömung: 1. Bei großen Re-Zahlen sind sowohl symmetrische als auch antisymmetrische Störungen instabil, jedoch liegt der Instabilitätsbereich der symmetrischen Störungen innerhalb des Bereiches der antisymmetrischen. 2. Bei neutralen Störungen ist die Wirkung der Zähigkeit immer stabilisierend. 3. Bei kleiner Wellenzahl und großer Re-Zahl ist der Strahl stets instabil. — b) Für kompressible Strömung: 1. Es besteht ein wichtiger Unterschied zwischen Störungen, die sich relativ zur umgebenden Strömung mit Unter- und Überschallgeschwindigkeit fortpflanzen. Für eine Störung mit Unterschallgeschwindigkeit sind diskrete Eigenwerte vorhanden, so daß eine Stabilitätsgrenze bestimmbar ist. Für Störungen mit Überschallgeschwindigkeit sind die Eigenwerte nicht diskret, so daß keine Stabilitätsgrenze angebbbar ist.

H. Schlichting.

**Meksyn, D. and J. T. Stuart:** Stability of viscous motion between parallel planes for finite disturbances. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 208, 517—526 (1951).

Diese Untersuchung der Stabilität der Laminarströmung zwischen parallelen ebenen Wänden gegenüber Tollmienschen Wellen schließt an eine frühere Arbeit des erstgenannten Verf. an (dies. Zbl. 31, 187) und übernimmt deren Ergebnisse ohne ausführliche Erläuterung. Sie macht einen Vorstoß in Richtung auf Wellen endlicher Amplitude, indem sie neben der bisher studierten linearisierten Störungsgleichung eine nicht linearisierte Mittelwertrelation heranzieht. Die Zulässigkeit der durchgeführten Rechnungen erscheint nicht überzeugend. Verff. finden als ihr Hauptergebnis, daß die kritische Re-Zahl für endliche aber nicht zu große Amplituden kleiner ausfällt als für den Grenzfall sehr kleiner Amplituden.

Henry Görtler.

**Seban, R. A. and R. Bond:** Skin-friction and heat-transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial incompressible flow. J. aeronaut. Sci. 18, 671—675 (1951).

Es wird die inkompressible laminare Strömungsgrenzschicht sowie die Temperaturgrenzschicht auf der Außenseite eines Kreiszylinders berechnet, der in Richtung der Achse angeströmt wird. Diese Rechnungen sollen einen Beitrag geben zu



der Frage, in welchem Maße bei einem Rotationskörper die Grenzschichtentwicklung durch die Wandkrümmung beeinflusst wird. Unter der Annahme, daß an der Vorderkante die Grenzschichtdicke mit Null beginnt, läßt sich die Lösung nach Art einer Blasius'schen Reihe nach Potenzen des Abstandes von der Vorderkante entwickeln, von denen das erste Glied mit der Blasius'schen Lösung für die längsangeströmte ebene Platte übereinstimmt. Die ersten Glieder dieser Reihen werden für die Prandtl-Zahl  $Pr = 0,715$  numerisch berechnet. Die Auswertung für den örtlichen Reibungsbeiwert und den örtlichen Wärmestrom ergibt, daß beide nur sehr wenig durch die Wandkrümmung beeinflusst werden. *H. Schlichting.*

**Kuerti, C.: Boundary layer in convergent flow between spiral walls.** J. Math. Physics 30, 106—115 (1951).

Ein allgemeiner Beweis, daß die Lösungen der Prandtl'schen Grenzschichtgleichungen die asymptotischen Lösungen der Navier-Stokesschen Gleichungen für große Reynoldssche Zahlen  $R$  sind, ist bisher nicht erbracht worden. Verf. führt den Beweis für eine bereits von Hamel [J.-Ber. Deutsch. Math.-Verein. 25, 34—60 (1916)] betrachtete Klasse ebener Senkenströmungen zwischen zwei logarithmischen Spiralen als Wand. Eine Lösung der Differentialgleichung

$$z'' + 2a z' + 4m^2 z - m^3 R z^2 + C = 0 \quad (a = 2m\sqrt{1-m^2}, \quad 0 < m \leq 1)$$

mit den Anfangswerten  $z(0) = 1$ ,  $z'(0) = 0$ , wobei  $z(\vartheta)$  die (dimensionslose) Geschwindigkeit abhängig vom Polarwinkel  $\vartheta$ ,  $\arccos m$  den Spiralwinkel und  $C$  eine Integrationskonstante bedeutet, liefert eine solche Kanalströmung, wenn zwei positive Zahlen  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  mit  $\theta = \theta_1 + \theta_2 < 2\pi$  existieren, so daß  $0 < z \leq 1$  für  $-\theta_1 < \vartheta < \theta_2$  und  $z(-\theta_1) = z(\theta_2) = 0$  gilt, wofür  $c = 4m^2 - m^3 R + C > 0$  notwendig und hinreichend ist. Durch passende Wahl von  $C$  läßt sich für alle genügend großen  $R$  jede vorgegebene „Kanalbreite“  $\theta$  erzielen. Angelpunkt der asymptotischen Betrachtungen ist die für große  $R$  gültige Beziehung

$$z' = 2a x K \pm x^{\frac{1}{2}} \{ x [\frac{2}{3} m^3 R (3-x) + 4(a^2 K^2 - m^2) + 2c]^{1/2}, \quad 0 \leq K \leq 1, \quad x = 1 - z.$$

*Johannes Weissinger.*

**Howarth, L.: Note on the boundary layer on a rotating sphere.** Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1308—1315 (1951).

Es wird die laminare Strömung in der Umgebung einer in ruhender Flüssigkeit rotierenden Kugel berechnet. Das System der Differentialgleichungen dieser dreidimensionalen Grenzschichtströmung ist für die unmittelbare Integration zu schwierig. Es wird deshalb das von Kármán'sche Näherungsverfahren angewendet (Impulsverfahren). Die Strömung ist von der Art, daß durch die Zentrifugalkräfte in der „mitgerissenen“ Grenzschicht die Flüssigkeit von den Polen zur Äquatorebene befördert wird. Am Äquator treffen die von den beiden Hemisphären kommenden Reibungsschichten aufeinander und fließen in der Äquatorebene nach außen ab. Doch kann dieses Abfließen nicht rechnerisch verfolgt werden, da in der Nähe der Äquatorebene die Grenzschichtgleichungen ihre Gültigkeit verlieren.

*H. Schlichting.*

**Szablewski, W.: Berechnung der turbulenten Strömung längs der ebenen Platte.** Z. angew. Math. Mech. 31, 309—324 (1951).

Auf Grund des Prandtl'schen Schubspannungsansatzes werden die Differentialgleichungen für die turbulente Grenzschicht an einer längsangeströmten Platte in zwei Schritten von der Wand her integriert und die so erhaltene Lösung als Näherung für den übrigen Bereich der Grenzschicht nach dem Innern der Flüssigkeit herangezogen. Danach wird die Verteilung der Längs- und Querkomponenten der Geschwindigkeit berechnet und eine Formel für den Widerstand der Strömung aufgestellt. Bei geeigneter Wahl der empirischen Koeffizienten der Theorie ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen. *Theodor Pöschl.*

Sen, N. R.: On Heisenberg's spectrum of turbulence. Bull. Calcutta math. Soc. 43, 1—7 (1951).

Nach Ansätzen von G. J. Taylor und W. Heisenberg können die Eigenschaften der isotropen Turbulenz mittels einer Spektrumfunktion  $F(k, t)$  dargestellt werden, welche die Verteilung der Turbulenzenergie auf die Wellenzahlen angibt, die den Schwankungen der Geschwindigkeit bei der Turbulenz entsprechen. In der vorliegenden Note wird ein allgemeinerer Typus einer Lösung der für die Funktion  $F$  geltenden Integralgleichung angegeben und diskutiert. Die Beziehungen zu anderen neueren Arbeiten werden erörtert. Theodor Pöschl.

Rotta, J.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. II. Z. Phys. 131, 51—77 (1951).

Als Ergänzung der Untersuchungen der 1. Mitteilung (dies. Zbl. 43, 433) kann man aus den Navier-Stokesschen Bewegungsgleichungen auch eine Differentialgleichung für die mittleren Abmessungen der Turbulenzelemente herleiten. Eine solche Beziehung vervollständigt die bisherigen Untersuchungen zu einem lösbaaren Differentialgleichungssystem, mit dessen Hilfe die Berechnung turbulenter Strömungen grundsätzlich möglich ist. Die Anwendung auf das Beispiel der voll ausgebildeten Strömung zwischen parallelen Wänden und der Vergleich mit Versuchsergebnissen läßt darauf schließen, daß der Mechanismus der Turbulenz qualitativ richtig erfaßt wird. (Autoreferat.)

Kampé de Fériet, J. and R. Betchov: Theoretical and experimental averages of turbulent functions. Nederl. Akad. Wet., Proc. Ser. B 54, 389—398 (1951).

Die Rechenregeln, die für die Mittelwertbildung bei turbulenten Strömungen nach Reynolds benutzt werden, können auf vier Axiome zurückgeführt werden. Es wird nun untersucht, inwieweit Meßergebnisse, die entweder als Mittelwerte oder als Schwankungsgrößen einer turbulenten Strömung interpretiert werden, durch einen Prozeß gewonnen worden sind, der mit den vier Axiomen verträglich ist. Die Verfahren, die meßtechnisch für die Mittelwertbildung einer Funktion  $f$  benutzt werden, entsprechen einem elektrischen Tiefpaßfilter und führen auf die

Definition  $f = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-s) f(s) ds$ , wobei der Kern  $K$  noch von der speziellen Ausbildung des Filters abhängt. Diese Definition erfüllt aber nur drei der „Reynolds-Axiome“, während das 4. Axiom nur näherungsweise erfüllt wird unter der Voraussetzung, daß die Energie der Schwankungsgröße  $f(t)$  von Wellenzahlen herührt, die viel größer als  $1/\tau$  sind ( $\tau$  ist eine elektrische Zeitkonstante des Tiefpaßfilters). Walter Wuest.

Stewart, R. W. and A. A. Townsend: Similarity and self-preservation in isotropic turbulence. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 243, 359—386 (1951).

Um die Zulässigkeit und die Anwendungsgrenzen der verschiedenen theoretischen Annahmen bei isotroper Turbulenz zu überprüfen, haben Verff. im turbulenzarmen Windkanal des Nat. Phys. Labor. in Teddington und an anderer Stelle neue systematische Messungen hinter turbulenz erzeugenden Gittern verschiedener Formen (quadratische Maschengitter, Gitter aus parallelen Zylindern und jalousieartigen parallelen Platten) durchgeführt. Die Messungen betrafen longitudinale Zweifach- und Dreifachkorrelationen, die Spektren der longitudinalen Geschwindigkeitsschwankungen und das Abklingen der Turbulenz hinter Gittern bei Reynoldsschen Zahlen (mit der Maschenweite gebildet) von 2000 bis 100 000. Die Meßergebnisse zeigen, daß die Bedingungen für die Existenz einer „lokalen Ähnlichkeit“, wie sie von A. N. Kolmogoroff eingeführt und von Heisenberg u. a. weitergeführt wurde, bei gewöhnlichen Reynoldsschen Zahlen nur für außerordentlich kleine Turbulenzelemente erfüllt werden. Damit hängt auch die bereits früher (Batchelor und Townsend 1949) festgestellte Tatsache zusammen, daß gewisse Turbulenzparameter von der Reynoldsschen Zahl abhängen, weil sie wesentlich durch Teile des Turbulenzspektrums beeinflusst werden, die außerhalb des Gleichgewichtsbereiches liegen. Die Messungen zeigen ferner, daß keines der bisher angenommenen Potenzgesetze eine ausreichende Darstellung der asymptotischen Form des Spektrums bei großen Wellenzahlen ergibt. Vielmehr nimmt der Wert  $n = -d(\log E)/d(\log k)$  beständig zu und übersteigt 10 anstatt entsprechend



der Theorie den Wert 7 anzunehmen. Die beste Annäherung für das Energiespektrum  $E$  findet man durch die empirische Funktion  $E \sim k^{-0.1 \log k}$  für genügend große Wellenzahlen  $k$ . Ein von Obukhov (1941) vorgeschlagener Ansatz für die Energieübertragungsfunktion  $S(k, t)$  erweist sich als physikalisch unmöglich, während ein Ansatz für  $\bar{S}(k, t)$ , der nur von der Spektralfunktion  $E(k, t)$  und von  $k$  abhängt (Kovaszny 1948), durch die Messungen nicht bestätigt wird. In der Anfangsperiode des Abklingens ist der größere Teil des Energiespektrums „self-preserving“ (d. h. ein Längen- und Geschwindigkeitsmaßstab bestimmt ein gewisses Turbulenzfeld, während bei der Hypothese der „similarity“ jedes beliebige Turbulenzfeld hierdurch bestimmt wird) und auch unabhängig von der Geometrie des turbulenz erzeugenden Gitters. Immerhin enthält derjenige Teil des Spektrums, der nicht „self-preserving“ ist, ein Drittel der Gesamtenergie, so daß alle Theorien, die ein „Quasi-Gleichgewicht“ während des Abklingens fordern, mit einiger Vorsicht zu betrachten sind.

Walter Wuest.

**Schwarz-Bergkampff, Erich:** Ableitung von Modellgesetzen für die typischen Strömungsarten und ihre Anwendung in der Technik. Acta phys. Austr. 5, 123—128 (1951).

Verf. versucht im Nachgang zu einer früheren Mitteilung [Berg- und Hüttenm. Monatsheft 88, 138 (1940)], allgemeine Beziehungen zwischen Grashof-Zahl, Reynolds-Zahl, Nusselt-Zahl und Prandtl-Zahl aufzustellen, die für „weite Bereiche“ der laminaren und der turbulenten Strömung gelten sollen.

Joachim Pretsch.

**Taylor, Sir Geoffrey:** Analysis of the swimming of microscopic organisms. Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 209, 447—461 (1951).

Viele mikroskopische Organismen wie z. B. Samenfäden oder bestimmte Bakterienarten bewegen sich in der Flüssigkeit, in der sie leben, durch schlängelnde Bewegungen des Rumpfes oder eines Schwanzes fort. Da für diese Fortbewegung die Reynoldssche Zahl  $R = v l \rho / \mu$ , also das Verhältnis von Trägheitskräften zur Zähigkeitsspannung, sehr klein ist — von der Größenordnung  $10^{-3}$  —, können die Trägheitskräfte vollkommen vernachlässigt werden. Dies gilt um so mehr für periodische Bewegungen, für welche Verf. eine instationäre Reynolds-Zahl  $n l^2 \rho / \mu$  (etwa  $10^{-6}$  für Spermatozoen) definiert, wo  $n$  die Schwingungsfrequenz. Wenn nicht versucht wird, den Vorwärtsschub vom Widerstand in der Flüssigkeit zu trennen, dann verschwindet bei dem vorliegenden Problem der Fortbewegung durch Zähigkeitsspannungen des Mediums eine Schwierigkeit, auf die schon Stokes hingewiesen hat und die die Möglichkeit einer solchen Fortbewegung verneint. Die erste, für kleine Amplituden  $b$  der Schwanz- bzw. Rumpfbewegung gültige Lösung, die Taylor diskutiert, gibt auch tatsächlich keinen Vortrieb. Die zweite Lösung, die beliebige Amplituden zuläßt und ebenso wie die erste in Näherung zweidimensional behandelt wird, gibt einen Vortrieb des mikroskopischen Organismus mit der Geschwindigkeit  $v$  relativ zur Flüssigkeit. Beide Lösungen werden, von der Vorstellung eines in einer zweidimensionalen, in der  $z$ -Richtung unendlich ausgedehnten Strömung in der  $y$ -Richtung schwingenden Blattes ausgehend, gewonnen. Für diese Strömung gilt  $\Delta \psi = 0$ , wo  $\psi(x, y)$  die Stromfunktion. In der zweiten Lösung setzt Verf. für die Bewegungen des den Schwanz usw. ersetzenden Blattes an:  $y_0 = b \sin(kx - \sigma t)$ .  $\sigma$  ist die Geschwindigkeit der transversalen Wellen, die sich in  $x$ -Richtung fortpflanzen;  $k$  die Wellenzahl;  $2\pi/k = \lambda$  die Wellenlänge. Als Randbedingung wird u. a. neben der etwas kompliziert auszudrückenden Annahme, der Unelastizität des Blattes in der Fortbewegungsrichtung ( $x$ -Richtung) gefordert, daß  $v_0 = \partial y_0 / \partial t = -b \sigma \cos(kx - \sigma t) = (\partial \psi / \partial x)_0$  (der Index 0 deutet auf die Blattoberfläche). Für die Stromfunktion  $\psi$  erhält Verf. dann

$$\frac{1}{\sigma} \psi = \sum_{n \text{ ungerade}}^{\infty} (A_n y + B_n) e^{-ny} \sin(kx - \sigma t) n + \sum_{n \text{ gerade}}^{\infty} (C_n y + D_n) e^{-ny} \cdot \cos n(kx - \sigma t) - \frac{v y}{\sigma}.$$

Nach Berechnung der Koeffizienten  $A_n, B_n$  usw. und Ausdrücken dieser sowie der Randbedingungen durch Reihen nach  $b$  ergibt sich schließlich für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit  $v = \frac{2\pi^2 b^2}{x^2} U \left(1 - \frac{19}{4} \cdot \frac{\pi^2 b^2}{\lambda^2}\right)$ , wo  $U \equiv \sigma$ . Für Spermatozoen gilt  $\lambda = 10^{-3}$  cm,  $b = \lambda/4$ ,  $n$

50 Hz;  $\mu = 10^{-2}$ . Aus der Schwanzdicke  $d = 10^{-5}$  cm wird dann von Verf. noch nach der Formel  $16 \mu b n \lambda / d^2$  die mechanische Spannung im Schwanz zu 20 pond/cm<sup>2</sup> berechnet. Zum Schluß zeigt Verf., daß auch das von den Biologen beobachtete Verhalten der Bildung von Aggregaten von Organismen, die „im Takt“ schwingen, strömungsphysikalisch durch Kräfte erklärt werden kann, die eine Phasengleichung eng nebeneinander schwimmender Organismen erzwingen.

F. Cap.

**Giese, J. H.:** Compressible flows with degenerate hodographs. Quart. appl. Math. 9, 237—246 (1951).

Die Untersuchung betrifft jene speziellen Lösungen, welche im Hodograph von

niedrigerer Dimension sind als im Strömungsraum. Zu den bekannten Beispielen der Prandtl-Meyer-Strömung (der Profilströmung), der kegeligen Strömung, usw. werden Verallgemeinerungen aufgebaut. Die Eigenschaften sind in die Form von Theoremen gefaßt. Verf. macht reichlich Gebrauch von mathematischer Symbolik, wodurch die Darstellung zwar knapp, für den Gasdynamiker jedoch schwer lesbar ist.

*Klaus Oswatitsch.*

**Lawrence, H. R.:** The lift distribution on low aspect ratio wings at subsonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* **18**, 683—695 (1951).

In Anlehnung an E. Reißner (dies. Zbl. **33**, 413) werden zunächst für rechteckige Flügel die gängigen Tragflügelgleichungen aus der (linearisierten) Gleichung der tragenden Fläche in stationärer, inkompressibler Strömung nach einem einheitlichen Prinzip hergeleitet, insbesondere für große Flügelstreckung  $\Lambda$  die Gleichungen von Prandtl und von Weissinger (dies. Zbl. **40**, 112) für den Auftrieb pro Einheit der Spannweite, für kleines  $\Lambda$  die Gleichung von Jones [NACA Rep. **835** (1946)] für den Auftrieb pro Einheit der Tiefe. Während die Gleichungen von Prandtl bzw. Jones im Grenzfall  $\Lambda \rightarrow 0$  bzw.  $\Lambda \rightarrow \infty$  sich von den exakten Grenzgleichungen um einen Faktor 2 unterscheiden, liefert die Weissingersche Gleichung auch für  $\Lambda \rightarrow 0$  die exakte Grenzgleichung. Analog zur Verschärfung der Prandtl'schen Theorie durch Weissinger wird die Gleichung von Jones so verbessert, daß sie auch für  $\Lambda \rightarrow \infty$  die richtige Gleichung liefert. Eine derart verbesserte Gleichung wird nicht nur für den Auftrieb, sondern auch für das Rollmoment pro Tiefeneinheit sowie für beliebige Flügelgrundrisse hergeleitet; überdies wird ein numerisches Lösungsverfahren angegeben. Der danach berechnete Gesamtauftrieb rechteckiger und dreieckiger Flügel unterscheidet sich im Bereiche  $0 \leq \Lambda \leq 2$  praktisch gar nicht, im Bereich  $2 \leq \Lambda \leq 4$  nur sehr wenig von den Weissingerschen Werten. Durch Kombination dieser im Anstellwinkel linearen Theorie mit einem von Flax und Lawrence berechneten, zu  $\alpha^2$  proportionalen Reibungsbeitrag läßt sich eine gute Übereinstimmung des berechneten Gesamtauftriebes mit Messungen an Flügeln kleiner Streckung auch für große  $\alpha$  erzielen. — Zahlreiche numerische Resultate, verglichen mit anderen Theorien und Messungen.

*Johannes Weissinger.*

**Ludford, G. S. S.:** The behavior at infinity of the potential function of a two dimensional subsonic compressible flow. *J. Math. Physics* **30**, 117—130 (1951).

Weiterführung und Vertiefung einer Arbeit von Bergman (dies. Zbl. **32**, 225), ohne deren Kenntnis die Ausführungen schwer verständlich bleiben. Im einzelnen zeigt Verf., daß dem Potential der stationären wirbelfreien inkompressiblen Strömung in Polarkoordinaten, nämlich

$$(1) \quad \varphi(r, \alpha) = q_0 \cdot r \cos(\alpha - \vartheta_0) + \frac{m}{2\pi} \log r + \frac{\Gamma}{2\pi} \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha) \cdot r^{-n}$$

( $q_0$ ,  $\Gamma$ ,  $\vartheta_0$ ,  $m$  Konstante) bei der kompressiblen Strömung das Potential

$$(2) \quad \varphi(r, \alpha) = q_0 \cdot r \cos(\alpha - \vartheta_0) + \frac{m}{2\pi\beta} \log r + \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{ctg}[\beta \operatorname{tg}(\alpha - \vartheta_0)] + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} a_{np}(\alpha) \cdot \left(\frac{\log r}{r}\right)^n \cdot r^{-p}.$$

entspricht. In der logarithmischen bzw. pseudologarithmischen Ebene, definiert durch  $(\vartheta, \lambda)$   $\zeta = \vartheta + i\lambda - \vartheta_0 - i\lambda$ ,  $\lambda = \log q$  bzw.  $\lambda = f(M, \kappa)$ , wo  $\lambda \rightarrow \log q$  für verschwindende Kompressibilität, gehorcht das Potential  $\varphi(\zeta)$  einer linearen bzw. ähnlich einfachen (nicht angegebenen) Differentialgleichung vom Laplaceschen Typ. — Verf. untersucht ausführlich die Singularitäten und das Verhalten der Potentialfunktion im Unendlichen unter steter Betonung der Korrespondenz zwischen (1) und (2), gibt die Übergänge zur physikalischen Ebene ( $x, y$ ) an und leitet schließlich für ein etwas vereinfachtes Potential der Art (2) Formeln für die Luftkräfte vom Kutta-Joukowski-Typ ab.

*F. Cap.*

**Schultz-Piszachich, W.:** Beitrag zur formelmäßigen Berechnung der stationären Geschwindigkeitsverteilung umströmter Drehkörper im Unter- und Überschallbereich. *Österreich. Ingenieur-Arch.* **5**, 289—303 (1951).

Das in einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **43**, 193) für die zweidimensionale Tragflügelströmung eingeführte „Deviationsverfahren“ wird hier in ähnlicher Weise für die Unter- und Überschallströmung um Drehkörper entwickelt. Es ergeben



sich wieder einfache Formeln für die Geschwindigkeitsverteilung, in denen nur noch die analytische Gleichung der Drehkörperkontur einzusetzen ist. Die Untersuchung erstreckt sich sowohl auf achsiale Anblasung wie auch auf Queranblasung. Die inkompressible Strömung wird unter Benützung rotationselliptischer Koordinaten besonders behandelt, wobei von einer Entwicklung des Störpotentials nach Kugelfunktionen ausgegangen wird.

*Robert Sauer.*

**Tomotika, S. and K. Tamada: Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. III.** Quart. appl. Math. 9, 129—147 (1951).

Die Teile I und II (dies. Zbl. 34, 417, 40, 408) behandelten ein hypothetisches Gas, welches ein wirkliches Gas bei isentropischer Strömung in der engeren Nachbarschaft der Schallgeschwindigkeit approximiert. Nunmehr wird ein neues hypothetisches Gas eingeführt, welches einen wesentlich weiteren Approximationsbereich besitzt, indem es im Strömungsfeld sowohl beschränkte Überschallgeschwindigkeiten als auch Staupunkte zuläßt. Verff. gehen aus von der (bekanntlich linearen) Strömungsgleichung in der Hodographenebene, deren unangenehme Koeffizientenbildung durch eine einfachere approximativ ersetzt wird. Die so entstehende Differentialgleichung der Strömung eines hypothetischen Gases erweist sich im weiteren Bereich der bezweckten Approximation analytisch wesentlich leichter zugänglich. Der Separationsansatz führt auf eine Summendarstellung der Lösung in Produkten von Besselschen und trigonometrischen Funktionen. Gewisse geschlossen darstellbare partikuläre Integrale und ihre Singularitäten werden eingehender behandelt. Durch Linearkombination derselben gelingt es, die Umströmung eines symmetrischen Profils, sehr ähnlich einem Kreisbogenzweieck aber mit spitz zulaufender Hinterkante, geschlossen darzustellen. Numerische Auswertungen werden für drei Mach-Zahlen der Anströmung angegeben: 0,717, 0,745, 0,752. (Die von der Lösung gelieferten Profilkonturen unterscheiden sich nur wenig.) Im ersten Fall wird die lokale Schallgeschwindigkeit gerade im Druckminimum-Punkt erreicht, im zweiten Fall ergibt sich ein endliches und regulär durchströmtes Überschallgebiet, das einen nachfolgenden sehr steilen Druckgradienten aufweist, der im dritten Fall dort unendlich wird. Für  $Ma > 0,752$  breiten sich von der Kontur zwei singuläre Linien der Lösung in das Strömungsfeld aus mit entsprechender Mehrdeutigkeit des Strömungsfeldes in ihrer Nachbarschaft, was als Anzeige für das Eintreten eines Verdichtungsstoßes bei  $Ma = 0,752$  anzusehen ist. Vergleiche mit Messungen von H. W. Liepman [J. Aeronaut. Sci. 13, 623—637 (1946)] an einem bikonvexen Kreisbogenprofil zeigen in Anbetracht der nicht ganz damit übereinstimmenden Profilform der Theorie gute Übereinstimmung der theoretischen Ergebnisse mit dem beobachteten Verhalten eines wirklichen Gases. Man kann von diesem neuen Approximationsansatz der Verff. weitere Erfolge erhoffen.

*Henry Görtler.*

**Laitone, E. V.: Concerning Hadamard's solution for a source in supersonic flow.** J. aeronaut. Sci. 18, 775 (1951).

Die Ausführungen von H. Serbin über quellartige Singularitäten in Unter- und Überschallströmung (J. aeronaut. Sci. XVIII, S. 431—432 (1951)) werden kurz ergänzt.

*Klaus Oswatitsch.*

**Dyke, Milton D. van: First- and second-order theory of supersonic flow past bodies of revolution.** J. aeronaut. Sci. 18, 161—178 (1951).

Ausgehend von der vollständigen, in körperfesten Zylinderkoordinaten geschriebenen Gleichung für das Potential der Störgeschwindigkeit einer isentropischen Überschallströmung um einen spitzen Rotationskörper werden die verschiedenen, bisher entwickelten Näherungstheorien nebst größenordnungsmäßigen Abschätzungen der zugehörigen Fehler übersichtlich dargestellt. Insbesondere wird die von v. Kármán, Moore und Tsien behandelte Reduktion auf die Wellengleichung betrachtet, die bei nichtaxialer Anströmung nach Lighthill keine eigentliche Linearisierung bedeutet, wohl aber als erster Schritt („first order theory“) eines Iterationsverfahrens angesehen werden kann, dessen zweiter Schritt („second order theory“) auf die Lösung einer inhomogenen Wellengleichung führt. Bei axialer Anströmung wird für den Kegel eine geschlossene Lösung des second-order-Problems, für andere glatte Körper ein numerisches Lösungsverfahren angegeben, das nach Anwendung einer Abspaltung auch für Körper mit Ecken brauchbar ist; Beispiele zeigen, daß diese Theorie im Gegensatz zur first order theory praktisch exakte Resultate liefert, während die für schlanke Körper entwickelten Theorien, die sich übrigens durch eine abgebrochene Reihenentwicklung aus der first bzw. second order theory gewinnen lassen, für größere Mach-Zahlen und Körperdicken recht ungenau werden. Für Queranströmung (normal zur Körperachse) wird gezeigt, daß die für schlanke Körper üblicherweise vorgenommene Vereinfachung der Randbedingungen auch für größere Machzahlen und Körperdicken keinen wesentlichen Einfluß auf die Ergebnisse der first order theory hat, wohl aber die Vereinfachung der Druckrelation. Mit einer genaueren Druckrelation liefert schon die first order theory gute Ergebnisse, während eine konsequente Linearisierung i. a. katastrophale Folgen hat. Bei schräger Anströmung wird ein gemischtes Verfahren vorgeschlagen: second order theory für die axiale,

first order theory für die normale Komponente. Auch hier läßt sich der Einfluß von Ecken mittels Abspaltung ohne großen Aufwand erfassen. Eine Linearisierung des Anstellwinkels wirkt sich vor allem auf Druckverteilung und Widerstand, weniger auf den Auftrieb aus. Wie Beispiele zeigen, läßt sich durch diese Methode eine wesentlich bessere Übereinstimmung als bisher mit der exakten Theorie sowohl wie dem Experiment erzielen. Die in den Messungen sich zeigende Nichtlinearität des Auftriebs in Abhängigkeit vom Anstellwinkel läßt sich durch Ablösungserscheinungen erklären und durch eine aus der zweidimensionalen Theorie gewonnene Korrektur weitgehend erfassen.

*Johannes Weissinger.*

**Rott, N.:** On the unsteady motion of a thin rectangular wing in supersonic flow. *J. aeronaut. Sci.* 18, 775—776 (1951).

**Miles, John W.:** Transient loading of wide delta airfoils at supersonic speeds. *J. aeronaut. Sci.* 18, 543—554 (1951).

Verf. überträgt seine auf Integraltransformationen beruhende Methode zur Berechnung von Auftrieb und Moment eines in (linearisierter) Überschallströmung harmonisch schwingenden Dreiecksflügels (Naval Ordnance Test Station Report, Inyokern, Calif, Techn. Mem. RRB-36, 1949) auf den Fall sprunghafter Störungen, bei denen also der Abwind an der Stelle  $(x, y)$  des Flügels zur Zeit  $t = t_0(x, y)$  eine sprunghafte Änderung erfährt. Die zunächst allgemein entwickelte Methode wird angewandt auf den Fall einer plötzlichen Anstellwinkeländerung, einer scharf begrenzten Bö konstanter Geschwindigkeit, einer impulsförmigen Bö (entsprechend einer Diracfunktion), sowie auf scharf begrenzte bzw. impulsförmige Böen mit antisymmetrischer bzw. linearer Geschwindigkeitsverteilung längs der Spannweite. Der Vollständigkeit halber wird auch das zweidimensionale Problem einer impulsförmigen Bö behandelt. In zahlreichen Diagrammen sind die Ergebnisse der Rechnung: Auftrieb, Kipp- und Rollmoment über der Zeit für Machsche Zahlen zwischen 10/9 und 5 sowie einige in den Formeln auftretende Hilfsfunktionen aufgetragen.

*Johannes Weissinger.*

**Haack, Wolfgang:** Charakteristikenverfahren zur näherungsweise Berechnung der unsymmetrischen Überschallströmung um ringförmige Körper. *Z. angew. Math. Phys.* 2, 357—375 (1951).

Dem Verfahren werden die linearisierten Differentialgleichungen zugrunde gelegt. In üblicher Weise wird die Strömung am wenig angestellten Rotationskörper durch einen Ansatz für das Geschwindigkeitspotential nachgebildet, der ein Produkt einer Funktion der axialen und radialen Zylinderkoordinate und des cosinus des Zylinderkoordinatenwinkels darstellt. Aus der bekannten Gleichung für diese Funktion werden die Bedingungen auf den Charakteristiken abgeleitet und dadurch besonders vereinfacht, daß im wesentlichen die Geschwindigkeitskomponenten in den Charakteristikenrichtungen eingeführt werden. Mit diesem, wohl bisher einfachsten Verfahren werden die Kräfte auf angestellte Ringe und die Interferenz mit Zentralkörpern untersucht, Beispiele, bei denen die einfachen Formeln für angestellte Rotationskörper versagen.

*Klaus Oswatitsch.*

**Riabouchinsky, Dimitri:** Sur les singularités du régime transsonique et le problème du profil de resistance minima aux vitesses supersoniques. *C. r. Acad. Sci.*, Paris 233, 1330—1333 (1951).

Verf. überträgt seine Theorie der fast gleichförmigen Bewegung auf die Bestimmung des Widerstandes an. Es gelingt ihm, die Singularität, die Ackeret [Helvet. phys. Acta 1, 301—322 (1928)] bekannt gegeben hat und die bei der Machschen Zahl 1 eintreten sollte, zu vermeiden, indem er die Existenz einer zweiten Lösung nachweist. Als Körper minimalen Widerstandes ergibt sich im Übereinstimmung mit Versuchen von Theodorsen und Regier ein aus zwei Kreisbögen bestehender spindelförmiger Körper.

*Georg Hamel.*

**Bishop, J. F. W.:** The application of virtual source distributions to problems in the linearized theory of supersonic flows. *Quart. J. Math.*, Oxford II. Ser. 2, 291—307 (1951).



Während im allgemeinen bei Strömungsproblemen Singularitäten in der Nähe der Berandungen angewendet werden, belegt Verf. eine quer zur Hauptströmungsrichtung gelegene Ebene mit quellartigen Singularitäten. Damit erhält er Überschallströmungen in Düsen und um bestimmte Flügel. Der Rechengang ist einfach, führt aber mehrfach auf elliptische Funktionen. *Klaus Oswatitsch.*

**Brechovskich, L. M.:** Die Diffraktion von Schallwellen durch eine unebene Fläche. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 585—588 (1951) [Russisch].

Es wird die Reflexion einer ebenen Schallwelle an einer „rauen“ Fläche ermittelt, die durch eine Gleichung  $X_3 = \zeta(X_1, X_2)$  ( $X_1, X_2, X_3$  rechtwinklige Koordinaten) gegeben ist. Dazu wird das Geschwindigkeitspotential  $\varphi$  mittels der Greenschen Formel

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left[ \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{ikR}}{R} \right) - \frac{e^{ikR}}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right] dS$$

durch die Werte von  $\varphi$  und  $\partial\varphi/\partial n$  auf der Fläche ausgedrückt. Diese Werte werden nun in jedem Punkt der Fläche gleich jenen gesetzt, die sich ergeben, wenn man die Fläche durch die Tangentialebene in dem Punkt ersetzt. (Als Reflexionsfaktor ist dabei  $\pm 1$  einzusetzen, je nachdem, ob die Fläche schallhart oder schallweich ist). Es handelt sich also um eine Art Kirchhoffscher Näherung, die in dem Grenzfall, daß die Perioden der Unebenheiten groß gegen die Schallwellenlänge sind, gültig wird. Die Amplituden der Beugungsspektren werden angegeben, und die Ergebnisse verglichen mit denen von Rayleigh für eine sinusförmig wellige Fläche. *Arnold Schoch.*

**Haskell, N. A.:** Asymptotic approximation for the normal modes in sound channel wave propagation. J. appl. Phys. **22**, 157—168 (1951).

Verf. stellt mit Hilfe der asymptotischen Methoden von R. E. Langer Näherungslösungen der akustischen Wellengleichung für ein inhomogenes Medium auf. Die Inhomogenität soll in einer stetigen Veränderung der Schallgeschwindigkeit in einer Koordinatenrichtung bestehen. Als spezielle Anwendung hat er die Schallfortpflanzung nach großen Höhen in der Atmosphäre im Auge. In ihr durchläuft die Schallgeschwindigkeit als Funktion der Höhe in der unteren Stratosphäre ein Minimum, in der Höhe zwischen 40—60 km ein Maximum und in der Höhe von 80 km ein zweites Minimum. Wenn die Veränderung der Schallgeschwindigkeit mit der Höhe klein ist, z. B. in der Umgebung eines Minimums, erhält er ungedämpfte periodische Lösungen wie im Falle der Mehrfachreflexion an homogenen Luftschichten. Superposition solcher periodischer Schwingungen ergibt einen durch Beugung modifizierten Strahl analog zur Optik. *Walter Kofink.*

**Mott-Smith, H. M.:** The solution of the Boltzmann equation for a shock wave. Phys. Review, II. Ser. **82**, 885—892 (1951).

Zur Bestimmung der Breite der Wellenfront einer starken Stoßwelle in einem Gase reichen bekanntlich die Navier-Stokesschen Gleichungen nicht mehr aus (Breite von der Größenordnung der freien Weglänge  $\lambda$ ). Ebenso versagt aber auch die Enskog-Chapman-Methode (s. Chapman und Cowling, The mathematical theory of non-uniform gases, Cambridge 1931), denn wenn  $\Delta x$  die Strecke ist, auf der sich die Verteilungsfunktion wesentlich ändert, so ist der Entwicklungsparameter  $\lambda/\Delta x$  dieser Methode nicht mehr klein. Verf. nimmt nun statt einer Verteilungsfunktion die Summe aus zwei Maxwell'schen mit verschiedenen Temperaturen und konvektiven Geschwindigkeiten (Unterschall- und Überschall-) und zeigt an Hand spezieller Transportgleichungen, daß die so abgeleitete räumliche Verteilung in sich konsistent ist. Die gesuchte Breite wird größer als die von Thomas-Becker [Thomas, J. Chem. Phys. **12**, 449 (1944), R. Becker, Z. Phys. **8**, 321 (1921)], in Übereinstimmung mit den neueren Messungen [Greene u. a., J. Chem. Phys. **19**, 427 (1951)]. *Detlof Lyons.*

**Ursell, F.:** Trapping modes in the theory of surface waves. Proc. Cambridge philos. Soc. **47**, 347—358 (1951).

The problem is that of a fluid oscillating under gravity in an infinite container, with a free surface at constant pressure. This leads to a somewhat unconventional boundary problem for a velocity-potential of the form  $\Phi(x, y, z) \exp(\pm i\sigma t)$ , where  $\Phi$  satisfies the Laplace equation

$\Delta\Phi = 0$  in the fluid, and the boundary conditions  $\partial\Phi/\partial n = 0$  at the fixed walls and  $\sigma^2\Phi + \partial\Phi/\partial y = 0$  at the mean free surface  $y = 0$ . It is shown by two examples that such a problem may have a solution which is exponentially attenuated at large distances, so having finite total energy; the latter property leads to the name „trapping mode“. The author's introduction gives an interesting discussion of this situation in general terms, indicating some of the many research problems here. In particular, the radiation condition as used for the wave-equation will not ensure uniqueness in this case; cf. W. Magnus (this Zbl. 27, 316), which paper anticipated the cited work of the reviewer (this Zbl. 33, 35). The first of the two examples concerns fluid between two vertical walls and a sloping beach; here the trapping mode is readily specified. The second example involves a submerged circular cylinder in a deep tank; this entails considerable calculations and properties of infinite systems of linear equations.

Frederick V. Atkinson.

**Gröbner, W.: Oberflächenwellen von Flüssigkeiten.** Ann. Scuola norm. sup. Pisa, Sci. fis. mat., III. Ser. 5, 175—191 (1951).

Verf. behandelt das Problem mit den Methoden der Variationsrechnung, weil man so erstens die formalen und die direkten Methoden dieser Rechnung anwenden kann und man zweitens besser die Berechtigung und die Tragweite der üblichen oder doch notwendigen Vereinfachungen übersehen kann. Er behandelt sowohl das ebene wie auch das Ringwellenproblem. Die inkompressible ideale Flüssigkeit wird von ebenen senkrechten Wänden begrenzt und von einem irgendwie begrenzten Boden. Durchgerechnet werden die Annahmen, daß die horizontale Geschwindigkeit nicht von der Höhe abhängt oder linear oder exponentiell und daß der Boden horizontal oder eben geneigt sei. Auch die Oberflächenspannung kann berücksichtigt werden. Es liegen also gegen die übliche Theorie nach Methode und Ergebnissen erhebliche Fortschritte vor.

Georg Hamel.

**Heins, Albert E.: Some remarks on the coupling of two ducts.** J. Math. Physics 30, 164—169 (1951).

Das Problem der Oberflächenwellen auf zwei gekoppelten Kanälen endlicher Tiefe wird im Anschluß an frühere Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 35, 421, 38, 122) nach der Methode der singulären Integralgleichungen vom Wiener-Hopf-Typ durch Wahl einer passenden Greenschen Funktion gelöst, welche der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt. Damit wird ein Einwand von Weitz und Keller (dies. Zbl. 38, 385) gegen die Anwendbarkeit der eingeschlagenen Methode, welcher auf der Einführung einer anderen Greenschen Funktion zu beruhen scheint, entkräftet.

Joachim Pretsch.

**Galin, L. A.: Einige Probleme der instationären Bewegung des Grundwassers.** Priklad. Mat. Mech. 15, 655—678 (1951) [Russisch].

L'A. étudie l'écoulement plan, irrotationnel, non permanent des eaux souterraines de profondeur infinie. Soient:  $z = x + iy$  le plan de l'écoulement,  $Oy$  étant orienté suivant la verticale ascendante;  $D(t)$ , le domaine infini du fluide en mouvement à l'époque  $t$ , limité par la ligne libre  $\Gamma(t)$  d'équation  $y = f(t, x)$ ,  $-\infty \leq x \leq \infty$ ,  $f$  étant a priori inconnue mais bornée en module par hypothèse;  $z = z(t, \zeta)$  la fonction, holomorphe en  $\zeta = \xi + i\eta$  pour  $-\infty < \eta < 0$ , réalisant l'application conforme de  $D(t)$  sur le demi-plan  $\eta \leq 0$  du plan  $\zeta$ , de telle sorte que l'image de  $\Gamma(t)$  soit l'axe réel  $\eta = 0$ ;  $W(t, z) = w_1(t, z)$ , le potentiel complexe de l'écoulement. On sait, d'ailleurs, que le potentiel des vitesses  $\varphi(t, z)$  est de la forme:  $\varphi = -k(\rho g)^{-1} p(x, y, t) - ky$ ,  $k$  étant le coefficient de filtration,  $p$  la pression,  $\rho$  la densité, constante, du liquide filtrant et  $g$  l'accélération de la pesanteur. — Ceci étant, l'A. montre d'abord que  $w_1(t, \zeta) = i \rho g \zeta$ . Il cherche ensuite la condition vérifiée par  $z(t, \zeta)$  le long de  $\Gamma(t)$  et trouve: Partie réelle de  $\left[ \frac{k}{m} \frac{\partial z}{\partial \zeta} + i \frac{\partial z}{\partial \zeta} \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\zeta}} \right]_{\eta=0} = \frac{k}{m}$ , où  $m$  est une constante et où  $\bar{z} = x - iy$ . Il suit de là que  $z(t, \zeta)$  serait déterminée pour  $\eta \leq 0$  moyennant la donnée de  $z(0, \zeta)$ . Pour déterminer le champ des vitesses, l'A. pose:  $w(t, \zeta) = -k(\rho g)^{-1} w_1(t, \zeta) + k i z(t, \zeta)$  et trouve alors la condition, frontière pour  $\eta = 0$ :

$$\text{Partie réelle de } \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{m} i \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{i}{k} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{\zeta}} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right]_{\eta=0} = 0.$$

Ceci fait, l'A. explicite quelques solutions particulières du problème. Puis il indique un processus d'approximations successives dont il ne discute pas la convergence. Par contre, l'A. forme les expressions finies des approximations d'ordre 2. — Les formules résolutives se simplifient si on linéarise le problème, en supposant que la dénivellation de la surface libre (par rapport



à une horizontale) soit faible et que la courbure de celle-ci soit petite. — Pour finir, l'A. aborde le cas d'un écoulement à profondeur constante finie.  
*Julien Kratchenko.*

## Wärmelehre:

**Simon, F. E.:** Some considerations concerning Nernst's theorem. *Z. Naturforsch.* **6a**, 397—400 (1951).

Der Nernstsche Beweis, wonach verschwindende spezifische Wärmen am absoluten Nullpunkt zusammen mit dem zweiten Hauptsatz genügen, um sein Theorem herzuleiten, und die Einwände gegen ihn werden besprochen. Ferner wird gezeigt, daß ein System von Substanzen mit verschwindenden spezifischen Wärmen, aber nicht verschwindenden Entropiedifferenzen sehr merkwürdige Eigenschaften besäße.  
*Josef Meixner.*

**Verschaffelt, J. E.:** Sur l'affinité d'écoulement fluidal. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **37**, 126—137 (1951).

**Verschaffelt, J. E.:** Sur la thermomécanique des phénomènes irréversibles. II. *Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **37**, 691—695 (1951).

**Ritchie, R. H.:** The temperature function in a moving medium. *J. appl. Phys.* **22**, 1389 (1951).

**Longuet-Higgins, H. C.:** The statistical thermodynamics of multicomponent systems. *Proc. roy. Soc., London, Ser. A* **205**, 247—269 (1951).

Unter drei Annahmen über die molekularen Wechselwirkungskräfte berechnet Verf. die Abweichung einer flüssigen Lösung oder gasförmigen Mischung vom idealen Verhalten in Gliedern einer einzigen Wechselwirkungskonstanten für jedes Paar von Molekülen der Komponenten. Seine Theorie beruht auf strenger Differentiation des Gibbschen Phasenintegrals. Sie ist streng gültig für kleine Abweichungen von der Idealität. Sie enthält 2 Voraussetzungen, die auch in der Theorie der kristallin geordneten Lösungen von Fowler und Guggenheim gemacht wurden, nämlich daß die Moleküle ungefähr gleich groß sind und daß die gesamte molekulare Wechselwirkungsenergie aus Beiträgen nur der nächsten Nachbarn bestehe. Dazu macht Verf. die weitere Annahme, daß diese molekularen Wechselwirkungen für die verschiedenen Sorten von Molekülen ungefähr gleich seien. Die Zusatzentropie einer nichtpolaren Lösung entsteht bei ihm hauptsächlich durch die Temperaturabhängigkeit der molekularen Wechselwirkungsenergie.  
*Walter Kofink.*

**Brown, W. B. and H. C. Longuet-Higgins:** The statistical thermodynamics of multicomponent systems. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **209**, 416—418 (1951).

Verff. stellen einen Ausdruck für die Zunahme der freien Mischungsenthalpie einer binären „konformen“ Lösung auf. Sie erörtern die Frage, ob die Glieder 2. Ordnung in ihrer Entwicklung auch als Funktionen der thermodynamischen Größen einer Bezugsflüssigkeit ausgedrückt werden können. Sie finden, daß bei dem Mittelungsprozeß die Zusatzannahme notwendig ist, daß die Wechselwirkungskräfte zwischen den Molekülen endliche, aber nicht unbedingt kurze Reichweite haben müssen. In dem Ausdruck 2. Ordnung für die freie Enthalpie treten statistische Größen auf, die nicht direkt auf die thermodynamischen Größen der Bezugsflüssigkeit zurückführbar sind. Sie deuten sie als Effekte geordneter Mischung.  
*Walter Kofink.*

**Ikenberry, Ernest:** The conservation of systems in phase space. *Quart. appl. Math.* **9**, 195—203 (1951).

A Gibbsian virtual ensemble of  $N$  systems, each containing  $N$  identical particles of mass  $m$ , is considered. Paying special attention to the conditions at the boundary of the region of phase space occupied by the system of the virtual ensemble, the author derives the ordinary equation of continuity for the density of particles in real space, the hydronomical equations of motion, the equation of thermal energy and the equation of total energy. These results are obtained by choosing  $\Phi$  appropriately in

a general equation of transport

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f \Phi d\Omega_1 + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \int f p_i \Phi d\Omega_1 = \int f D \Phi d\Omega_1,$$

which is shown to hold for any quantity  $\Phi$  whose value for the entire system is equal to the sum of its values for the individual particles and for which the integrals involved exist. ( $q_1, q_2, q_3$ ) is the position of particle 1,  $d\Omega_1$  is in a usual notation  $dq_1 \cdots dq_{3N} dp_1 \cdots dp_{3N}$ ,  $f(q, \dots, p_1, \dots, t)$  gives the instantaneous density of systems in phase space and

$$D \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3N} \left\{ \frac{dq_i}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} + \frac{dp_i}{dt} \frac{\partial}{\partial p_i} \right\}.$$

Misprint in eq. (2. 11).

*Peter T. Landsberg.*

**Scheidegger, A. E. and C. D. McKay:** Quantum statistics of fields. Phys. Review, II. Ser. **83**, 125—131 (1951).

In der Quantenstatistik geht man gewöhnlich so vor, daß man erst das Wellenfeld der Teilchen quantelt und dann die Statistik auf die Teilchen anwendet. Man kann aber auch das Feld als Gibbssches Ensemble behandeln und die Zustandssumme nach Klein mit Hilfe der v. Neumannschen Dichtematrix bilden, wobei Teilchenzahlen nur als Rechengrößen auftreten und keine feste Gesamtzahl zu bestehen braucht. Verff. führen das aus für reine Vakuumfelder, d. h. für Systeme, die nur durch ihre Temperatur charakterisiert sind. Man erhält so z. B. für das nichtrelativistische Schrödingerfeld die freie Energie

$$F = - \left( \frac{2\pi m}{h^2} \right)^{3/2} (kT)^{5/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \cdot V$$

in Übereinstimmung mit Kaempffer (dies. Zbl. **31**, 226). Für das relativistische Schrödinger-Gordon-Feld ergeben sich Formeln, die für  $c = \infty$  nicht in den unrelativistischen Fall übergehen, was zu eigentümlichen Folgerungen führt. Ähnliche Verhältnisse bestehen bei relativistischen und nichtrelativistischen Spinorfeldern. Im ersten Falle findet man, daß für tiefe Temperaturen alle Zustände negative Energie voll besetzt sind. Für das elektromagnetische Feld kommt man zum Stefan-Boltzmannschen Gesetz zurück.

*Walter H. Wessel.*

**Balázs, N. L.:** Some notes on the statistical theory of adsorption. Physica **17**, 865—875 (1951).

Known as well as new adsorption isotherms are derived by the method of the grand canonical ensemble. This treatment simplifies the analytical details, and may be used to justify some of the approximations made in the more usual discussions. The reason is that the troublesome restriction of constant composition in the evaluation of the summations is avoided.

*Peter T. Landsberg.*

**Greene, Richard F. and Herbert B. Callen:** On the formalism of thermodynamic fluctuation theory. Phys. Review, II. Ser. **83**, 1231—1235 (1951).

It is shown that the correlation moments of the extensive thermodynamic parameters may be calculated by two methods, both of which can be carried through exactly. In the first the calculation is based directly on the distribution function of the microstates. The second one is based on the so-called Einstein function which gives the probability of each instantaneous macroscopic fluctuation. The two methods agree exactly. The merit of the paper resides in the fact first that it shows that two methods are available and that both can be carried through exactly, and secondly in showing that the current approximate method yields second moments which are also exact, but higher moments which are all incorrect. *Peter T. Landsberg.*

**Barenblatt, G. J. und B. M. Levitan:** Über eine Verallgemeinerung der Poisson'schen Formel aus der Theorie der Wärmeleitung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **79**, 917—920 (1951) [Russisch].



Weiterführung zweier früherer Arbeiten des Verf. (dies. Zbl. 41, 220, 221) zur Theorie der Wärmeleitungsgleichung  $\partial^2 T / \partial x^2 = q(x) \partial T / \partial t$  ( $0 \leq x \leq \infty$ ). Es wird eine Verallgemeinerung der Poissonschen Formel dieser Theorie gebracht, die gestattet, Randwertaufgaben zu lösen ohne Heranziehung der Entwicklung der Anfangstemperaturverteilung in ein verallgemeinertes Fourierintegral und die dadurch bedingte Einschränkung der zugelassenen Funktionen. Mit Verwendung der Ergebnisse der früheren Arbeiten wird durch Integralumformungen bewiesen, daß jede beschränkte, in  $x$  stückweise stetige und in  $t$  stetige Funktion  $f(x, t)$  in einem Intervall  $x \in [a, b]$  in der Art einer spektralen Zerlegung dargestellt werden kann durch das Doppelintegral

$$\lim_{\tau \rightarrow t} S(x, t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow t} \int_a^b f(\xi, \tau) q(\xi) d\xi \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \lambda) \varphi_\alpha(\xi, \lambda) d\varrho(\lambda), \quad \tau < t,$$

(an Sprungstellen ergibt sich der Mittelwert der beiderseitigen Grenzwerte und außerhalb von  $[a, b]$  der Wert 0). Hierbei ist  $\varphi_\alpha(x, \lambda)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $y'' + \lambda q(x) y = 0$  mit den Anfangswerten  $\varphi_\alpha(0, \lambda) = \sin \alpha$  und  $\varphi'_{\alpha x}(0, \lambda) = \cos \alpha$ . Vorausgesetzt wird, daß die gegebene Funktion  $q(x)$  den in der ersten der beiden zitierten Arbeiten angegebenen sechs Bedingungen genügt, so daß das in  $d\varrho(\lambda)$  auftretende Spektrum des Operators  $\frac{1}{q(x)} \frac{d^2}{dx^2}$  (wie dort gezeigt) stetig für  $\lambda \geq 0$  ausfällt und daher obiges Integral gebildet werden kann. — Mit Hilfe dieses Satzes wird die Differentialgleichung  $q(x) \partial T / \partial t = \partial^2 T / \partial x^2 + Q(x, t)$  mit den homogenen Randbedingungen  $\cos \alpha \cdot T(0, t) - \sin \alpha \cdot \partial T(0, t) / \partial x = 0$ ;  $T(x, 0) = 0$  gelöst, wobei  $Q(x, t)$  seinen Voraussetzungen zu genügen hat. Man erhält für die Lösung den expliziten Ausdruck

$$T(x, t) = \int_0^t d\tau \int_0^\infty Q(\xi, \tau) d\xi \int_0^\infty e^{-\lambda(t-\tau)} \varphi_\alpha(x, \lambda) \varphi_\alpha(\xi, \lambda) d\varrho(\lambda).$$

Der Fall zugehöriger inhomogener Randbedingungen läßt sich dann auf diesen nach den in den erwähnten früheren Arbeiten des Verf. entwickelten Methoden und Ergebnissen zurückführen.

Erik Svenson.

Evans II, G. W.: A note on the existence of a solution to a problem of Stefan. Quart. appl. Math. 9, 185—193 (1951).

Wird eine unendliche ebene Platte, welche sich auf der Umwandlungstemperatur ihres Stoffes befindet, von einer Seite her gleichmäßig weiter erwärmt, so läßt sich die Aufgabe in geeigneten Maßstäben beschreiben durch  $u_{xx} = u_t$  [ $0 < x < x(t)$ ];  $u(x(t), t) = 0$ ;  $\dot{x}(t) = -u_x(x(t), t)$ ;  $x(0) = 0$ ;  $u_x(0, t) = -1$ . Verf. zeigt, daß die durch Iteration aus der Formel  $x(t) = t - \int_0^{x(t)} u(x(t), t) dx$  zu erhaltende

Funktionsfolge  $x_n(t)$  konvergiert und daß ihre Grenzfunktion  $x(t)$  mit dem zugehörigen  $u(x, t)$  die einzige Lösung der Aufgabe darstellt. Uwe Timm Bödewadt.

Dubois-Violette, Pierre-Louis: Influence de la transmission de la chaleur sur la stabilité des réglages de température. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 26—28 (1951).

Verf. legt dar, daß bei zylindrischer Wärmeausbreitung die Laplace-Transformierte für das Rückwirkungsverhältnis einer Temperaturregelung zumeist eine meromorphe Funktion von  $p$  sein wird, so daß die vom Verf. beschriebene Methode der Wurzelverschmelzung benutzt werden kann, um die Stabilitätsgrenzen vorauszurechnen [C. r. Acad. Sci., Paris 230, 1360 (1950)]. Uwe Timm Bödewadt.

Squire, William: A problem in heat conduction. J. appl. Phys. 22, 1508—1509 (1951).

Verschaffelt, J. E.: Sur le transport d'énergie par conduction. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 509—524 (1951).

Verschaffelt, J. E.: Sur l'effet thermique de la diffusion. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 307—323 (1951).

## Elektrodynamik. Optik:

Géhéniau, J.: Espaces de l'électromagnétisme. Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 324—332 (1951).

A chaque type de champ électromagnétique, peut être attaché un certain espace. Le champ électrostatique détermine dans l'espace physique une famille de surfaces équipotentielles (re-

pérées par un seul paramètre) et une famille de lignes d'induction (à 2 paramètres); on peut donc attacher à ce champ un espace produit d'un espace unidimensionnel métrique ou affine suivant qu'on a ou qu'on n'a pas fixé l'unité de potentiel et d'un espace bi-dimensionnel doué de diverses mesures d'aires et lié à la mesure du flux d'induction. Même structure pour le champ magnétique, mais avec une mesure d'aire unique. Le cas de l'électromagnétisme fait appel à un espace symplectique défini par une forme fondamentale dont les coefficients peuvent devenir constants dans certaines régions d'espace pour certains systèmes de coordonnées. Dans tous ces espaces les lois des champs correspondants sont simples. Dans la deuxième partie de ce travail, on considère les conditions supplémentaires introduites par les relations entre les forces et les inductions électriques et magnétiques. L'espace attaché à un diélectrique est riemanien, celui attaché à un diélectrique avec perméabilité est dans un cas simple caractérisé par l'existence en chacun de ses points d'un hypercône de second degré (espace riemannien conforme). L'A. fait une étude détaillée du cas général.

*Antoine Visconti.*

**Mirimanov, R. G.:** Über eine Methode zur Bestimmung des elektromagnetischen Feldes in einer geschlossenen Kugelschale, deren Teile verschiedene dielektrische Permeabilität haben. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 80, 361—364 (1951) [Russisch].

In the thin dielectric spherical shell the complex dielectric constant is a function of the angular coordinates; the magnetic permeability is taken as everywhere unity. From the continuity of  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}$  and  $\mathbf{n} \times \mathbf{E}$  at a boundary he argues that if the thickness of the shell is „infinitely small“, then these quantities have the same values at corresponding points on opposite sides of the shell. He does not however apply this argument to  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}$ , but gives instead a special argument to find a rather complicated boundary condition for  $\mathbf{H}$ . He then attempts to solve the resulting boundary problem in terms of general series of spherical wave functions, ending up with what appear to be linear differential equations in infinitely many unknowns, to be solved „without special labour by well-known methods“. The reviewer is at variance with considerable portions of the paper.

*Frederick V. Atkinson.*

**Laudet, Michel:** Potentiel et champ d'une distribution volumique de quadrupôles. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1172—1174 (1951).

A volume integral representing the potential of a volume distribution of electrostatic quadrupoles is transformed into surface and volume integrals which may be interpreted in terms of a surface and a volume distribution of charge, and a surface distribution of oblique dipoles. The discontinuities of the potential and the field at the surface are specified; cf. J. A. Stratton, „Electromagnetic Theory“ (New York 1941, 1st edition), pp. 185—192.

*Frederick V. Atkinson.*

**Landsberg, Max:** Zur Theorie und Berechnung des elektrostatischen Durchgriffs der ebenen und zylindrischen Dreipolröhre im Falle zweidimensionaler Potentialverhältnisse. Z. angew. Math. Phys. 2, 375—393 (1951).

Verf. nennt das Ziel der vorliegenden Arbeit, bei der ebenen und zylindrischen Triode Durchgriffsformeln aufzustellen, welche unter der Voraussetzung zweidimensionaler Potentialfelder frei sind von zusätzlichen Einschränkungen bezüglich Drahtstrahlen und Elektrodenabständen. Für das elektrostatische Potential wird im ebenen Falle eine doppelperiodische Funktion angegeben, welche bezüglich der Kathode die richtige Gesamtladung ergibt, während das Potential am Umfang eines Gitterdrahtes durch eine Fouriersche Reihe des Umfangswinkels gegeben ist. Für das komplexe Potential erhält Verf. einen Ausdruck, der unendliche Doppelreihen enthält. Indem dieser Ausdruck mit den wirklichen Elektrodenpotentialen verglichen wird, ergibt sich ein unendliches Gleichungssystem, das vom Verf. mit einfachen Rekursionsformeln gelöst wird. Im Anschluß an diese Formeln läßt sich dann der Durchgriff berechnen. Im zylindrischen Falle geht Verf. in analoger Weise vor. Zum Schluß gibt er einen Vergleich dieser Formeln mit denjenigen anderer Autoren. Die vom Ref. aufgestellten einfacheren Formeln [Schweiz. Bauzeitung 67, 36—37 (1949)] werden nicht genannt.

*Max J. O. Strutt.*



Vallée, Robert: *Sur deux classes d'opérateurs d'observation*. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1350—1351 (1951).

Mettant en complète évidence l'homogénéité relativiste de l'espace-temps, et celle de l'espace des fréquences spatio-temporelles qui lui est associé par une transformation de Fourier 4-dimensionnelle, l'A. fait une classification systématique des opérateurs de champs et des opérateurs de filtrage rencontrés par la technique, notamment par la technique des radio-communications.

O. Costa de Beauregard.

Middleton, David: *The distribution of energy in randomly modulated waves*. Philos. Mag., VII. Ser. **42**, 689—707 (1951).

Verf. untersucht die Energieverteilung in hochfrequenten Schwingungen, die durch thermisch-statistische Störgeräusche moduliert werden. Er entwickelt eine Theorie für die Frequenz- und Phasenmodulation durch Störgeräusche und betrachtet den Einfluß der spektralen Verteilung des modulierenden Geräusches auf die Intensitätsverteilung. Er findet, daß die tiefsten Störfrequenzen die bedeutungsvollsten sind. Eine analoge Diskussion stellt er für die Amplitudenmodulation durch Störgeräusche unter Einfluß der möglichen Übermodulation an.

Walter Kofink.

Nicolau, Edm.: *Un nouveau critérium de stabilité et son application: Une théorie unitaire des oscillateurs électroniques*. Acad. Republ. popul. Române, Bul. Sti. A3, 135—146, russische und französ. Zusammenfassgn. 146, 147 (1951) [Rumänisch].

Brodin, Jean: *Réseaux linéaires à paramètres localisés dépendant du temps*. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1168—1170 (1951).

• Motz, H.: *Electromagnetic problems of microwave theory*. (Methuen's Monographs on Physical Subjects.) London: Methuen and Co., Ltd.; New York: John Wiley and Sons, Inc., 1951. VII, 184 p. 9s. 6d. net.

Die Methuen-Serie ist dazu gedacht, Lesern mit mittlerer wissenschaftlicher Bildung mit dem modernen Entwicklungsstand einzelner Gebiete bekannt zu machen. Verf. beabsichtigt das heute sehr ausgedehnte Gebiet der Mikrowellentheorie in einer Reihe sorgfältig ausgewählter Beispiele darzustellen. Gleichzeitig sollten analytische Methoden gezeigt werden, die weiterer Anwendung fähig sind. Eine gute Kenntnis des Elektromagnetismus ist vorausgesetzt. Diese Absicht führt Verf. in 8 Kapiteln durch [Theorie der Geschwindigkeitsmodulation, Klystron, Hohlraumagnetron und seine Schwingungsformen, Wellenleiter, Feldberechnungen für Hohlräume mit Einbauten, Antennenimpedanz im Hohlleiter, Theorie der Diskontinuitäten in Wellenleitern (Blenden, Fenster) nach der „quasistatischen“ Methode von G. G. Macfarlane und der Integralgleichungsmethode von J. Schwinger]. Es ist eine große Menge von sehr interessantem Stoff in kurzer und knapper Form behandelt. Der Leser sollte aber schon den üblichen mathematischen Formalismus der Maxwell'schen Theorie beherrschen. Dann wird er sehr großen Gewinn von der Lektüre haben. Namentlich die in den letzten 3 Kapiteln behandelten Näherungsmethoden zur Behandlung komplizierter Feldverteilungen sind sehr schön zusammengefaßt und dargestellt. Für jeden, der sich für eine kurze exakte Begründung und Lösung der Fragen dieses Gebietes interessiert, ist das Buch sehr zu empfehlen.

W. O. Schumann.

Marcuvitz, Nathan: *Field representations in spherically stratified regions*. Commun. pure appl. Math. **4**, 263—315 (S 263—S 315) (1951).

Die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen in radial geschichteten Gebieten bei beliebig vorgegebenen elektrischen und magnetischen Quellen wird zurückgeführt auf die Auflösung der gewöhnlichen Differentialgleichungen der Leitungstheorie (Telegraphengleichung) für die radiale oder  $\theta$ -Richtung, indem nach Eigenfunktionen der jeweils transversalen Richtungen entwickelt wird. Dabei werden entweder direkt vektorielle Eigenfunktionen benutzt, oder skalare Eigenfunktionen für die Debyeschen Potentiale. Allgemein kann man die hierbei entstehenden Aufgaben zurückführen auf das Aufsuchen der Eigenfunktionen  $\Phi_i(x)$  zum Eigenwert  $\lambda = \lambda_i$ , sowie der Greenschen Funktionen  $G_\lambda(x, x')$  vorgegebener gewöhnlicher Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Greensche Funktion hängt mit den Eigenfunktionen eng zusammen, indem sich einerseits  $G$  vermittels  $G_\lambda(x, x') =$

$\sum_i \frac{\Phi_i(x)\Phi_i(x')}{\lambda - \lambda_i}$  nach den normierten  $\Phi_i$  entwickeln läßt, andererseits die Eigenwerte  $\lambda_i$  aus  $G$  als deren Pole in der komplexen  $\lambda$ -Ebene gewonnen werden können. Weiterhin läßt sich  $G$  aufbauen aus zwei Lösungen der Differentialgleichung, welche nur je eine der beiden Randbedingungen erfüllen. In dieser Weise konstruiert Verf. die Greenschen Funktionen einiger wichtiger Differentialgleichungen in  $r$  bzw.  $\theta$  für verschiedene Gebiete, um schließlich das Feld eines radialen Hertzschen Dipols zu ermitteln in einem Gebiet, welches aus zwei aneinander grenzenden Kugelschalen verschiedener Dielektrizitätskonstanten besteht.

Walter Franz.

**Bremmer, H.:** The jumps of discontinuous solutions of the wave equation. Commun. pure appl. Math. 4, 419—426 (1951).

Considerato un campo elettromagnetico con discontinuità  $e$ ,  $\bar{h}$  su una superficie  $\sigma$ , Lunemberg ha determinato le equazioni per la variazione di  $\bar{e}$ ,  $\bar{h}$  lungo le linee normali a  $\sigma$  nelle sue successive posizioni; equazioni identiche a quelle valide, nell'approssimazione dell'ottica geometrica, per le variazioni, lungo il raggio, di un campo elettromagnetico. In questa nota, mediante l'uso delle funzioni impulsive, l'Autore ottiene analoghi risultati per le discontinuità connesse con l'ordinaria equazione di propagazione delle onde:  $\Delta u - \frac{n^2}{c^2} u = 0$  ( $n$ , indice di rifrazione).

Dario Graffi.

**Copson, E. T.:** The transport of discontinuities in an electromagnetic field. Commun. pure appl. Math. 4, 427—433 (1951).

Dopo aver posto le equazioni dell'elettromagnetismo in una opportuna forma integrale, l'Autore ritrova le equazioni di Lunemberg citate nella precedente recensione.

Dario Graffi.

**Höller, Paul:** Zur Ausbreitung elektromagnetischer Wellen von Land nach See und umgekehrt. I. Z. angew. Phys. 3, 424—432 (1951).

Es wird ein Verfahren entwickelt, das die Lösung des im Titel genannten Beugungsproblems durch ein sukzessives Verfahren gestattet. Den Ausgangspunkt bildet die Lösung für die Strahlung eines elektrischen Dipols über ebener Erde. Diese Lösung erfüllt, wenn wir den Fall der Ausbreitung von Land nach See betrachten, nicht die Grenzbedingungen der Elektrodynamik an der Oberfläche der See. Man setzt nun einfach über See die Lösung für eine überall von der See bedeckte ebene Erde an und erfüllt so zwar die Grenzbedingungen an der Erdoberfläche, verletzt aber die Wellengleichung an der Schattengrenze der einfallenden Welle, wo die Lösungen über Land und über See unstetig zusammenstoßen. Geht man nun von der Primärwelle aus, so kann man die Differenz der beiden Lösungen als Zusatzwelle auffassen, die an einer Halbebene gebeugt wird. Diese so gewonnene Lösung erfüllt nun zwar die Wellengleichung, aber nicht die Grenzbedingungen an der Erdoberfläche, hier wiederholt sich also unser im ersten Näherungsschritt angewandtes Verfahren, das sich auf diese Weise beliebig fortführen läßt. In der Arbeit wird das Näherungsverfahren bis zum dritten Schritt, also der Erfüllung der Grenzbedingungen für die gebeugte Welle, für den Fall durchgeführt, daß Sender und Empfänger hoch über der Erdoberfläche liegen. Für die Auswertung des bei der Beugung auftretenden Kirchhoffschen Integrals wird dabei eine von Rubinowicz angegebene Methode benutzt.

Hans-Otto Wüster.

**Keller, Joseph B. and Albert Blank:** Diffraction and reflection of pulses by wedges and corners. Commun. pure appl. Math. 4, 75—94 (S. 139—S. 158) (1951).

Von H. M. MacDonald war in „Electromagnetism“ (S. 79ff., London 1934, dies. Zbl. 9, 278) Beugung und Reflexion einer periodischen ebenen Welle durch einen vollkommen leitenden Keil behandelt, wobei die Wellenfläche der einfallenden Welle parallel der Kante des Keils vorausgesetzt war. Die Lösung hatte sich als Reihe Besselscher Funktionen ergeben. Verf. behandelt das analoge Problem für einen einfallenden ebenen Impuls. Durch Anwendung eines Fourier-Integrals der MacDonaldschen Lösung läßt sich diese Fragestellung behandeln. Die Lösung kann insbesondere auch direkt als geschlossener Ausdruck mit Elementarfunktionen explizit erhalten werden, da sie in diesem Fall konisch ist und vom „radialen“ Abstand im  $x y t$ -Raum unabhängig ist, wenn die Kante des Keils (bzw. der Ecke) die  $z$ -Achse bildet. Es ist dann möglich, Koordinaten so zu wählen, daß eine Trennung der Variablen durchführbar ist. [Verf. verweisen hier auf eine von Busemann in den Schr. Deutsch. Akad. Luftfahrt-Forschung 7 B, 105—122 (1934) Nr. 3 veröffentlichten Arbeit: Infinitesimale konische Über-



schallströmung.] Zuvor ist es nötig, zu überlegen, wie sich die ebene Diskontinuitätsfläche ausbreitet. Von R. K. Luneberg (Mathematical theory of optics, Brown, University Lecture, 1944) war dies für elektromagnetische Wellen, von J. B. Keller (Mechanics of continuous media, New York University Lecture, 1949—1950) für Probleme der Akustik durchgeführt. Es ergab sich in beiden Fällen, daß die Unstetigkeitsfläche einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung genügt, der Eikonalgleichung für homogene Medien, und daß sich die Unstetigkeit in einfacher Weise ändert, wenn sich die Fläche bewegt. Unter Benutzung jener Ergebnisse ist es möglich, das Anfangs-Grenzwert-Problem in ein Charakteristik-Grenzwert-Problem im  $x y t$ -Raum umzuformen, so daß das Busemannsche konische Flußverfahren angewendet werden kann. Die Ergebnisse beziehen sich auf eine Komponente des elektrischen oder magnetischen Feldes parallel zur Kante des Keiles bzw. des Winkels, u. zw. entspricht — wenn  $v(x y t)$  die betreffende Funktion ist — der Grenzwert  $v = 0$  an den Wandflächen einem elektrischen Feld, der Grenzwert  $\partial v / \partial n = 0$  einem magnetischen Feld. In Anwendung auf akustische Impulse entspricht  $\partial v / \partial n = 0$  Keilen bzw. Ecken mit starken Wänden,  $v = 0$  freien (also elastischen) Wänden. — Verf. formuliert zunächst das Problem eines einen Keil treffenden Impulses und stellt hierfür die Anfangsbedingungen fest. Anschließend wird die Fortpflanzung der Unstetigkeitsfläche behandelt. Von dem Augenblick an, in dem der Impuls, also die Unstetigkeitsfläche, die Kante des Keiles trifft, besteht diese aus drei Teilen: 1. Dem Teil der ursprünglichen, sich mit  $t$  weiter verschiebenden Unstetigkeitsfläche, die außerhalb des prismatischen Keiles liegt, 2. einer sich von der Kante des Keiles ausbreitenden zylindrischen Fläche, 3. der durch die Reflexion an den Wänden des Keiles entstehenden, sich gleichfalls mit  $t$  verschiebenden Impulsfläche. Durch Einführung einer besonderen Art von Polarkoordinaten im  $x y t$ -Raum, nämlich  $q = \frac{ct}{p}$ ,

$\theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x} \left( = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \right)$ , worin  $p = [c^2 t^2 - (x^2 + y^2)]^{1/2}$ . Mit  $q = \left( \frac{q-1}{q+1} \right)^{1/2}$  führt dies für  $v = v(q, \theta)$  auf die Laplacesche Differentialgleichung, deren Lösung in der Form  $v = \operatorname{Im} (fz)$  mit  $z \equiv \varrho e^{i\theta} = \frac{x + iy}{ct + (c^2 t^2 - R^2)^{1/2}}$  und  $\varrho = \frac{R}{ct + (c^2 t^2 - R^2)^{1/2}}$ . Hierdurch ist der Kegel  $R < ct$

auf den Einheitskreis  $\varrho < 1$  abgebildet. Das Problem ist dadurch zurückgeführt auf die Frage nach einer Funktion, die in einem geeigneten Sektor des Einheitskreises analytisch ist und am Rande einen vorgeschriebenen imaginären Teil besitzt. Das Äußere des Kreises in der  $z$ -Ebene wird auf die obere Hälfte einer  $w$ -Ebene durch die Transformation  $w = r \cdot e^{i\omega} = (e^{i\Phi_z})^{\lambda}$  abgebildet, wo  $\lambda = \pi/(2\pi - 2\Phi)$  und  $2\Phi$  der Winkel des Keiles ist. Dabei ist vorausgesetzt, daß die Ausbreitungsrichtung des einfallenden Impulses mit der Winkelhalbierenden des Keiles einen Winkel  $\Psi < \Phi$  bildet. Anschaulich besagt dies, daß die beiden Seitenflächen des prismatischen Keiles bzw. die Schenkel des kantensenkrechten Querschnitts auf zwei einen Durchmesser des Kreises bildenden Radien abgebildet werden. Es ist eine harmonische Funktion  $v$  mit stückweise konstanten Grenzwerten zu bestimmen. Dies wird vom Verf. durchgeführt. Anschließend werden in entsprechender Weise die Fälle behandelt, daß  $\Phi < \Psi < \pi/2 - \Phi$  bzw.  $\pi/2 - \Phi < \Psi < \pi - \Phi$  ist. In den ersten beiden Fällen ist zu Beginn kein reflektierter Impuls vorhanden, im letzten tritt vom ersten Augenblick aber ein reflektierter Impuls auf. In diesem Fall ist noch zu unterscheiden zwischen den beiden Unterfällen  $\pi/2 - \Phi < \Psi < \Phi$  und  $\Phi < \Psi < \pi - \Phi$ . — In entsprechender Weise wird die Frage behandelt, wenn eine ebene Welle auf die Innenflächen eines Winkels auffällt und an diesem mehrfach reflektiert wird. Auch hier ergeben sich als Flächen gleicher Phase Flächen, die aus mehreren Teilen zusammengesetzt sind, die zwar stetig, aber mit unstetiger erster Ableitung ineinander übergehen. Die Lösung dieses Impulsproblems wird dann zu einer zeitharmonischen Lösung erweitert. Kurz wird auch der Fall gestreift, daß die einfallende Unstetigkeitsfläche oder die Impulsfront nicht zur Kante des Keiles oder Winkelspiegels parallel wird, daß es sich also nicht um räumlich zweidimensionale, sondern räumlich dreidimensionale Probleme handelt.

Johannes Picht.

Kline, Morris: An asymptotic solution of Maxwell's equations. Commun. pure appl. Math. 4, 225—262 (S 225—S 262) (1951).

Das Feld einer räumlichen Ladungsverteilung, deren Stärke in vorgegebener Weise mit der Zeit variiert, kann mittels des Duhamelschen Prinzips zurückgeführt werden auf die zugehörige „Stoßlösung“ („pulse solution“) der Maxwell'schen Gleichungen, welche durch dieselbe räumliche Ladungsverteilung erzeugt wird, wenn sie zur Zeit  $t = 0$  plötzlich entsteht und dann konstant bleibt. Diese Beziehung benützt Verf., um die Ausstrahlung einer harmonisch mit der Zeit variierenden Ladungsverteilung asymptotisch für kleine Wellenlängen zu entwickeln. Verf. zeigt, daß man zu diesem Zwecke nicht die gesamte Stoßlösung (welche genau so schwierig zu erhalten ist, wie die Lösung für harmonische Zeitabhängigkeit) kennen muß, sondern nur deren Diskontinuitäten, bestehend in fortschreitenden Wellenfronten. — Zur Durchrechnung werden die Maxwell'schen Gleichungen durch Integralgleichungen ersetzt, und aus diesen ein System von Rekursionsformeln abgeleitet, bestehend aus gewöhnlichen Differentialgleichungen für die Diskontinuitäten der aufeinanderfolgenden zeitlichen Ableitungen der Felder der Stoßlösung.

Als erste Näherung des Verfahrens ergibt sich die geometrische Optik. — Die angegebene Methode sollte geeignet sein, um die asymptotischen Lösungen für eine Klasse von elektromagnetischen Problemen zu finden; Verf. nennt speziell den Dipol im inhomogenen Medium. Die Hauptschwierigkeit der Methode besteht darin, daß in jeder Näherung die sämtlichen von den Quellen direkt oder über Reflexionen usw. erzeugten Wellenfronten bekannt sein müssen.

*Walter Franz.*

**Agostinelli, Cataldo:** *Vibrazioni elettromagnetiche in una cavità riempita di dielettrico eterogeneo.* Univ. Politec. Torino, Rend. Sem. mat. **10**, 175—210 (1951).

L'A. studia i campi elettromagnetici armonici che possono aversi in una cavità limitata da un conduttore perfetto e riempita da un dielettrico eterogeneo. Dimostra, in primo luogo, come il campo elettromagnetico possa ottenersi da un'unico vettore; questo risultato si semplifica notevolmente quando la cavità ammette un asse di simmetria, allora quel vettore giace in un piano meridiano. Supposta poi la cavità riferita ad un sistema di coordinate curvilinee ortogonali  $q_1, q_2, q_3$ , la superficie che la limita di equazione  $q_1 = \text{costante}$ , l'A. ricerca le condizioni per cui si possono avere campi con la componente del campo elettrico o del campo magnetico lungo  $q_1$ , nulla. Queste condizioni sono soddisfatte in una cavità, di forma sferica, con costante dielettrica variabile solo con la distanza dal centro; per questo caso l'A. trova valori maggioranti e minoranti per le frequenze di oscillazione e un'equazione trascendente a cui soddisfano tali frequenze. Infine, mediante una formula di reciprocità, determina le frequenze di oscillazione per una cavità riempita da un mezzo di costante dielettrica diversa, per quantità molto piccole, da un valore costante.

*Dario Graffi.*

**Dunning, Kenneth L. and Rufus G. Fellers:** *The susceptance of a thin iris in circular wave guide with the  $TM_{01}$  mode incident.* J. appl. Phys. **22**, 1316—1326 (1951).

**Aden, Arthur L. and Milton Kerker:** *Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres.* J. appl. Phys. **22**, 1242—1246 (1951).

Die Miesche Methode zur Berechnung der Beugung ebener elektromagnetischer Wellen an der Kugel wird angewandt auf die Beugung an einer Kugel mit umgebender Kugelschale abweichender Eigenschaften. Für jedes der drei Gebiete (Kugel, Kugelschale, umgebendes Medium) werden Dielektrizitätskonstante und Permeabilität beliebig komplex angesetzt.

*Walter Franz.*

**Pidduck, F. B.:** *Electrical notes. XIII. Diffraction of light by a semi-transparent sheet.* Quart. J. Math., Oxford II. Ser. **2**, 316—320 (1951).

Die Beugung an halbdurchlässigen Schirmen, deren Dicke klein gegen die Abmessung, jedoch groß gegen die Wellenlänge ist, wird dadurch behandelt, daß zu der Kirchhoffschen Beugungsformel die für den unendlich ausgedehnten ebenen Schirm gültigen Durchlässigkeits- und Reflexionskoeffizienten für ebene Wellen als Faktoren hinzugenommen werden. Speziell wird die Halbebene untersucht.

*Walter Franz.*

**Staríček, Imrich:** *Eine ebene Lichtwelle in einem total anisotropen Medium.* Mat.-fyz. Sborník, Slovensk. Akad. vied Umeni **1**, 18—28, russische und französische Zusammenfassgn. 29, 30 (1951) [Slowakisch].

**Linfoot, E. H.:** *Error balancing in fast Schmidt cameras.* Monthly Not. Roy. astron. Soc. **111**, 75—93 (1951).

Näherungslösung für die Aufgabe, eine Schmidtsche Spiegelkamera mit einer übers ganze Bildfeld ausgeglichenen Korrektur zu berechnen. Bei der Näherung werden die Bildfehler 5. Ordnung in Rechnung gesetzt und kleine Größen siebenter und höherer Ordnung vernachlässigt. Für die Korrektur werden beliebige Variationen sowohl des Profils der Schmidtschen Korrektionsplatte als auch des Profils der Bildfläche mit der photographischen Schicht zugelassen. Verf. berechnet diejenigen Profile, bei denen das mittlere Quadrat der Lateralaberration auf der photographischen Schicht am kleinsten ist. Dabei wird das Quadrat der Lateralaberration



gemittelt über die Blendenöffnung und über das Bildfeld (wenn das Licht monochromatisch ist; bei mehrfarbigem Licht wird das Quadrat der Lateralaberration auch über das Spektrum gemittelt mit einer Gewichtsfunktion, die durch die spektrale Verteilung der Lichtintensität und der Emulsionsempfindlichkeit gegeben ist). Die Rechnung ist durchgeführt für den gewöhnlichen Typ einer Schmidtschen Kamera, bei dem der Spiegel sphärisch ist, und für einen Typ mit asphärischer Spiegelfläche, den Verf. früher (dies. Zbl. 33, 233) angegeben hatte. *Helmuth Marx.*

**Picht, Johannes:** Beitrag zur Theorie der optischen Schallanalyse. II. Ann. der Physik, VI. F. 9, 381—400 (1951).

**Franke, H. W.:** Richtungsdoppelfokussierung geschwindigkeits- und massenabweichender Teilchen in rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldern. Österreich. Ingenieur-Arch. 5, 371—387 (1951).

Die von R. Wallauscheck [Z. Phys. 117, 569 (1941)] und dem Ref. (dies. Zbl. 41, 126) entwickelte Theorie der Richtungsdoppelfokussierung von Elektronenstrahlbündeln mit kreisförmigem Hauptstrahl in rotationssymmetrischen elektrisch-magnetischen Feldern, wird auf Teilchen abweichender Geschwindigkeiten und Massen ausgedehnt. Die Bedingungen, daß eine Fokussierung auch der Teilchen mit einer abweichenden Geschwindigkeit und Masse erfolgt, werden angegeben. Geschwindigkeits- und Massendispersion werden untersucht und die günstigste Lage der Auffangebene wird angegeben. Unter Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung wird ferner die Form des Öffnungsfehlerscheibchens und das Auflösungsvermögen dieser Geschwindigkeits- und Massenspektrographen mit Richtungsdoppelfokussierung bestimmt. *Walter Glaser.*

**Lenz, Friedrich:** Berechnung der elektronenoptischen Kenngrößen eines speziellen magnetischen Linsenfeldes ohne numerische Bahnintegrationen. Ann. der Physik, VI. F. 9, 245—258 (1951).

Für ein Magnetfeld der Form  $H = H_0(chz/a)^{-1}$ , wie es für schwach gesättigte Polschuhlinsen typisch ist, werden die Differentialgleichungen der achsennahen Elektronenbahnen streng gelöst. Es ergibt sich als allgemeine Lösung  $r = AP_v(thz/a) + BQ_v(thz/a)$  wobei  $P_v$  und  $Q_v$  die Lösungen der Legendreschen Differentialgleichung sind und  $v$  durch  $v(v+1) = g^2 = e\mu_0^2 J^2 / 8\pi^2 m_0 U^*$  definiert ist. Aus den Elektronenbahnen wird der Verlauf der optischen Kenngrößen in Abhängigkeit von der Linsenstärke bestimmt. *Walter Glaser.*

**Grivet, Pierre:** Un nouveau modèle mathématique de lentille électronique. C. r. Acad. Sci., Paris 233, 921—923 (1951).

Verf. untersucht die achsennahen Elektronenbahnen im Magnetfeld der Gestalt  $H = H_0(chz/a)^{-1}$ , das für ungesättigte Polschuhlinsen typisch ist. (Über die elektronenoptischen Eigenschaften des angeführten Feldes hat F. Lenz am 18. V. 1951 bei der 3. Jahrestagung der Deutschen Ges. f. Elektronenmikroskopie in Hamburg berichtet. Die ausführliche Arbeit von F. Lenz (s. vorsteh. Ref.) ist bei der Redaktion der Ann. der Phys. am 18. 6. 1951 eingegangen. Der obige Akademiebericht bezieht sich auf die Sitzung vom 22. 10. 1951. Ann. d. Ref.). *Walter Glaser.*

**Bertein, F.:** Étude des lentilles faibles électrostatiques. La deuxième approximation. J. Phys. Radium 12, 25 A—31 A (1951).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. 42, 211) werden die „Richtungsänderung“ und die „Strahlversetzung“ beim Durchgang durch „schwache“ Elektronenlinsen in zweiter Näherung berechnet. *Walter Glaser.*

## Relativitätstheorie:

**Blanuša, Danilo:** Die Grundlagen der relativistischen Kinematik. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. 6, 1—22 und deutsche Zusammenfassg. 23—32 (1951) [Kroatisch].

Unter der Voraussetzung euklidischer Metrik und der Isotropie des Raum-Zeit-Kontinuums wird mit Hilfe kinematischer Vorstellungen aus dem 1. Newtonschen Axiom und dem Relativitätsprinzip — alle Inertialsysteme sind gleichberechtigt — auf lineare Transformationen zweier Bezugssysteme aufeinander im vierdimensionalen Raum geschlossen. — Bei endlicher Grenzgeschwindigkeit ergibt sich die Lorentz-, bei unendlicher die Galileitransformation. *C. F. v. Weizsäcker.*

**Köhler, Max:** Zum Problem der Planetenbewegung nach der allgemeinen Relativitätstheorie. *Z. Phys.* **130**, 139—143 (1951).

Verf. zeigt, daß die Schwarzschildsche Maßbestimmung — bekanntlich die statische zentral-symmetrische Lösung der Einsteinschen Feldgleichungen für den Massenpunkt — aus dem pseudoeuklidischen Linienelement nicht durch Transformationen gewonnen werden kann. Dies rührt daher, daß der Riemann-Christoffelsche Tensor (R. C.) für die pseudoeuklidische Maßbestimmung verschwindet; die Schwarzschildsche Lösung besitzt jedoch, wie Verf. einzeln zeigt, mehrere nicht verschwindende Komponenten des R. C. Tensors, ist also gekrümmt. Nun kann man aber bekanntlich durch Transformation niemals erreichen, daß ein Tensor, dessen sämtliche Komponenten in dem ursprünglichen Koordinatensystem verschwinden, im transformierten System nichtverschwindende Komponenten erhält. Der Wert der Arbeit liegt also darin, daß der nicht-euklidische Charakter des Schwarzschildschen Linienelementes gezeigt wird. Weiter wird bewiesen, daß umgekehrt jede statische Maßbestimmung bei verschwindender vierdimensionaler Krümmung im Streckenraum die euklidische Geometrie besitzt. In einem zweiten Abschnitt untersucht Verf., welche statischen Linienelemente aus dem pseudoeuklidischen Linienelement durch Transformation gewonnen werden können. Die allgemeine Form dieser Linienelemente (deren R. C.-Tensor verschwinden muß) ist: (1)  $ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 - V^2 dx_4^2$ , wo  $V(x_1, x_2, x_3)$  der Differentialgleichung  $\Delta V = 0$  genügt. Eine Lösung,  $V = x_1$  wird vom Verf. als homogenes Gravitationsfeld interpretiert, doch wird dies leider nicht näher begründet, was um so mehr wünschenswert wäre, als  $V$  zunächst nur die Bedeutung der Lichtgeschwindigkeit hat und z. B. aus der Funktion  $V$  der Schwarzschildschen Lösung, nämlich lt. Köhler  $V^2 = 1 - \alpha/r$  ja auch nicht das Potential  $\alpha/r$ , sondern bekanntlich das Potential  $\alpha/r + b/r^3$  folgt ( $a, b$  Konstante). — Der Fall  $V = x_1$  zeigt aber immerhin, daß in einer euklidischen Metrik Gravitationsfelder vorhanden sein können, ohne daß  $R_{iklm} \neq 0$  werden muß. Solche Gravitationsfelder können aber, wie Verf. zeigte, durch Wahl einer anderen Metrik wegtransformiert werden. *F. Cap.*

**Melvin, M. Avramy:** Symmetry and affinity of electromagnetic fields, charges, and poles. *Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949*, 225—255 (1951).

Nach einer Aufzählung aller Punktsymmetrien des dreidimensionalen Raumes stellt Verf. ein allgemeines „physikalisches Symmetrieprinzip“ auf, aus dem er dann wohlbekannte Tatsachen ableitet. Auch sein Kapitel über „Affinität elektrischer und magnetischer Größen“ lehrt trotz der umständlichen Formulierung den etwas mit der allgemeinen Relativitätstheorie vertrauten Physiker nichts Neues.

*M. R. Schafroth.*

**Schrödinger, E.:** Studies in the non-symmetric generalization of the theory of gravitation. I. *Commun. Dublin Inst. advanced Studies*, Ser. A, Nr. 6, 28 S. (1951).

Verf. untersucht die unitäre, nicht-symmetrische Theorie der Gravitation [Einstein, *J. math. Physics* **46**, 578 (1945) und Einstein und Straus *ibid.* **47**, 731 (1946)] für den Fall fast galileischer  $g_{ik}$ . Es wird ein zum Maxwell'schen Tensor analoger Tensor gebildet, der auch Ableitungen der Feldstärken enthält; seine Spur verschwindet nicht, sodaß auch ein reines Strahlungsfeld ein Gravitationsfeld erzeugt. Dies Gravitationsfeld kann durch Quadraturen im Prinzip bestimmt werden, auch wenn das Maxwell-Feld im betrachteten Gebiet Quellen besitzt. Weiter werden zwei Analoga des Pseudotensors  $t^i_k$  der alten Einsteinschen Theorie aufgestellt und für schwache Felder berechnet. Die verwendete Näherung gibt nicht die Rückwirkung der Felder auf ihre Quellen wieder.

*Wolfram Urich.*

**Vigier, Jean-Pierre:** Introduction géométrique de l'onde pilote en théorie unitaire affine. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 1010—1012 (1951).

**Brogie, Louis de:** Remarque sur la note précédente de J.-P. Vigier. *C. r. Acad. Sci., Paris* **233**, 1012—1013 (1951).

L'A. complétant les résultats d'une Note précédente (ce Zbl. **43**, 209), montre



qu'il est possible de déduire du formalisme des théories unitaires affines une réinterprétation de la théorie de l'onde pilote de M. L. de Broglie en mécanique ondulatoire. La particule élémentaire étant assimilée à une déformation finie de l'espace-temps présentant une singularité localisée dans l'espace, les champs correspondant à des perturbations de la métrique, on montre que la particule suit une géodésique de son propre champ. L'onde de la mécanique ondulatoire s'interprète comme une déformation de l'espace-temps et non plus comme une amplitude de probabilité. L'interprétation statistique de la fonction d'ondes qu'on retrouve en théorie de l'onde pilote résulte de la préparation ergodique des systèmes de particules par les dispositifs macroscopiques. — A la suite de cette Note, M. Louis de Broglie rappelle une forme de la théorie de l'onde pilote, dite de la double solution qu'il avait proposée en 1927 [J. Phys. Radium, VI. Sér. 8, 225—241 (1927)] et dans laquelle il admettait que l'équation des ondes de la mécanique ondulatoire possédait deux types de solutions: les unes comportant une singularité (corpuscule) dont le mouvement était bien déterminé, les autres continues correspondant aux ondes  $\psi$  envisagées ordinairement. Cette théorie échappait aux difficultés de la théorie de l'onde pilote plus restrictive qu'il a exposée au Conseil Solvay de Physique de 1927 et qui a été reprise récemment par M. Bohm. La théorie de M. Vigier qui reprend celle de l'onde pilote sous la forme de la double solution permettra peut-être d'éviter les difficultés que rencontre la théorie de l'onde pilote sans singularité plus restrictive.

Gérard Petiau.

### Quantentheorie:

**Destouches-Février, Paulette:** Sur le caractère ouvert de la mécanique ondulatoire. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 1430—1432 (1951).

Le caractère „ouvert“ de la mécanique ondulatoire (théorie essentiellement indéterministe) est opposé au caractère „fermé“ des théories déterministes, le qualificatif „ouvert“ caractérisant une théorie apte à rentrer dans le cadre d'une théorie plus complète, mais ayant même structure que la première et qui interpréterait des „grandeurs ignorées“ par celle-ci. L'A. conclut à l'impossibilité de rétablir le déterminisme dans une mécanique ondulatoire par l'introduction de grandeurs ignorées.

Antoine Visconti.

**Woodward, P. M.:** Time and frequency uncertainty in waveform analysis. Philos. Mag., VII. Ser. **42**, 883—891 (1951).

Für einen Wellenzug  $\psi(t)$  und das zugehörige Frequenzspektrum  $s(f)$  gilt die (in der Quantenmechanik: Heisenbergsche) „Unschärfe-Relation“  $\delta t \delta f \geq 1/4\pi$ , wenn  $\delta t$ ,  $\delta f$  als mittlere Abweichungs-Quadrate vom Mittelwert, mit  $|\psi(t)|^2$  und  $|s(f)|^2$  als Gewichtsfunktionen, definiert sind. Dabei gilt das Gleichheitszeichen nur, wenn  $\psi(t)$  und damit  $s(f)$  Gauß-Kurven sind. Verf. zeigt, daß man der Unschärferelation die Form einer Gleichung geben kann, wenn man die Unschärfe durch die Autokorrelationsfunktion

$$\chi(\tau, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \psi^*(t + \tau) \exp(-2\pi i \varphi t) dt$$

definiert. Dann gilt für beliebige  $\psi(t)$  stets

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(\tau, \varphi)|^2 d\tau d\varphi = 1.$$

An Beispielen wird weiter gezeigt, daß das Unschärfe-Produkt  $\delta t \delta f$  beliebig große Werte annehmen kann.

Arnold Schoch.

**Yang, L. M.:** A note on the quantum rule of the harmonic oscillator. Phys. Review, II. Ser. **84**, 788—790 (1951).

Aus dem Postulat  $\dot{f} = [f, H]$ , der Hamiltonfunktion  $H = \frac{1}{2}(x^2 + \dot{x}^2)$  und der

Bewegungsgleichung  $\ddot{x} + x = 0$  folgt bei scharfer Fassung des Satzes von der Entwicklung nach einem Orthogonalsystem die Vertauschungsbeziehung  $[x, \dot{x}] = 1$ .  
*Friedrich Hund.*

**Kahan, Théo et Guy Rideau: Sur un principe variationnel général en Physique théorique.** C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 849—852 (1951).

Verff. geben ein Variationsprinzip an, aus dem die Prinzipien von Hulthén, Schwinger und Kohn hergeleitet werden. Vgl. Kato, dies. Zbl. **39**, 425.

*Gerhard Höhler.*

**Schützer, Walter and J. Tiomno: On the connection of the scattering and derivative matrices with causality.** Phys. Review, II. Ser. **83**, 249—251 (1951).

Verff. versuchen für die Streuung nichtrelativistischer Teilchen durch ein endliches Streuzentrum aus der Forderung der Kausalität auf Eigenschaften der  $S$ -Matrix bzw. der  $R$ -Matrix [vgl. Wigner-Eisenbud, Phys. Review **72**, 29 (1947)] zu schließen. Es wird eine Aussage über die Lage der Pole der  $S$ -Matrix auf diese Weise abgeleitet.

*Harry Lehmann.*

**Snyder, Hartland S.: Remarks concerning the adiabatic theorem and the  $S$ -matrix.** Phys. Review, II. Ser. **83**, 1154—1159 (1951).

Verf. gibt eine Reihe von wesentlichen Ergänzungen zu einer Arbeit von Lippmann und Schwinger (dies. Zbl. **39**, 424) und weist auf weitere Schwierigkeiten hin, die mit der Vollständigkeit des Systems der Funktionen  $\psi^+$  zusammenhängen.

*Gerhard Höhler.*

**Dalitz, R. H.: On higher Born approximations in potential scattering.** Proc. Roy. Soc. London, Ser. A **206**, 509—520 (1951).

Verf. berechnet die Streuung eines Dirac-Elektrons am Yukawapotentia aus der Feynman-Dysonischen  $S$ -Matrix (dies. Zbl. **33**, 142) bis zur 2. Ordnung. Für den Grenzfall des Coulombpotentials kommt er auf den aus der exakten Lösung hergeleiteten Ausdruck von McKinley und Feshbach [Phys. Review, II. Ser. **74**, 1759 (1948)] zurück. Im nichtrelativistischen Fall wird für die dritte Bornsche Näherung der Übergang vom Yukawa- zum Coulombfeld durchgeführt. Das letztere ist hier besonders interessant, weil die erste Näherung schon den exakten Wert liefert. — In der Diskussion setzt sich Verf. kritisch mit Arbeiten von Distel, Sauter, Möller und Urban auseinander, die zu anderen Ergebnissen geführt hatten. — Abschließend skizziert Verf. die Berechnung der Streuung eines Vektormesons in zweiter Bornscher Näherung.

*Gerhard Höhler.*

**Feshbach, Herman: Elastic scattering of electrons.** Phys. Review, II. Ser. **84**, 1206—1210 (1951).

**Rose, M. E.: A note on Dirac central field wave functions.** Phys. Review, II. Ser. **82**, 389—391 (1951).

Verf. löst die Diracgleichung im Zentralfeld durch Reihen, die Integraloperatoren enthalten, um sie für Anwendungen, in denen der endliche Kernradius und das Kernpotential eine Rolle spielen, brauchbar zu machen. Er zeigt, daß eine Abweichung vom Coulombfeld im Kern auf 2 von den 4 Eigenfunktionen zu bestimmtem Gesamtdrehimpuls einwirkt, während die 2 andern hauptsächlich durch den Drehimpuls und nicht durch das Feld beeinflusst werden. Er betrachtet weiterhin die Normierungsfaktoren und Phasenverschiebungen.

*Walter Kofink.*

**Rose, M. E. and R. R. Newton: Properties of Dirac wave functions in a central field.** Phys. Review, II. Ser. **82**, 470—477 (1951).

Verff. diskutieren drei Probleme, die bei der Lösung der Diracschen Wellengleichung in einem Zentralfeld eine Rolle spielen, nämlich die Randbedingungen, die zulässigen Potentiale und die Knoten der Wellenfunktionen. Sie stellen für diskrete Energiezustände zwei, für Zustände des Kontinuums eine Randbedingung auf. Die Randbedingung, welche für beide Fälle gilt, schränkt die Wahl des Potentials ein. Sie verlangt, daß das Potential am Ursprung des Polarkoordinatensystems



nicht stärker divergiert als das Coulombsche. Bei der Betrachtung der Knoteneigenschaften der Wellenfunktionen entwickeln die Verf. allgemeinere Methoden als diejenigen, die bei der Behandlung Sturm-Liouvillescher Systeme üblich sind.

*Walter Kofink.*

**Michel, Louis:** Théorème sur les invariants formés de quatre fonctions d'onde de Dirac. C. r. Acad. Sci., Paris **232**, 391—393 (1951).

Verf. leitet ein Theorem über das Verhalten der Kovarianten eines 4-Fermionen-Feldes gegenüber Permutationen der Fermionen ab. Das Theorem besagt, daß sich eine solche Kovariante (von denen es 35 Stück gibt) nach einer beliebigen Permutation der 4 Fermionen als Linearkombination der Kovarianten vor der Permutation darstellen läßt. Verf. stellt die Koeffizienten dieser Linearkombinationen und die Kovarianten vor der Permutation in einer Tabelle zusammen. Es dürfte von Interesse sein, darauf hinzuweisen, daß dieses Theorem in der Arbeit desselben Verf. über die Wechselwirkung zwischen 4 Teilchen von halbzahligem Spin und den Zerfall des  $\mu$ -Mesons Anwendung findet (dies. Zbl. **36**, 276).

*Walter Kofink.*

**Vrkljan, V. S.:** Über die Beziehungen zwischen den drei Diracschen Matrizen. Periodicum math.-phys. astron., II. Ser. **6**, 49—55 und kroatische Zusammenfassung, 55—56 (1951).

Verf. stellt Bilinearrelationen zwischen den Elementen der 3 ersten Diracmatrizen auf. Für seine Matrizen wählt er eine spezielle Darstellung, er setzt sie nämlich aus 2 Dreiersätzen zweireihiger Matrizen zusammen. Die beiden Sätze können verschieden sein und brauchen nicht die ganz spezielle Form der ursprünglichen Paulimatrizen zu haben. Aber sie müssen natürlich 2 Sätze antikommutativer Matrizen sein. Verf. betrachtet 2 Arten des Aufbaus der Diracmatrizen aus den zweireihigen, nämlich in Fall I einen Aufbau quer zur Diagonale, im Fall II in der Diagonalrichtung. In beiden Fällen leitet er 7 spezielle Relationen zwischen jeder Hälfte der Elemente seiner Matrizen ab. Er findet sie mit Hilfe des Quadrats des magnetischen Moments aus der Diracgleichung des Elektrons in Newtonscher Näherung und mit Wellenpaketen als  $\psi$ -Funktionen. Seine Näherungsmethode liefert ihm nur 7 Relationen, während es tatsächlich 10 Relationen dieser Art und eine Unzahl andere gibt, wie man z. B. aus W. Pauli, Zeeman-Festschr. 31—43 (1935) Gleichung (20) erkennt, wenn man dort dieselben speziellen Voraussetzungen für die Matrizen macht wie der Verf. Ferner geht aus der Ableitung des Verf. im Gegensatz zu der Paulis nicht hervor, daß diese Relationen eine reine Folge der Antikommutativität der Diracmatrizen sind und daß zu ihrer Herleitung die Diracgleichung des Elektrons überhaupt nicht erforderlich ist.

*Walter Kofink.*

**Peaslee, D. C.:** Note on the compound Dirac equation. Phys. Review, II. Ser. **84**, 373—374 (1951).

Von L. Biedenharn [Phys. Review, II. Ser. **82**, 100 (1951)] wurde der Vorschlag gemacht, eine lorentzinvariante Wellengleichung für ein achtkomponentiges Feld durch Kombination einer Diracgleichung mit der durch Zeitumkehr aus ihr hervorgehenden Gleichung zu gewinnen. Verf. untersucht diesen Vorschlag systematisch insbesondere im Hinblick auf den freibleibenden Spielraum in den Transformationsseigenschaften der Wellenfunktion und der Definition der Erwartungswerte.

*M. R. Schafroth.*

**Neuman, Maurice:** Fredholm structures in positron theory. Phys. Review, II. Ser. **83**, 1258 (1951).

Verf. diskutiert die Feynmansche Integralgleichung der Positronentheorie nach der Fredholmschen Methode.

*Gerhard Höhler.*

**Jean, Maurice:** Les méthodes de la seconde quantification et de l'espace de configuration en théorie relativiste des systèmes de particules. IV. Dérivation de l'équation du type Tamm-Dancoff pour le deutéron. V. Dérivation de l'équation de Bethe et Salpeter. C. r. Acad. Sci., Paris **233**, 573—575, 602—604 (1951).

**Schwinger, Julian:** On gauge invariance and vacuum polarization. Phys. Review, II. Ser. 82, 664—679 (1951).

Der Vakuumstrom eines „geladenen Dirac-Feldes“ läßt sich durch die Greensche Funktion der Dirac-Gleichung ausdrücken. Man kann dadurch einen Zusatz  $W^{(1)} = \int (dx) L^{(1)}(x)$  zum Wirkungsintegral des elektromagnetischen Feldes auf die Dichte

$$L^{(1)}(x) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} ds s^{-1} \exp(-i m^2 s) \text{tr}(x | U(s) | x)$$

zurückführen. Hier bedeutet  $m$  die Masse,  $\text{tr}$  die Spur nach den Spinor-Indizes und  $U(s) = e^{-iHs}$  mit  $H = \Pi_\mu^2 - \frac{1}{2} e \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ,  $\Pi_\mu = p_\mu - e A_\mu$  mit der üblichen Bedeutung der Symbole. Die Lagrange-Dichte  $L^{(1)}(x)$  entsteht also aus einer Matrix  $\langle x' | U(s) | x'' \rangle$ , d. i. die unitäre Transformation, mit der sich die mit  $H$  als Hamiltonfunktion bestimmte Bewegung eines Teilchens in der Zeit entwickelt. Man kann dadurch das Problem der Vakuumpolarisation auf die Integration punktmekanischer Bewegungsgleichungen von  $x_\mu$  und  $\Pi_\mu$  nach der Eigenzeit zurückführen, in die nur die Feldstärken  $F^{\mu\nu}$  und ihre Ableitungen eingehen, so daß das Verfahren eichinvariant ist. Strenge Lösungen der Bewegungsgleichungen lassen sich für ein konstantes Feld und ein Feld ebener Wellen angeben. Eine Renormalisierung von Ladung und Feldstärke, angewandt auf die modifizierte Lagrange-Funktion für konstante Felder, liefert dann ein endliches, eichinvariantes Resultat mit nichtlinearen Eigenschaften des elektromagnetischen Feldes im Vakuum. Die nichtlinearen Glieder hängen nur ab von  $F = \frac{1}{2}(\mathfrak{H}^2 - \mathfrak{G}^2)$  und  $G = \mathfrak{G}\mathfrak{H}$ . Ein geladenes Feld vom Spin Null führt auf dieselbe Transformationsfunktion. Bei einem ebenen Wellenfelde mit  $F = 0, G = 0$  treten also keine nichtlinearen Vakuum-Erscheinungen auf. Die Theorie wird angewandt auf den spontanen  $\gamma$ -Zerfall eines ungeladenen Mesons vom Spin Null im Felde eines Protons. Die Halbwertszeiten für skalare, pseudoskalare und pseudovektorielle Kopplung werden angegeben, ausgedrückt durch die Mesonenmasse, Meson-Proton-Massenverhältnis und Kopplungskonstante. Für beliebig veränderliche Felder werden Störungsmethoden ausgearbeitet. Die Beziehung zwischen der Eigenzeit-Methode und der Technik der „invarianten Regularisierung“ wird diskutiert. Das wesentliche bei der ersteren ist, daß Divergenzen nur an den Grenzen der Eigenzeit-Integrale (wie oben in  $L^{(1)}$ ) auftreten, wo sie koordinaten- und eichinvariant sind und durch Renormalisierung abgespalten werden können. In einem Anhang wird der Massenoperator eines Elektrons in einem schwachen, homogenen äußeren Felde gebildet und mittels der Eigenzeit-Technik das Zusatzmoment des Elektrons abgeleitet.

Walter H. Wessel.

**Schwinger, Julian:** The theory of quantized fields. I. Phys. Review, II. Ser. 82, 914—927 (1951).

Verf. gibt eine Darstellung der allgemeinen Theorie lokaler quantisierter Felder. Es werden keine Änderungen am physikalischen Inhalt der Theorie vorgenommen, vielmehr handelt es sich um eine den heutigen Methoden angepaßte Formulierung, die geeignet erscheint die Grundlagen und Grundannahmen dieses Gebietes in einheitlicher Weise zusammenzufassen und ihre Zusammenhänge hervortreten zu lassen. Dies mag nach Ansicht des Verf. einen geeigneten Rahmen für neue physikalische Ideen abgeben. — Die zeitliche Entwicklung eines Systems wird hier beschrieben durch eine Transformationsfunktion zwischen den Eigenvektoren der Feldoperatoren, die zu verschiedenen raumartigen Flächen gehören. Für diese Transformationsfunktion wird ein Variationsprinzip, analog dem Wirkungsprinzip der klassischen Theorie angegeben; eine bestimmtes System ist wie sonst durch Angabe einer Lagrange-Funktion charakterisiert. Aus dieser folgen in eleganter Weise Feldgleichungen, der symmetrische Energieimpuls-Tensor und auch die Vertauschungsrelationen für die Feldoperatoren, die sonst meist gesondert durch Korrespondenzbetrachtungen eingeführt wurden. Weiterhin wird die Frage nach der Invarianz gegen Zeitumkehr genauer untersucht. Es wird eine nichtunitäre Transformation angegeben, die eine Beschreibung der Zeitumkehr vermittelt und es wird gezeigt, daß die Forderung der Invarianz gegen diese Transformation auf den Zusammenhang zwischen Spin und Statistik führt.

Harry Lehmann.

**Valatin, J. G.:** On quantum electrodynamics. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. Medd. 26, Nr. 13, 32 S. (1951).

Verf. formuliert eine Quantenelektrodynamik ohne Nebenbedingungen. In der Wechselwirkungsdarstellung werden die Lichtquellen beschrieben durch den



Feldtensor  $F_{\mu\nu}$ , der den Maxwell'schen Vakuumgleichungen gehorcht und dessen Vertauschungsrelationen im Anschluß an Möller und Novobátzky angeschrieben werden. Zur Berücksichtigung der longitudinalen Wechselwirkung führt Verf. noch ein skalares Feld ein. Die Zurückführung auf bekannte Ergebnisse der Quantenelektrodynamik gelingt durch eine kanonische Transformation, durch welche das skalare Feld eliminiert und dafür der bekannte kovariante Ausdruck für die Coulombwechselwirkung eingeführt wird. In der Heisenbergdarstellung genügen die Feldstärkeoperatoren den Maxwell'schen Gleichungen. Abschließend behandelt Verf. die Berechnung der  $S$ -Matrix. *Gerhard Höhler.*

Umezawa, Hiroomi and Susumu Kamefuchi: The vacuum in quantum electrodynamics. Progress theor. Phys. **6**, 543—558 (1951).

Verff. diskutieren die durch die Existenz beliebiger geladener Felder bedingte Polarisierbarkeit des Vakuums. Eine von Störungstheorie freie Formel liefert das interessante (in Spezialfällen bereits bekannte) Resultat, daß in der Entwicklung für den induzierten Strom  $\delta I_\mu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \square^n I_\mu(x)$  alle Koeffizienten  $a_{n+1}$

negativ sind. Insbesondere für  $a_1$  bedeutet das, daß die „wahre“ Ladung  $e/\sqrt{1+a_1}$  stets kleiner ist als die „mathematische“ Ladung  $e$ . — Eine eingehende Diskussion der in den  $a_{n+1}$  auftretenden Divergenzen liefert erneut das bekannte Resultat, daß nur für Spin 0- und Spin  $\frac{1}{2}$ -Felder, bei welchen bloß  $a_1$  divergiert, die Renormalisationstechnik zu einer endlichen Form der Theorie führt. Deren Versagen bei Feldern höheren Spins führt die Verff. zu dem Schluß, daß dem Vakuum „materielle“ Eigenschaften zugeschrieben werden müssen, wie etwa eine besondere diamagnetische Suszeptibilität. *M. R. Schafroth.*

Arnos, E. and S. Zienau: Allgemeine Theorie der Dämpfungsphänomene für nicht-stationäre Prozesse. I. Grundlagen und Zusammenhang mit dem  $S$ -Matrix-Formalismus. Helvet. phys. Acta **24**, 279—295 (1951).

Heitler und Ma (dies. Zbl. **39**, 327) haben eine exakte Zeitintegration der Schrödingergleichung in Form einer Integraldarstellung angegeben. Der Integrand ist erst nach Auflösung der „Heitlerschen Integralgleichung“ bekannt (diese Bezeichnung wird in der Quantenelektrodynamik oft erst nach Weglassen der „round-about transitions“ benutzt). Die Verff. stellen die Heitler-Masche Theorie mit einem auf die Positronentheorie zugeschnittenen Operatorenformalismus dar und entwickeln sie weiter mit dem Ziel, in einer späteren Arbeit strahlungstheoretische Korrekturen zur Linienbreite zu berechnen. Insbesondere wird der Zusammenhang mit der Dyson'schen Entwicklung für die  $S$ -Matrix diskutiert. *Gerhard Höhler.*

Gupta, Suraj N.: On the supplementary condition in quantum electrodynamics. Proc. phys. Soc., Sect. A **64**, 850—852 (1951).

Verf. formuliert die Nebenbedingung auf direktem Weg von der Heisenberg- in die Wechselwirkungsdarstellung. *Gerhard Höhler.*

Yang, L. M.: Equivalence of the  $S$ -matrix in different representations. Phys. Review, II. Ser. **84**, 1258—1259 (1951).

Baranger, Michel: Relativistic corrections to the Lamb shift. Phys. Review, II. Ser. **84**, 866—867 (1951).

Epstein, T.: Note on some calculations in quantum field theory. Progress theor. Phys. **6**, 441—442 (1951).

Parzen, G.: The radiation from an electron moving in a uniform magnetic field. Phys. Review, II. Ser. **84**, 235—239 (1951).

Das Problem der Lichtausstrahlung durch ein Elektron im homogenen Magnetfeld, welches im Zusammenhang mit der am Betatron beobachteten Strahlung von praktischer Bedeutung ist, wurde bisher nur klassisch behandelt (J. Schwinger, dies. Zbl. **40**, 125, G. A. Schott, Electromagnetic radiation, Cambridge 1912), im Vertrauen darauf, daß die Bedingung  $\Delta n \ll n$  ( $n$  = Quantenzahl,  $\Delta n$  = Sprung derselben beim Strahlungsübergang) die Gültigkeit des Korrespondenzprinzips garantiere. Verf. weist nun darauf hin, daß als eine weitere Bedingung

für die Gültigkeit der klassischen Resultate die Verschmierung der Elektronenbahn klein gegenüber der Wellenlänge des emittierten Lichtes sein muß. Diese Bedingung ist für das vorliegende Problem eine stärkere Einschränkung als die erste (im Gegensatz etwa zum Fall des Wasserstoffatoms, wo diese in jener enthalten ist). Es sind deshalb bereits bei Energien von etwa 200 MeV Abweichungen von den klassischen Resultaten zu erwarten. Verf. rechnet das quantentheoretische Problem durch und findet in der Tat beträchtliche Abweichungen vom klassischen Resultat insbesondere im Gebiet kleiner Wellenlänge. Die Tatsache, daß diesbezügliche Experimente von Elder, Langmuir und Pollock [Phys. Review, II. Ser. 74, 52 (1948)] mit dem klassischen Resultat verträglich waren, erklärt Verf. daraus, daß diese sich auf den Bereich langer Wellen beschränken.

*M. R. Schafroth.*

**Petiau, Gérard: Sur le calcul de la section efficace d'émission du bremsstrahlung électromagnétique.** C. r. Acad. Sci., Paris 233, 1581—1583 (1951).

In zwei früheren Noten [dies. Zbl. 38, 408 und C. r. Acad. Sci., Paris 232, 153 (1951)] hat Verf. das Matricelement  $H_1$  für Bremsstrahlung beim Stoß zweier unterscheidbarer geladener Spin  $\frac{1}{2}$ -Teilchen aufgestellt. Es wird nun die Mittelung von  $H_1^2$  über die Polarisationsrichtungen des Lichtquants ausgeführt. Ein Ausdruck für den Wirkungsquerschnitt als Funktion der experimentell interessanten Größen (Streuwinkel, Energie) wird nicht gegeben.

*M. R. Schafroth.*

**Tani, Smio: Connection between particle models and field theories. I.** Progress theor. Phys. 6, 267—285 (1951).

In der Feldtheorie ist es oft erlaubt, die Wirkungen der Nullpunktsschwankungen eines Fermionenfeldes zu vernachlässigen. (In Dyson'scher Sprache heißt das: alle Graphen mit geschlossenen Fermionenlinien weglassen.) Verf. zeigt, daß man in diesem Fall aus einer Beschreibung der Fermionen ohne zweite Quantisierung („Einteilchentheorie“) dieselben Resultate wie aus der Feldtheorie gewinnt, wenn man nur die negativen Energiezustände in richtiger Weise berücksichtigt. Zu diesem Zwecke erweist sich eine von Pryce (dies. Zbl. 32, 236) zuerst angegebene unitäre Transformation, welche Energie und Spin des Elektrons zugleich auf Diagonalform bringt, als praktisch; diese erlaubt in jedem Schritt der Rechnung eine anschauliche Interpretation aller Operatorgrößen.

*M. R. Schafroth.*

**Nishijima, K.: Generalized Furry's theorem for closed loops.** Progress theor. Phys. 6, 614—615 (1951).

**Coester, F.: Principle of detailed balance.** Phys. Review, II. Ser. 84, 1259 (1951).

**Schweber, S.: Perturbation theory and configuration space methods in field theory.** Phys. Review, II. Ser. 84, 1259—1260 (1951).

**Visconti, A.: Contributions à l'étude de quelques points de la théorie de R. P. Feynman.** J. Phys. Radium 12, 726—734 (1951).

L'A. expose et généralise quelques points de la théorie de R. P. Feynman (ce Zbl. 37, 124, 38, 133) en introduisant explicitement l'opérateur d'évolution dont la densité spatiale remplace l'amplitude de transition de Feynman. L'équation intégrale de Feynman est interprétée au moyen de suites de diffusions effectives ou virtuelles. Cette interprétation est également introduite dans la formulation par l'action proposée antérieurement par R. P. Feynman [Reviews modern Phys. 20, 367 (1948)].

*Gérard Petiau.*

**Karplus, Robert and Maurice Neuman: The scattering of light by light.** Phys. Review, II. Ser. 83, 776—784 (1951).

Verff. drücken die Wirkungsquerschnitte verschiedener nichtlinearer Effekte in der Quantenelektrodynamik durch den in einer früheren Arbeit [Phys. Review, II. Ser. 80, 380—385 (1950)] von ihnen aufgestellten Polarisationsensor aus. Für die Streuung von Licht an Licht werden die Rechnungen im einzelnen durchgeführt und die Resultate für die Streuwinkel  $0^\circ$  und  $90^\circ$  im Schwerpunktsystem bei beliebigen Energien angegeben. Für die bereits früher behandelten speziellen Fälle stimmen die Ergebnisse mit den damaligen Resultaten überein.

*Harry Lehmann.*



**Leite Lopes, J.:** On the particle picture of quantized Bose fields. I. Anais Acad. Brasileira Ci. **23**, 39—60 (1951).

Die Äquivalenz zwischen der Behandlung des nichtrelativistischen Mehrteilchenproblems im Konfigurationsraum und nach der Methode der Wellenquantelung wurde von Fock (dies. Zbl. **4**, 280) bewiesen. Verf. untersucht den relativistischen Fall für ein reelles oder geladenes, skalares oder pseudoskalares Mesonfeld.

*Gerhard Höhler.*

**Borgardt, A.:** Antikommutative Matrizen in der Theorie des Mesons. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **78**, 1113—1114 (1951) [Russisch].

Die Grundgleichungen des Kemmerschen Formalismus (dies. Zbl. **23**, 190) werden so dargestellt, daß sich nicht nur die Kombinationen vektorielles und pseudoskalares oder pseudovektorielles und skalares Mesonenfeld durch eine einzige Wellengleichung darstellen lassen, sondern auch alle vier Typen zugleich. Als wesentlich erweist sich dabei die Verwendung einer 16-reihigen hermiteschen Matrix, mit deren Hilfe sich die Wellenfunktionen der einen Gruppe in die der anderen transformieren lassen.

*Edwin Gora.*

**Sawada, K.:** Note on some type of interaction. Progress theor. Phys. **6**, 637—638 (1951).

**Umezawa, H., Y. Takahashi and S. Kamefuchi:** On the multiple production of mesons. Progress theor. Phys. **6**, 428—429 (1951).

**Peaslee, D. C.:**  $\beta$ -matrix formalism as  $x \rightarrow 0$ . Progress theor. Phys. **6**, 639—641 (1951).

**Kaplon, M. F.:** The contribution of the Pauli moment to  $\pi$ -meson production by photons. Phys. Review, II. Ser. **83**, 712—715 (1951).

Für den Prozeß der Photomeson-Erzeugung hat Brückner [Phys. Rev. **79**, 641—650 (1950)] neben den Matrix-Elementen der Ordnung  $eg$  auch Korrekturen der Ordnung  $eg^3$  berechnet, letztere aber nur für Mesonenergien dicht oberhalb der Energieschwelle; er zeigt, daß in dem erwähnten Energiebereich die Korrekturen einer Wechselwirkung des elektromagnetischen Feldes mit einem anomalen Nucleon-Moment äquivalent sind. Verf. führt diese Wechselwirkung in halb-empirischer Weise als zusätzlichen Term bereits im Hamilton-Operator ein und berechnet das Matrix-Element der Ordnung  $eg$ . Die qualitative Übereinstimmung des Wirkungsquerschnittes für  $\pi^+$ -Erzeugung mit der Erfahrung wird durch den Zusatzterm nicht beeinträchtigt, das Verhältnis von  $\pi^0$ - zu  $\pi^+$ -Erzeugung jedoch in dem von der Erfahrung geforderten Sinne verschoben. Es wird die skalare Theorie mit skalarer Kopplung und die pseudoskalare Theorie mit beiden Kopplungstypen betrachtet.

*Wolfram Urich.*

**Drell, S. D.:** Low energy photomeson production in hydrogen. Phys. Review, II. Ser. **83**, 555—560 (1951).

Verf. behandelt das Meson-Nucleon-System nach der Bloch-Nordsieck-Methode (dies. Zbl. **17**, 235) und gibt stationäre Lösungen an, deren Gültigkeit nicht von der Größe der Kopplungskonstanten abhängt. Dabei werden die Wirkungen des Nucleon-Rückstoßes vernachlässigt und die Komponenten sowohl des Spin- als auch des isotopen Spinvektors als untereinander vertauschbar betrachtet. Die verwendete Theorie: ladungssymmetrisch, pseudoskalar mit pseudovektorieller Kopplung. Die von der Wechselwirkung mit dem elektromagnetischen Feld induzierten Übergänge werden nach der üblichen Störungstheorie berechnet. Das Matrix-Element enthält einen Faktor  $\exp(-\text{const}/(k^2 + \mu^2)^{3/2})$ ,  $k, \mu$  Meson-Impuls und -Masse, der bei  $k = k_{\text{max}}$  abgeschnitten wird;  $k_{\text{max}}$  die reziproke Compton-Wellenlänge des Nucleons. Die Rechnungen liefern keine quantitativen Resultate, geben aber die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Photon-Energie, die Winkelverteilung und das Verhältnis von  $\pi^0$ - zu  $\pi^+$ -Erzeugung richtig

wieder, letzteres im Gegensatz zu früheren Rechnungen 2. Ordnung in der „weak-coupling“-Theorie [K. A. Brückner und K. M. Watson, Phys. Review, II. Ser. 79, 187 (1950)].  
*Wolfram Urich.*

**Machida, S. and T. Tamura:** On the photo-meson production from heavy nuclei. Progress theor. Phys. 6, 437—439 (1951).

**Teng, Lee C.:** Polarization of vector mesons produced in nucleon-nucleon collisions. Phys. Review, II. Ser. 84, 308—314 (1951).

L'A. calcule par l'emploi de la méthode classique des perturbations à l'approximation de Born, la polarisation des mésons vectoriels émis au voisinage du seuil de création, dans le système du centre de gravité, au cours du choc de deux nucléons. Le calcul est effectué en utilisant un potentiel nucléaire statique central déduit des expériences de choc  $n - p$  et de la forme

$$V(r) = v(r) [c_1 + c_2(\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)}) + c_3(\vec{\tau}_{(1)}, \vec{\tau}_{(2)}) + c_4(\vec{\sigma}_{(1)} \vec{\sigma}_{(2)}) (\vec{\tau}_{(1)} \vec{\tau}_{(2)})]$$

et en considérant l'hamiltonien d'interactions méson vectoriel-nucléon soit de type vectoriel, soit de type tensoriel. Les éléments de matrices obtenus montrent en première approximation une polarisation complète du méson vectoriel créé, soit dans un processus de choc inélastique nucléon-nucléon, soit dans un processus de formation du deutéron. L'A. propose diverses méthodes permettant de mettre en évidence expérimentalement cette polarisation.  
*Gérard Petiau.*

**Ioffe, B., A. Rudik und I. Šmuškevič:** Die Bildung von  $\gamma$ -Quanten und neutralen Mesonen beim Einfangen von  $\pi$ -Mesonen durch Deutonen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 403—406 (1951) [Russisch].

Verf. berechnet Wahrscheinlichkeiten für die Erzeugung von Photonen und von neutronen Mesonen bei Einfang eines negativen Pi-Mesons durch ein Deuteron aus der  $K$ -Schale. Er nimmt dabei einen Massenunterschied zwischen Pi-Meson und neutralem Meson von 10 Elektronenmassen an und betrachtet alle möglichen Kombinationen von pseudoskalaren und skalaren Mesonen. Die Wahrscheinlichkeiten für die Erzeugung eines skalaren bzw. pseudoskalaren neutralen Mesons bei Einfang eines Pi-Mesons des entgegengesetzten Typs sind im Verhältnis 293 bzw. 125 größer als bei Einfang eines Pi-Mesons des gleichen Typs. Vergleich mit experimentellen Daten läßt schließen, daß sowohl die Pi-Mesonen als auch die neutralen Mesonen pseudoskalar sind.  
*Edwin Gora.*

**Cheston, W. B.:** On the reactions  $\pi^- + d \rightleftharpoons p + p^*$ . Phys. Review, II. Ser. 83, 1118—1122 (1951).

Verf. berechnet den Wirkungsquerschnitt  $\sigma(E)$  und  $\sigma(\theta)$  der Reaktion  $\pi^+ + d \rightarrow p + p$  auf Grund halb phänomenologischer Absätze der verschiedenen Mesonentheorien für Mesonenenergien von einigen bis zu 100 MeV.  $E$  = Mesonenenergie,  $\theta$  = Winkel zwischen den Protonen im Schwerpunktsystem. Entsprechend berechnet man die umgekehrte Reaktion. Man hofft, durch Vergleich mit der Erfahrung feststellen zu können, ob das geladene  $\pi$ -Meson pseudoskalaren oder pseudovektoriellen Charakter hat. Die übrigen Möglichkeiten sind durch die Untersuchungen von Tamor [Phys. Review, II. Ser. 82, 38 (1951)] betreffend die Absorption von  $\pi$ -Mesonen aus der  $K$ -Schale des Deuteriums ausgedehnt.  
*K.-H. Höcker.*

**Ida, K.:** Production of vector  $\pi$ -mesons by high energy nucleon-nucleon collisions. Progress theor. Phys. 6, 258—259 (1951).

**Fernbach, S., T. A. Green and K. M. Watson:** The scattering of  $\pi$ -mesons by deuterons. Phys. Review, II. Ser. 84, 1084—1089 (1951).

**Johnson, M. H.:** Inelastic scattering of  $\pi$ -mesons. Phys. Review, II. Ser. 83, 510—512 (1951).

Man untersucht die nach elastischer Streuung an einem freien Nukleon zu erwartende Verteilung von Mesonen mäßiger Energie. Diese Streuverteilung sollte



die inelastische Streuung an zusammengesetzten Kernen beschreiben, falls diese Streuung nur vom relativen Impuls des Mesons bezüglich eines einzigen Nukleons des Gesamtkerns bestimmt wird. Der Kern als Ganzes wirkt dann nur insofern mit, als er gewisse Grenzen für die Impulse der ihn aufbauenden Nukleonen im Anfangs- und Endzustand setzt. Nach der Rechnung sollte das Meson nur in sehr wenigen Fällen einen größeren Energiebetrag verlieren. Das steht im Widerspruch mit der Erfahrung, woraus geschlossen wird, daß das angestoßene Nukleon bereits während der Wechselwirkung mit dem Meson einen erheblichen Teil seiner aufgenommenen Energie an den übrigen Kern abgibt.

*K.-H. Höcker.*

**Enatsu, H. and P. Y. Pac:** On the mass of cohesive meson and the mass difference of nucleons. II. Progress theor. Phys. 6, 435—436 (1951).

**Sawada, K.:** On the interaction of cohesive field. Progress theor. Phys. 6, 626—726 (1951).

**Umezawa, H., T. Takahashi and S. Kamefuchi:** On the meson cloud around the nucleons. Progress theor. Phys. 6, 426—427 (1951).

**Takahashi, Y.:** Meson current around the nucleon. Progress theor. Phys. 6, 624—626 (1951).

**Ataka, Y.:** On the exchange current. Progress theor. Phys. 6, 627—628 (1951).

**Nakabayasi, K. and I. Sato:** Radiative corrections to anomalous magnetic moment of nucleon in pseudoscalar meson theory. Progress theor. Phys. 6, 252—256 (1951).

**Enatsu, H.:** On the selfenergies of nucleons. Progress theor. Phys. 6, 434—435 (1951).

**Taketani, Mituo, Seitaro Nakamura and Muneo Sasaki:** On the method of the theory of nuclear forces. Progress theor. Phys. 6, 581—586 (1951).

**Ataka, Y.:** On the nuclear potential in the meson theory. Progress theor. Phys. 6, 256—258 (1951).

**Moran, James H.:** Discrete energy levels of a nonlinear oscillator. J. appl. Phys. 22, 1355—1358 (1951).

Verf. zeigt, daß das typische Charakteristikum des Planckschen Oszillators, die Existenz von diskreten Energiestufen, auch rein klassisch verstanden werden kann. Ein Oszillator, dessen Schwingung einer Differentialgleichung von der Form  $(1) \ddot{q} + F(\dot{q}) + q = 0$  gehorcht, besitzt nämlich, wenn man von sehr rasch verlaufenden Übergängen absieht, ebenfalls diskrete Energiestufen. Eine graphische Konstruktion zeigt, daß für bestimmte Funktionen  $F(\dot{q})$  bestimmte Grenzkurven in der Phasenebene  $(p, q)$ , wo  $p = \dot{q}$  (Masse  $m = 1$ ), existieren, denen alle Schwingungen nach Absolvierung eines nur kurz dauernden Übergangszustandes zustreben, ganz unabhängig von den jeweiligen Anfangsbedingungen. Verf. referiert dann kurz über eine Arbeit von Eckweiler (Studies in non-linear vibration theory, New York University 1946), welche diese kritischen Grenzkurven genauer behandelt. Abschließend behandelt Verf. die Wechselwirkung solcher „pseudo-Planckscher“, doch klassischer, Oszillatoren mit der Umwelt. Der Oszillator nimmt nur dann Energie aus der Umwelt auf, wenn diese Energie hinreicht, um ihn in seinen nächsten „Quantenzustand“ zu befördern. Kommt der Oszillator jemals in einen „nicht-quantisierten“ Zustand, so bewirkt das Dämpfungsglied eine rasche Annäherung an den stabilen, diskreten Zustand. Für eine solche Dämpfung, die Energie nach außen abgibt (bzw. von außen annimmt, bis wieder diskrete Zustände erreicht sind), wären die verschiedensten physikalischen Modelle denkbar, doch gibt Verf. keine an. Es wird nur angedeutet, daß die Lösung nichtlinearer Maxwellgleichungen direkt zu einem Satz solcher diskreter Oszillatoren hinführen müßte und damit eine rein klassische Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes möglich werden könnte. Die sich sofort aufdrängende Frage der Superponierbarkeit solcher Lösungen wird nicht gestreift, jedoch wird auf die Bornsche Elektrodynamik als vielleicht mögliche Modifikation der Feldgleichungen zur Erreichung dieses Zieles hingewiesen. — Die Arbeit schließt mit der Erwähnung eines Buches von Born (Atomic Physics, London 1947), in welcher dieser selbst die Möglichkeit der Erklärung des quantenhaften Verhaltens des Planckschen Oszillators durch nichtlineare Glieder ins Auge faßt. Sollte der von Verf. und anderen Autoren angeschnittene Gedankengang auch mathematisch voll gangbar sein, so würde dies große Tragweite haben: eine rein klassische Erklärungsmöglichkeit für typisch quantenhafte Phänomene ins Auge fassen zu können.

*F. Cap.*

Dirac, P. A. M.: A new classical theory of electrons. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 209, 291—296 (1951).

Wenn man ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen in üblicher Weise Potentiale einführt, so sind diese bekanntlich nur bis auf eine Eichtransformation festgelegt. Die hierin liegende Willkür benutzt Verf. zur Beschreibung der Ladungen, für die man sonst neue dynamische Variable einzuführen pflegte. Seine Feldgleichungen lauten  $\partial F_{\mu\nu}/\partial x_\nu = \lambda A_\mu$ ;  $A_\mu A^\mu = k^2$  für die fünf Feldgrößen  $A_\mu, \lambda$ . Die Lorentzkonvention und die mit ihrer Hilfe hergeleiteten Wellengleichungen gelten also nicht mehr.  $-\lambda A_\mu$  wird mit der Viererstromdichte identifiziert. Es gelingt zu zeigen, daß infinitesimale Ladungen sich im Feld gemäß den Lorentz'schen Bewegungsgleichungen verhalten. Verf. gibt noch die Hamiltonfunktion an und diskutiert die Frage der Quantelung. [Bem. des Ref.: Man kann zeigen, daß die Dirac'sche Theorie der Maxwell-Lorentz'schen Theorie für kontinuierlich verteilte Ladung äquivalent ist und daß sie als Grenzfall aus dem anschaulichen Wellen- und auch Teilchenbild hervorgeht. Ref., Ann. der Physik. VI. F. 10, 196 (1952)].

Gerhard Höhler.

Bagge, Erich: Die Polarisation des Vakuums als Ursache einer Feldbegrenzung beim Elektron. Z. Phys. 130, 650—655 (1951).

Verf. verallgemeinert die Elektrodynamik, um bereits klassisch die Vakuum-polarisation berücksichtigen zu können. Er führt für das Vakuum eine Dielektrizitätskonstante ein, die vom skalaren Potential abhängt und löst die hiermit folgende nichtlineare Differentialgleichung für das statische Feld einer Punktladung. (Bem. des Ref.: Der Ansatz gehört in den Rahmen der Theorien von Mie und Born-Infeld. Die in der Arbeit nicht durchgeführte Diskussion der Invarianzforderungen dieser Theorien dürfte Schwierigkeiten aufzeigen.)

Gerhard Höhler.

Heisenberg, W.: Paradoxien des Zeitbegriffs in der Theorie der Elementarteilchen. Festschr. Akad. Wiss. Göttingen 1951, math.-phys. Kl., 50—64 (1951).

Verf. analysiert die Schwierigkeiten, die von der Vereinigung der Forderungen der Quantentheorie mit denen der Relativitätstheorie herrühren. Es werden dann die verschiedenen Ansätze zu ihrer Beseitigung diskutiert, neben den Methoden der Renormalisierung vor allem die Arbeiten des Verf. und von Pais-Uhlenbeck. Bei den letzteren beiden treten Paradoxien des Zeitbegriffs auf, die jedoch wahrscheinlich nicht direkt beobachtbar sind. Verf. vermutet, daß die Materie durch ein einheitliches Spinorfeld beschrieben werden kann, für das eine nichtrenormalisierbare Theorie gilt. In Sonderfällen bei kleiner Energie gelten dann renormalisierbare Näherungsausdrücke.

Gerhard Höhler.

Rayski, Jerzy: Non-local quantum electrodynamics. Acta phys. Polon. 10, 300—302 (1951).

Für die Kopplung eines nichtlokalen Spinorfeldes mit einem elektromagnetischen Feld, ausgedrückt durch eine Integralgleichung, wird die S-Matrix untersucht.

Friedrich Hund.

Yukawa, H.: On the difference between local and non-local fields. Progress. theor. Phys. 6, 133—134 (1951).

Tokuoka, Z. and Y. Katayama: Some remarks on the non-local field theory. Progress theor. Phys. 6, 132—133 (1951).

Endo, S. and H. Kanazawa: Note on the „champ soustractif“ of Louis de Broglie. Progress theor. Phys. 6, 436—437 (1951).

Husimi, K. and R. Utiyama: Note on Belinfant's new theory. Progress theor. Phys. 6, 432—434 (1951).

Lepsius, Richard: Prinzipielle Betrachtungen im Periodischen System der Elemente. Kernphysikalische Betrachtungen. I. Z. Phys. 130, 403—408 (1951).



Die ausgezeichneten Zahlen im Kernbau werden mit Kombinationen von Binomialkoeffizienten in Zusammenhang gebracht. *K.-H. Höcker.*

**Beresteckij, V. B. und I. Ja. Pomerančuk:** Die Umwandlung eines geladenen  $\pi$ -Mesons in ein neutrales Meson beim Zusammenstoß mit einem Proton und einem Deuteron. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 803—806 (1951) [Russisch].

Wirkungsquerschnitte für die Umwandlung eines  $\pi$ -Mesons in ein neutrales Meson bei Streuung an freien Kernteilchen und an Deuteronen werden unter der Annahme berechnet, daß beide Mesonen pseudoskalar sind. Betreffs der Kopplung werden die folgenden Annahmen gemacht: (a) pseudoskalare, (b) pseudovektorielle Kopplung für beide Mesonen; (c) pseudoskalare Kopplung für das  $\pi$ -Meson und pseudovektorielle Kopplung für das neutrale Meson oder umgekehrt. Die beiden in (c) betrachteten Möglichkeiten führen zu den gleichen Resultaten. *Edwin Gora.*

**Breit, G. and M. C. Yovits:** Representation of nucleon-nucleon singlet  $S$  scattering. Proc. nat. Acad. Sci. USA 37, 771—774 (1951).

Für die Behandlung der Proton-Proton-Streuung ist die Funktion  $f = \{2\pi/[-1 + \exp(2\pi\eta)]\} \cotg K_0 + 4\gamma - 2 + 2 R. P. [I'(i\eta)/I(i\eta)] - 2\ln \eta$  von Wichtigkeit. Über deren Eigenschaften sind bisher mehrere Arbeiten veröffentlicht, wobei teils das Variationsprinzip zugrunde gelegt wurde, teils andere Verfahren benutzt wurden. Die vorliegende Veröffentlichung gibt ein Näherungsverfahren, in dem die Beziehungen zwischen den verschiedenen Methoden erkennbar sind. Es wird weiter angegeben, wie man das allgemeine Glied in der Entwicklung von  $f$  nach Potenzen der Energie  $E$  oder nach Potenzen eines linearen Parameters wie der Tiefe des Potentialtopfes gewinnen kann. *K.-H. Höcker.*

**Yamaguchi, Y.:** Remarks on the neutron-proton scattering with tensor force. Progress theor. Phys. 6, 439—440 (1951).

**Basu, D.:** Scattering of neutrons by protons at high energies. Indian J. Phys. 25, 246—256 (1951).

Berechnung des Wirkungsquerschnittes für Proton-Neutronstreuung für die Möller-Rosenfeld-Mischung in Bornscher Näherung unter Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung. Die in der Arbeit vertretene Ansicht über die Güte dieser Näherung erscheint dem Ref. zweifelhaft. *Harry Lehmann.*

**Messiah, Albert M. L.:** Scattering of slow neutrons by  $H_2$  and  $CH_4$ . Phys. Review, II. Ser. 84, 204—214 (1951).

Verf. behandelt die Streuung langsamer Neutronen durch Moleküle an Hand des von Sachs und Teller angegebenen klassischen Näherungsverfahrens (MTR), welches das streuende Teilchen durch einen Massentensor (MT) beschreibt. Die Brauchbarkeit dieses Verfahrens ist wesentlich an die Bedingung geknüpft, daß die Energie  $E_0$  der einfallenden Neutronen ebenso wie das Energieäquivalent  $kT$  der Temperatur des streuenden Mediums erheblich größer ist, als der mittlere Abstand der Rotationszustände des Moleküls. Während die Berechnungen von Sachs und Teller (MTR) außerdem die Molekülschwingungen außer Acht lassen und damit  $E_0$  klein gegenüber der Differenz der Schwingungszustände des Atoms voraussetzen, berücksichtigt die vorliegende Arbeit (MTV) die Molekülschwingungen. Für das Verhältnis des Streuquerschnittes eines im Molekül gebundenen Nukleons zu einem raumfesten Nukleon werden allgemeine Formeln angegeben und der Zusammenhang zwischen MTR und MTV diskutiert. Der elastische Streuquerschnitt für Wasserstoffmoleküle ( $H_2$ ) wird unter Berücksichtigung des Dopplereffektes der thermischen Bewegung gegeben. Bei der Berechnung des unelastischen Streuquerschnittes wird der Dopplereffekt vernachlässigt. Außerdem kann das asymptotische Verhalten mit wachsendem  $E_0$  für den totalen Streuquerschnitt bestimmt werden. Ähnliche Untersuchungen wurden für Methan ( $CH_4$ ) durchgeführt. In dem zu erwartenden Gültigkeitsbereich der Theorie sind die Ergebnisse in befriedigender Übereinstimmung mit den Experimenten. *Günter Ecker.*

**Dolginov, A. Z.:** Die Winkelkorrelation zwischen einem Elektron, das bei einer Paarkonversion gebildet wird, und einem  $\gamma$ -Quant, das bei dem nachfolgenden Kernübergang emittiert wird. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 77, 237—240 (1951) [Russisch].

Berechnung der Matricelemente für magnetische und elektrische Konversionsübergänge ermöglicht Bestimmung der Korrelation zwischen den entstehenden

Elektronen und Photonen. Die den Übergängen zugeordneten Multipole können dabei beliebig gewählt werden. Als Beispiel wird der Fall betrachtet, daß der Konversionsübergang Dipolcharakter hat.

*Edwin Gora.*

**Huby, R. and H. C. Newns: Nuclear excitation by electric interaction with charged particles.** Proc. phys. Soc., Sect. A **64**, 619—632 (1951).

Die unelastische Streuung geladener Teilchen auf Grund der elektromagnetischen Wechselwirkung mit dem Atomkern wird untersucht. Der totale Wirkungsquerschnitt ist nach verschiedenen Methoden berechnet. Es ergibt sich gute Übereinstimmung. Weniger gute Übereinstimmung ergeben die Ausdrücke für die Winkelverteilung. Damit sind Abschätzungen von Weißkopf und von Guth zur Bestimmung von Kernniveaus auf Grund von elastischer Streuung geladener Teilchen erheblich verbessert. Die Beobachtung der Prozesse allerdings ist schwierig, da sie meist von der Rutherford'schen Streuung überdeckt werden. Eine Kontrolle der Formeln ist daher nur beschränkt möglich.

*K.-H. Höcker.*

**Tralli, N. and G. Goertzel: The theory of internal conversion.** Phys. Review II. Ser. **83**, 399—404 (1951).

Verbesserung der auf der älteren Quantentheorie basierenden Theorie von Mott und Taylor auf exakter quantenmechanischer Grundlage. Die Ergebnisse stimmen mit denen der älteren Theorie überein.

*K.-H. Höcker.*

**Géhéniau, J. et R. Servranckx: La polarisabilité du proton.** Acad. roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. **37**, 138—145 (1951).

Dans une première partie de ce travail, les solutions approchées (valables jusqu'aux termes comprenant la carré du champ électromagnétique) de l'équation:

$$\{\partial_\mu \mp i A_\mu\}^2 - \mu^2\} \bar{D}(X, X') = \delta(\underline{X}' - \underline{X}) \delta(t' - t)$$

sont étudiées. Puis, utilisant la densité d'énergie connue du méson pseudoscalaire, les AA., par des transformations analogues à celles de J. Schwinger (ce Zbl. **33**, 234) obtiennent la densité de self-énergie du proton. Deux théorèmes intéressants facilitent le calcul de certaines intégrales du type de Fourier. Enfin, les résultats ainsi obtenus sont appliqués au calcul de la self-énergie du proton dans un champ magnétique uniforme: une simple renormalisation de la masse (sans celle de la charge) suffit à rendre les résultats finis et avec les champs électromagnétiques usuels, l'énergie due à la polarisabilité du proton se révèle négligeable.

*Antoine Visconti.*

**Simon, A., M. E. Rose and J. M. Jauch: Polarization and alignment of nuclei.** Phys. Review, II. Ser. **84**, 1155—1159 (1951).

**Blin-Stoyle, R. J.: Polarized nuclear reactions.** Proc. phys. Soc., Sect. A **64**, 700—711 (1951).

Für die Winkelverteilung bei Streuprozessen und Kernreaktionen werden allgemeine Formeln abgeleitet. Dabei wird gefordert, daß sich die Geschosse und bzw. oder die beschossenen Kerne in vollkommen definierten Spin- und Bahndrehimpulszuständen einschl. festgelegter räumlicher Quantenzahl befinden („polarisiert“ sind). Man betrachtet im einzelnen die folgenden Fälle. a) Nur das Geschöß ist polarisiert. b) Geschöß und beschossener Kern sind polarisiert. Letzteres wird durch ein magnetisches Feld bewirkt. Als Ergebnis wird allgemein, insbesondere aber im Falle b) eine größere Kompliziertheit in der Winkelverteilung der gestreuten Teilchen festgestellt. Wenn nur die Geschosse (Spin  $\frac{1}{2}$ ) polarisiert sind (Fall a), kann die Winkelverteilung exakt angegeben werden. Einige Sonderfälle sind quasi trivial: Polarisation parallel zur Einfallsrichtung ist ohne Einfluß; desgleichen spielt die Polarisation für solche Prozesse, die nur durch S-Wellen beschrieben werden, keine Rolle. Möglicherweise lassen sich aus dem allgemeinen Formalismus interessante Hinweise auf den Ablauf der  $D - D$ -Reaktion und die Art der Kernkräfte gewinnen, da die auslaufenden Protonen und Neutronen polarisiert sein könnten. Der Grad der Polarisation kann jedoch ohne spezielle Annahmen über die Art der Kernkräfte nicht vorhergesagt werden.

*K.-H. Höcker.*



Arnous, Edmond: Sur la diffusion cohérente des rayons X par les atomes et l'influence du shielding des électrons. I. II. C. r. Acad. Sci. Paris **232**, 693—695, 798—799 (1951).

Verf. eröffnet hiermit eine Reihe von Arbeiten, die die kohärente Streuung von Röntgenstrahlen an abgeschirmten Atomkernen mit der Löchertheorie in Zusammenhang bringen sollen. *Delof Lyons.*

Deutsch, Martin: Angular correlations in nuclear reactions. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. **14**, 196—226 (1951).

Biedenharn, L. C., G. B. Arfken and M. E. Rose: Angular correlation in the triple cascade transitions. Phys. Review, II. Ser. **83**, 586—593 (1951).

Die Korrelation der Winkel zwischen den Bahnen der Teilchen, die von einem angeregten Kern nacheinander kaskadenartig emittiert werden, ist Gegenstand der Untersuchung. Das Verfahren wird auf zwei Vorgänge spezialisiert: 1) auf die Emission von drei  $\gamma$ -Quanten oder  $\gamma$ -Quanten und  $\alpha$ -Teilchen und 2. auf die Emission von zwei  $\gamma$ -Quanten oder  $\alpha$ -Teilchen, die einem Einfang eines Teilchens mit Spin und Bahndrehimpuls folgen. Es ist grundsätzlich brauchbar für alle Prozesse, bei denen drei Richtungen, evtl. auch Polarisationsrichtungen, von Bedeutung sind. *K.-H. Höcker.*

Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot: On the theory of beta-radioactivity. II. A theoretical discussion of the polarization of electron beams and its observation. Physica **17**, 1—16 (1951).

(Teil I, s. dies. Zbl. **38**, 425.) Es wird die Möglichkeit einer experimentellen Untersuchung des Polarisationszustandes von Elektronenstrahlen theoretisch behandelt. Verf. rechnen mit ebenen Wellen gleichen Impulses  $p$ . Beschreibung des unpolarisierten Strahls im Ruhssystem mit Hilfe einer hermiteschen Dichtematrix. Unter „Spinrichtung“ wird die Richtung des zugehörigen Drehmomentes im Ruhssystem verstanden, sinngemäß wird von „transversaler“ (II) oder „longitudinaler“ (III) Polarisation des Elektronenstrahls gesprochen. II kann mit Hilfe von Streuexperimenten untersucht werden, zu III vgl. nachsteh. Referat. Untersucht werden Einfach- und Doppelstreuung in der Ebene. Die Intensitäten bzw. ihre Asymmetrien als Folge der Polarisation werden bei einem Streuwinkel von  $90^\circ$  in Abhängigkeit von der kinetischen Energie der Elektronen angegeben. Es zeigt sich, daß die Feststellung des Polarisationszustandes eines Positronenstrahles zumindest sehr schwierig sein wird. Für negative Elektronen hingegen liegen Messungen vor: Doppelstreuung an Goldfolien bei 400 keV, vgl. Shull, Phys. Review, II. Ser. **61**, 198 (1942) sowie Shull, Chase und Myers, Phys. Review, II. Ser. **63**, 29 (1943).

*Bernhard Ilchner.*

Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot: On the theory of beta-radioactivity. III. The influence of electric and magnetic fields on polarized electrons beams. Physica **17**, 17—32 (1951).

In Fortsetzung früherer Arbeiten wird der Einfluß langsam veränderlicher elektrischer und magnetischer Felder auf den „Polarisations“-Zustand eines Elektronenstrahles (vgl. vorstehendes Referat II) untersucht. Theoretisch werden zunächst spinlose Teilchen mit der Klein-Gordon-Gleichung behandelt, sodann Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  nach Pauli und nach Dirac. Es wird gezeigt, daß man mit Hilfe eines zur Fortpflanzungsrichtung der Elektronen transversalen elektrischen Feldes, durch das man den Strahl um  $90^\circ$  umlenkt, eine longitudinale (Spinrichtung parallel zur Fortpflanzungsrichtung) in eine transversale Polarisation umändern kann, welche dann mit Hilfe der in II angegebenen Methode an Hand von Streuexperimenten analysiert werden kann. Verf. geben außerdem einen Hinweis auf eine Möglichkeit zur direkten Messung des magnetischen Momentes des Elektrons durch eine geeignete Kombination von Zweifachstreuung, Magnetfeld und HF-Depolarisator. *Bernhard Ilchner.*

**Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot:** On the theory of beta-radioactivity. IV. The polarization of beta-rays emitted by aligned nuclei in allowed transitions. *Physica* 17, 81—97 (1951).

Verff. geben eine Theorie der  $\beta$ -Strahlung von Ensembles von Atomkernen mit erlaubten  $\beta$ -Übergängen, deren Spins nicht isotrop verteilt sind, sondern eine mehr oder weniger ausgeprägte „Polarisation“ aufweisen [sog. aligned nuclei, experimentelle Darstellung vgl. u. a. Rose, *Phys. Review*, II. Ser. 75, 213 (1950)]. Der Wechselwirkungsoperator wird als willkürliche Linearkombination der 5 Diracschen Invarianten angesetzt, Endresultate werden spezialisiert für reine Tensor- bzw. Pseudovektor-Wechselwirkung. Ergebnis:  $\beta$ -Strahlung von aligned nuclei bleibt sphärisch symmetrisch, ist jedoch polarisiert; Polarisationsgrad in Abh. von  $E$  wird angegeben. Experimentelle Beobachtung (vgl. vorsteh. Referate) erscheint nicht einfach, möglicherweise eignet sich  $^{64}\text{Cu}$ .  
*Bernhard Ilchner.*

**Taketani, Mituo, Seitaro Nakamura, Ken-ichi Ono and Minoru Umezawa:** On the matrix elements of the beta decay. *Progress theor. Phys.* 6, 286—294 (1951).

**Umezawa, Minoru, Seitaro Nakamura, Yoshio Yamaguchi and Mituo Taketani:** Nuclear shell model and the  $\beta$ -decay schemes. I. *Progress theor. Phys.* 6, 408—425 (1951).

**Ivanenko, D. und N. Kolesnikov:** Über doppelten  $\beta$ -Zerfall. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 81, 771—773 (1951) [Russisch].

**Holte, Gunnar:** On the space energy distribution of slowed-down neutrons. *Ark. Fys.* 2, Nr. 48, 523—549 (1951).

Die stationäre Verteilung der im homogenen, unendlich ausgedehnten Medium (beliebige Kerne, speziell  $D$ - und  $C$ -Kerne) verlangsamten Neutronen wird bezüglich des Abstandes  $R$  von der punktförmigen, isotropen Quelle (der Stärke  $Q$  und Energie  $E_0$ ) und der „Energie“-Variablen  $x = \log(E_0/E)$  berechnet. Die freie Stoßlänge wird dabei konstant gesetzt. Als Verteilungsfunktion (pro  $dx$  und Volumeinheit) bekommt man dann  $F_0(R, x) = \frac{Q}{E x^{3/2}} \mu e^{-\nu R}$ .  $\nu$  und angenähert auch  $\mu$  hängen nur von  $R/x$  ab, und es lassen sich für sie analytische Ausdrücke angeben.

*Detlof Lyons.*

**Davison, B., S. A. Kushneriuk and W. P. Seidel:** Influence of a small black cylinder upon the neutron density in an infinite noncapturing medium. *Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949*, 172—195 (1951).

Betrachtet wird die räumliche Verteilung der Neutronen in einem unendlich ausgedehnten, nicht absorbierenden Medium, in das ein unendlich langer „schwarzer Zylinder“ gebracht wird, dessen Oberfläche alle auf sie auffallenden Neutronen absorbiert (Radius  $a$  in Einheiten der konstanten freien Weglänge für die elastische isotrope Streuung). Die Integralgleichung (eine zur Milneschen analoge, siehe z. B.: Peierls, dies. Zbl. 22, 429) wird durch ein sukzessives Verfahren gelöst, oder vielmehr eine „lineare Extrapolationslänge“ berechnet, d. h. die reziproke logarithmische Ableitung der asymptotischen Dichte auf der Oberfläche des „schwarzen“ Körpers. Falls  $a \ll 1$  ist, ergibt sich:

$$\lambda = 4/3 + (1 - 16/3\pi) a \log a - 0,2164 a + O(a^2 \log^2 a).$$

[Anm. d. Ref.: Es läßt sich übrigens zeigen, daß  $\lambda$  für jeden beliebigen konvexen Körper im Grenzfall Volumen gegen Null den Wert  $4/3$  hat, während bei unendlich großem Volumen gilt:

$$1 - \lambda = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \operatorname{arccotg} \frac{1}{\pi} \left( \frac{2}{t} - \log \frac{1+t}{1-t} \right) dt = 1 - 0,71044609.]$$

*Detlof Lyons.*



**Davison, B.:** Influence of a black sphere and of a black cylinder upon the neutron density in an infinite non-capturing medium. Proc. phys. Soc., Sect. A **64**, 881—902 (1951).

Die Problemstellung ist dieselbe wie in der vorsteh. referierten Arbeit, nur daß auch noch eine Kugel und ein Zylinder endlicher Länge betrachtet wird. Die Grenzfälle  $a \ll 1$  und  $a \gg 1$  werden gesondert behandelt. Für  $a \ll 1$  ergibt sich für die Kugel:

$$\lambda = \frac{4}{3} - \frac{5}{4}a - 0,97827 a^2 \log a - 1,4002 a^2 + O(a^3 \log^k a) \quad (k \geq 1).$$

*Detlof Lyons.*

**Sheppard, C. W. and A. S. Householder:** The mathematical basis of the interpretation of tracer experiments in closed steady-state systems. J. appl. Phys. **22**, 510—520 (1951).

Es wird eine Theorie für biologische Untersuchungen mit Hilfe radioaktiver Isotope entwickelt. Es handelt sich hier um den Austausch von radioaktiven „gezeichneten“ Atomen gegen körpereigene Atome des stabilen Isotops, ein Vorgang, den Verff. mit Interfusion bezeichnen. Der zeitliche Ablauf dieser Vorgänge wird durch eine Gleichung beschrieben, die formal mit der Diffusionsgleichung übereinstimmt. Die Lösung dieser Gleichung wird für zwei Fälle diskutiert: 1. für den Fall, daß ein bestimmtes Gebiet, z. B. ein bestimmtes Organ des Körpers mit einer Reihe von anderen, voneinander getrennten Gebieten im Austausch steht; 2. für den Fall einer kettenartigen Verbindung solcher Gebiete. Zur Veranschaulichung bedienen sich Verff. hierbei Analogien aus der Elektrodynamik. Als Endziel der Untersuchungen wird dann gezeigt, wie aus dem Ablauf der Vorgänge in den einzelnen Gebieten auf die Stärke des zwischen den Gebieten stattfindenden Austausches geschlossen werden kann.

*Hans-Otto Wüster.*

**Sachs, R. G.:** On the nature of the  $V$ -particles. Phys. Review, II. Ser. **84**, 305—307 (1951).

L'observation de la désintégration de la particule  $V$  neutre de G. D. Rochester et C. C. Butler [Nature **160**, 855 (1947)] en un proton et un méson chargé suggère que cette particule est un neutron dans un état excité avec une énergie d'excitation d'environ 200 MeV se désintégrant en un méson  $\pi$  négatif et un proton. Toutefois, la vie moyenne observée de  $3 \cdot 10^{-10}$  sec. est en contradiction avec ce schéma qui conduit à une vie moyenne de l'ordre de  $10^{-23}$  sec. Pour essayer de rendre compte de la vie moyenne longue observée, l'A. suggère d'attribuer au nucléon une structure très complexe dans laquelle interviendrait un grand nombre de mésons virtuels. L'excitation étant alors répartie sur un grand nombre de degrés de liberté, on montre que selon différents processus possibles, la probabilité de formation de l'état excité conduisant directement à la désintégration peut être très petite. Si  $n_0$  est le nombre moyen de pions de chaque charge dans le nucléon et si  $f$  est le nombre d'états accessibles à chaque pion, la vie moyenne pour l'émission du pion peut être estimée à  $t = f n_0^f \times 10^{-23}$  sec qui pour  $f = 10$  et  $n_0 = 4$  peut être en accord avec la vie moyenne observée.

*Gérard Petiau.*

**Grigorov, N. L.:** Die Zusammensetzung der harten Komponente der kosmischen Strahlung in der Stratosphäre. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. **76**, 381—384 (1951) [Russisch].

Das Verfahren, die  $\mu$ -Mesonen in der Atmosphäre durch Differenzbildung zwischen schauerbildender und primärer Komponente zu ermitteln [Vernov u. a., Isvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. phys. **14**, Nr. 1 (1950)], kann nicht richtig sein. In die Differenz müssen noch andere Teilchen eingehen, denn die vom Verf. durchgeführte Berechnung der gesamten von den Zerfallselektronen übernommenen Energie z. B. stimmt anderenfalls mit den Experimenten [etwa: Stroud u. a., Phys. Review, II. Ser. **76**, 1005 (1949)] nicht überein.

*Detlof Lyons.*

**Fermi, Enrico:** Angular distribution of the pions produced in high energy nuclear collisions. Phys. Review, II. Ser. **81**, 683—687 (1951).

Fußend auf einer früheren Arbeit des Verf. [Progress theor. Phys. **5**, 570 (1950)] wird auf Grund der Annahme, daß die Wechselwirkung zwischen Pionen ( $\mu$ -Mesonen) und Nukleonen so stark ist, daß für alle mit den Erhaltungssätzen vereinbarten Zustände ein statistisches Modell anwendbar ist, die Winkelverteilung der Pionen berechnet. Es ergibt sich Unabhängigkeit von der Energie. Die Ergebnisse sind mit den Experimenten vereinbar.

*Detlof Lyons.*

**Knipp, Julian K. and Rufus C. Ling:** On the ionization yields of heavy particles. Phys. Review, II. Ser. **82**, 30—35 (1951).

Für kleine Geschwindigkeiten  $v$  schwerer Teilchen, die eine Materieschicht durchdringen, wenn also  $v \approx c^2/\hbar$  ( $e$  = Elektronenladung,  $\hbar$  = Plancksche Konstante) ist, findet die Bremsung nicht nur durch die Elektronen der Atomhülle statt, sondern auch noch durch elastische Stöße an den Atomkernen (s. N. Bohr, dies. Zbl. **33**, 45). Verf. stellt für die sekundäre Ionisation durch die angestoßenen Kerne eine Integro-Differentialgleichung auf. Er schätzt zunächst die in ihr auftretenden Koeffizienten ab, die in die Bremsvermögen bezüglich der Elektronen und der Kerne eingehen.

*Detlof Lyons.*

**Millford, F. J. and L. L. Foldy:** Energy degeneration of cosmic-ray primaries. Phys. Review, II. Ser. **81**, 13—19 (1951).

Unter der Annahme, daß ein Mesonen-erzeugender Stoß zwischen zwei Mesonen vollkommen unelastisch ist (bei hohen Energien und energieunabhängigem Stoßquerschnitt), kann man den Energieabbau der primären kosm. Strahlung (die aus Nukleonen bestehend angenommen wird) und das Energiespektrum der sehr energiereichen Nukleonen als Funktion der Tiefe unter der Atmosphäre für jedes primäre Spektrum berechnen und erhält analytische Lösungen für  $\delta$ -Funktion- und Potenzspektrum. Obgleich dieses Modell sehr beschränkt ist, ist es von gewisser Bedeutung, da es den größtmöglichen Energieabbau liefert. Der Abschneideeffekt des Magnetfeldes der Erde wird diskutiert.

*Detlof Lyons.*

**Foldy, L. L.:** Diffusion of high energy gamma-rays through matter. I. Fundamental equations. II. Solution of the diffusion equation. Phys. Review, II. Ser. **81**, 395—399, 400—404 (1951).

I. Die Diffusionsgleichungen unter Berücksichtigung des Photo-, Compton- und Paarbildungs-Effektes werden aufgestellt und gelöst hinsichtlich der Absorption der Gammastrahlen beim Durchgang durch eine Materieschicht und ihrer Winkelverteilung. Für senkrechten Auffall ist letztere eine Gaußfunktion, deren Breite in einfacher Weise von der Energie abhängt und zwar mit abnehmender Energie zunimmt. — II. Die Ergebnisse von I. werden benutzt zur numerischen Auswertung für  $\gamma$ -Strahlen hoher Energie (17 MeV, in Wasser), wo ihr Gesamtquerschnitt als energieunabhängig anzusehen ist.

*Detlof Lyons.*

**Peebles, Glenn H. and Milton S. Plesset:** Transmission of gamma-rays through large thickness of heavy materials. Phys. Review, II. Ser. **81**, 430—439 (1951).

U. a. wird der Durchlässigkeitskoeffizient harter Gammastrahlen bei dicken Schichten durch Anwendung einer Matrizenmethode der numerischen Rechnung zugänglich gemacht. Haben wir etwa zwei aufeinanderliegende Schichten und kennen wir die Umwandlung der Spektren für jede einzelne Schicht, so ist ( $O$  und  $S$  seien lineare Operatoren!):  $r'_1 = O l_1 + S r_1$ ,  $l'_1 = S l_1 + O r_1$ , wo  $r$ ,  $r'$  die rechts auffallenden bzw. austretenden Spektren sind. Weiter ist:  $r'_2 = O^{(2)} l_1 + S^{(2)} r_2$ ,  $l'_1 = S^{(2)} l_1 + O^{(2)} r_2$ , worin  $O^{(2)} = O \left( \sum_{n=0}^{\infty} S^{2n} \right) O$ ,  $S^{(2)} = S + O \left( \sum_{n=0}^{\infty} S^{2n+1} \right) O$ .

Die Spektren beziehen sich auf die Winkel- und Energieverteilung. Die Operatoren werden mit Hilfe der Klein-Nishina-Formeln bestimmt. Die Beschränkung auf schwere Materialien läßt eine angenäherte Berücksichtigung des Photoeffektes zu.

*Detlof Lyons.*



**Eyges, Leonard:** Effective photon energies of high energy photo-nuclear reactions. Phys. Review, II. Ser. 81, 981—987 (1951).

Anwendung der gewöhnlichen Kaskadentheorie zur Auswertung der Experimente von K. Strauch [Phys. Review, II. Ser. 81, 973 (1951)]. *Detlof Lyons.*

**Thomson, Sir George and P. E. Hodgson:** The cascade production of cosmic ray stars and the relative number of charged and uncharged particles. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 978—989 (1951).

**Eyges, L. and S. Fernbach:** Angular and radial distributions of particles in cascade showers. Phys. Review, II. Ser. 82, 23—29 (1951).

Die Momente der Winkel- und radialen Verteilung der Elektronen und Photonen werden für Energien, die wesentlich größer als die „kritische Energie“  $\varepsilon$  sind, wo also der Energieverlust durch Ionisation zu vernachlässigen ist, für das Maximum des Kaskadenschauers berechnet. Für Energien nahe bei  $\varepsilon$  lassen sich bei Berücksichtigung dieses Ionisationsverlustes die nullten Momente in Form von Potenzreihen in  $\varepsilon/E$  ( $E$  = Elektronenenergie) usw. schreiben, deren Koeffizienten dann dazu benutzt werden, die allgemeinen Momente bei Berücksichtigung des Ionisationsverlustes zu berechnen. Verf. erhält dann Formeln, die in guter Näherung für  $E \geq 3\varepsilon$  gelten. *Detlof Lyons.*

**Jánossy, L. and H. Messel:** Cascade theory including ionization loss. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 1—4 (1951).

Verff. zeigen, daß die Methode von Bhabha und Chakrabarty [Proc. roy. Soc. London, Ser. A 181, 264 (1943); ferner dies. Zbl. 39, 431] (dort wird der Ionisationsverlust schon in den Kaskadendiffusionsgleichungen der Höhenstrahlung berücksichtigt, während früher eine „kritische Energie“ erst nachträglich eingeführt wurde, die die Ionisation näherungsweise beschreiben sollte, die aber jetzt als eine gewisse Energieverschiebung wieder eine Rolle spielt) vereinfacht werden kann, was für die numerische Auswertung von Bedeutung ist (bei vielen Teilchen hinter dünnen Schichten). *Detlof Lyons.*

**Messel, H. and G. W. Gardner:** The solution of the Janossy G-equation. Phys. Review, II. Ser. 84, 1256 (1951).

**Messel, H.:** On the fluctuation of a nucleon cascade in homogeneous nuclear matter and calculation of average numbers. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 8, 125—135 (1951).

Ausgehend vom Formalismus Janossys (dies. Zbl. 37, 141) werden die Schwankungen der Kernschauerteilchen um ihren Mittelwert berechnet. Rechnungen und auch Ergebnisse sind ganz ähnlich wie bei der Elektronen-Photonen-Kaskade (Janossy u. Messel, dies. Zbl. 39, 237). Die Annahme, daß die das „diffundierende“ Medium bildenden Nukleonen stetig verteilt sind, soll in einer späteren Arbeit fallengelassen werden und dann der „Zusammenballung“ der Nukleonen zur Kernen Rechnung getragen werden. *Detlof Lyons.*

**Jánossy, Lajos and Harry Messel:** Investigation into the higher moments of a nucleon cascade. Proc. Roy. Irish Acad., Sect. A 54, Nr. 16, 245—262 (1951).

Ausführung der in einer früheren Arbeit von H. Messel (vorsteh. Ref.) gemachten Ankündigung. *Detlof Lyons.*

**Messel, H.:** On the nucleon cascade with ionization loss. Phys. Review, II. Ser. 83, 21—25 (1951).

Es werden in den Integro-Differential-Gleichungen für die Nukleonenkaskade (in Abhängigkeit von Tiefe und Energie) die Wirkungsquerschnitte für die Nukleonenumwandlungen bei Zusammenstößen mit den Kernen von W. Heitler und L. Janossy (dies. Zbl. 39, 431) übernommen. Die Anfangsbedingungen bzw. die Lösungen sind im wesentlichen dieselben bzw. durch analoge Methoden zu gewinnen wie in der gewöhnlichen Kaskadentheorie der Elektronen und Photonen [H. J. Bhabha and S. K. Chakrabarty, Proc. Roy. Soc., London, Ser. A 181, 267

(1943); ferner dies. Zbl. 39, 431]. Das gilt namentlich für den Ionisationsverlust. Angegeben werden Kurven über das Verhältnis Neutronen zu Protonen sowie solche über den Einfluß des Ionisationsverlustes, der hier im Rahmen des Modells exakt berücksichtigt wird. *Detlof Lyons.*

Messel, H.: On the theory of a nucleon cascade. Commun. Dublin Inst. advanced Studies, Ser. A, Nr. 7, 103 S. (1951).

Die theoretischen Überlegungen dieser Arbeit decken sich im wesentlichen mit denen aus: Messel, vorsteh. Ref. *Detlof Lyons.*

Messel, H.: Further results on the fluctuation problem in electron-photon cascade shower theory and the probability distribution function. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 807—813 (1951).

Fortsetzung der Arbeit von L. Janossy and H. Messel (dies. Zbl. 39, 237). Es werden Zahlenwerte in Tabellenform angegeben, wobei von den umfangreichen Tabellen für die ersten Momente von L. Janossy and H. Messel Gebrauch gemacht wird. *Detlof Lyons.*

Scott, W. T.: On fluctuations and the general distribution problem in electron cascades. Phys. Review, II. Ser. 82, 893—900 (1951).

In der Kaskadentheorie für Elektronen und Photonen bei ihrer Anwendung auf die Experimente der Höhenstrahlung ist es von großer Bedeutung, einige Information über die wirkliche Anzahl der Schauerteilchen in Abhängigkeit von der Tiefe (etwa unter der Atmosphäre) und ihren Energien zu erhalten. Die entsprechende Verteilungsfunktion würde man aus der „master-equation“ (s.: Nordsieck, Lamb and Uhlenbeck, dies. Zbl. 23, 288) berechnen müssen. In der vorliegenden Arbeit wird ein Versuch im Anschluß an Bhabha, Friedmann und Janossy unternommen, das Problem einer numerischen Rechnung zugänglich zu machen. Ohne große Abweichungen von den wirklichen Verhältnissen befürchten zu müssen, wird von dem schematischen Furry-Modell für die Entwicklung der Kaskade Gebrauch gemacht, bei dem u. a. die Photonen ganz beiseite gelassen werden. Wegen der Einzelheiten sei auf die Originalarbeit verwiesen. [Eine andere Methode, das Problem anzugreifen, s. vorsteh. Referate. (Anm. d. Ref.)] *Detlof Lyons.*

## Bau der Materie:

Garstang, R. H.: Energy levels and transition probabilities in  $p^2$  and  $p^4$  configurations. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 115—124 (1951).

Die Energieniveaus der Konfigurationen  $p^2$  und  $p^4$  werden berechnet unter Mithinberücksichtigung der Wechselwirkung des Spins eines Elektrons nicht nur mit „seiner“ Bahn, sondern auch mit anderen Bahnen und anderen Spins. Die Spin-Wechselwirkungsparameter werden empirisch bestimmt und mit Berechnungen nach der Methode des self-consistent field einschließlich Austausch verglichen. Die Übergangswahrscheinlichkeiten der verbotenen Übergänge werden innerhalb der Konfiguration  $p^2$  für die Spektren C I, N II, O III, F IV und Ne V sowie innerhalb  $p^4$  für O I, F II und Ne III neu berechnet. Die Überlagerung verschiedener Konfigurationen konnte bei den ganzen Rechnungen nicht berücksichtigt werden. Die Ergebnisse weichen von früheren Rechnungen S. Pasternacks [Astrophysic. J. 92, 129, (1940)] zum Teil erheblich ab. *A. Unsöld.*

Foster, E. W.: Nuclear effects in atomic spectra. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 14, 288—315 (1951).

Lamb jr., Willis E.: Anomalous fine structure of hydrogen and singly ionized helium. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 14, 19—63 (1951).

Preuß, Heinzwerner: Berechnung des  $H_2$ -Molekül-Grundzustandes. (Bemerkungen zu einem von A. v. Mohrenstein angegebenen Verfahren). Z. Phys. 130, 239—241 (1951).



**Mohrenstein, A. v.:** Berechnung des  $H_2$ -Moleküls. (Erwiderung auf die obige Arbeit von H. Preuß). Z. Phys. 130, 242 (1951).

**Brachman, Malcolm K.:** Thermodynamic functions in the generalized Fermi-Thomas theory. Phys. Review, II. Ser. 84, 1263 (1951).

**Wild, E.:** On Boltzmann's equation in the kinetic theory of gases. Proc. Cambridge philos. Soc. 47, 602—609 (1951).

Die (nicht-stationäre) Boltzmannsche Stoßgleichung wird im Falle der Abwesenheit eines äußeren Kraftfeldes bezüglich des „Fluxionsoperators“ integriert und so in eine reine Integralgleichung übergeführt (ganz analog der Ableitung der Milneschen Integralgleichung), die dann durch Aufstellung von Rekursionsformeln auf Grund der bekannten Iterationsverfahren weiterbehandelt wird. Speziell für Maxwellmoleküle wird der Formalismus so weiter ausgebaut, daß dann die Konvergenz für ein endliches Zeitintervall untersucht werden kann. *Detlof Lyons.*

**Hadwiger, H.:** Der kinetische Radius nichtkugelförmiger Moleküle. Experientia 7, 395—398 (1951).

Die Moleküle eines idealen Gases werden als kongruente konvexe Körper angenommen, die sich geradlinig und translativ nach dem Maxwellsehen Geschwindigkeitsgesetz bewegen und dabei ganz frei einander durchdringen können. Es wird gezeigt, daß die in diesem Modell in natürlicher Weise erklärte mittlere Weglänge  $\lambda = 4\sqrt{2} \pi / D(M^2 + 4\pi F)$  ist, wobei  $D$  die Anzahl-dichte,  $M$  das Integral der mittleren Krümmung und  $F$  die Oberfläche der Moleküle bedeutet. Im Falle kugelförmiger Moleküle vom Radius  $\varrho$  geht diese Formel in die klassische Formel  $1/\lambda = 4\sqrt{2} \pi D \varrho^2$  über. Der Beweis beruht auf einem vom Verf. herrührenden Funktionalsatz (dies. Zbl. 42, 164 erstes Ref.), der gestattet, die expliziten Mittelwertsintegrationen durch eine Koeffizientenbestimmung zu ersetzen.

*László Fejes Tóth.*

**Bohm, David and David Pines:** A collective description of electron interactions. I. Magnetic interactions. Phys. Review, II. Ser. 82, 625—634 (1951).

Es wird ein neues Näherungsverfahren für die Behandlung eines Kollektivs von Elektronen entwickelt. Der Übergang von der üblichen Einteilchennäherung (Hartree, Fock) zu dieser „Kollektivbeschreibung“ bezüglich der geordneten Oszillationsbewegungen („Plasmaschwingungen“) wird durch eine geeignete kanonische Transformation vollzogen. Die Gesamt-Hamiltonfunktion der Wechselwirkung zwischen Kollektivladungen und dem transversalen elektromagnetischen Feld läßt sich aufspalten in drei Summanden: Der erste enthält die Koordinaten des Kollektivfeldes und beschreibt die Erregung der Oszillationen, die beiden anderen stellen die kinetische Energie der Elektronen und die verbleibende Teilchenwechselwirkung (außerhalb der Plasmaschwingungen) dar, die sich als Abschirmung kurzreichweitigen Charakters deuten läßt. Zunächst nur Berücksichtigung der magnetischen Wechselwirkung, die coulombsche ist einer späteren Arbeit vorbehalten.

*Detlof Lyons.*

**Huxley, L. G. H.:** A general formula for the conductivity of a gas containing free electrons. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 844—861 (1951).

Vorliegende Arbeit untersucht die Bewegung von Elektronen in Gasen unter dem Einfluß eines homogenen elektrischen Feldes beliebiger Zeitabhängigkeit bei gleichzeitiger Anwesenheit eines konstanten homogenen magnetischen Feldes. Die Berechnungen bestimmen nach der Methode der freien Flüge die Elektronendriftgeschwindigkeit. Sie setzen dementsprechend voraus, daß die als punktförmig angenommenen Elektronen eine Bahn beschreiben, die sich aus Bahnsegmenten zusammensetzt, deren Länge durch eine exponentielle Verteilungsfunktion gegenüber der mittleren freien Weglänge festgelegt ist und deren Richtungsorientierung als gleichmäßig anzusehen ist. Entsprechende Vorstellungen gelten für die Moleküle

des Gases. Die hergeleitete allgemeine Formel erlaubt die verschiedenartigsten Anwendungen z. B. bei der Berechnung der Leitfähigkeit von Metallen, Halbleitern und Gasen, sowie bei der Untersuchung elektromagnetischer Schwingungen in einem ionisierten Gas usw. Die wichtigen Spezialfälle eines konstanten bzw. eines sinusförmigen elektrischen Feldes mit und ohne Magnetfeld werden näher untersucht.

*Günter Ecker.*

**Müller-Lübeck, Kurt:** Über die ambipolare Raumladungsströmung bei ebenen Elektroden. *Z. angew. Phys.* **3**, 409—415 (1951).

Verbesserung der Langmuirschen Theorie der ambipolaren Raumladungsströmung aus dem Jahre 1929. Unter Beibehaltung der zitierten Überlegungen läßt sich das Verhältnis der ambipolaren Stromdichte zum entsprechenden unipolaren Raumladungsstrom durch ein Integral ausdrücken, welches das Verhältnis der Ionen- zur Elektronenstromdichte als Parameter  $a$  enthält und das Potential als Funktion des Abstandes von der Elektrode bestimmt. Die Auswertung dieses Integrals für den Fall kathodischer und anodischer Sättigungsemission wurde von Langmuir an Hand eines numerischen Verfahrens durchgeführt. Verf. nimmt eine strenge, geschlossene Auswertung des Integrals unter Zurückführung auf die elliptischen Funktionen erster und zweiter Gattung vor. Potentialverlauf, Feldstärke und Raumladung werden für verschiedene Werte des Parameters  $a$  berechnet und graphisch wiedergegeben. Für die elektrodennahen Gebiete entwickelt Verf. eine Näherungsformel des Potentials, deren Bedeutung jedoch unter Berücksichtigung der zugrunde liegenden Voraussetzungen fraglich erscheint. Der Vergleich mit den Langmuirschen Ergebnissen zeigt nur geringfügige numerische Abweichungen

*Günter Ecker.*

**Wannier, Gregory H.:** On the motion of gaseous ions in a strong electric field. *I. Phys. Review, II. Ser.* **83**, 281—289 (1951).

Ein ionisiertes Gas steht unter dem Einfluß eines starken homogenen elektr. Feldes und es wird die Driftbewegung der Ionen (kleine Dichte) untersucht. Die Voraussetzung dabei ist: Die thermische Energie soll vernachlässigbar klein sein gegenüber der Energie, die die Ionen aus dem Feld bekommen. Interessiert man sich nur für die mittleren Geschwindigkeiten der Ionen und Moleküle und die Driftgeschwindigkeit der Ionen, so läßt sich das Problem für den Fall konstanter mittlerer Stoßzeit zwischen den Ionen und Molekülen exakt durchrechnen. Der charakteristische Zug dieser auf der Boltzmannschen Gleichung fußenden Rechnung ist, daß [im Gegensatz zu der ähnlichen Rechnung A. V. Hershey, *Phys. Review, II. Ser.* **56**, 619 (1939)] man mit isotroper Verteilung nicht mehr auskommt. Insbesondere wird hier das Modell harter Kugeln gleicher Masse diskutiert und ein numerisches Beispiel auf die Experimente angewandt.

*Detlof Lyons.*

**Massignon, Daniel:** Sur l'hydrodynamique quantique de l'hélium aux très basses températures. II. Les deux fluides. *C. r. Acad. Sci., Paris* **232**, 1407—1409 (1951).

Ausdehnung der Untersuchungen des Verf. (dies. Zbl. **42**, 227) auf Flüssigkeiten nach einer früher [*C. r. Acad. Sci., Paris* **228**, 1280—1282 und **1331**—**1333** (1949)] angegebenen Methode.

*Wolfram Urlich.*

**Andreae, J. H. and John Lamb:** Ultrasonic relaxation processes in pure liquids. *Proc. phys. Soc., Sect. B* **64**, 1021—1031 (1951).

Verff. beschäftigen sich in dieser Arbeit mit der von Hall und Herzfeld aufgestellten Theorie der Schallabsorption in Flüssigkeiten. Durch Abänderung einiger Annahmen gelingt es ihnen, eine neue Relation herzuleiten, die in einigen Flüssigkeiten eine befriedigende Erklärung der beobachteten Relaxationseffekte liefert. Experimentelle Daten werden mit der Theorie verglichen. So erhalten Verff. das Ergebnis, daß das Ultraschallverhalten von Essigsäure und Propionsäure von auftretenden Biegeschwingungen der CH-Bindungen abhängt. Ebenfalls soll auch bei



Schwefelkohlenstoff eine Biegeschwingung auftreten. Einige unvollständige experimentelle Daten von Toluol lassen vermuten, daß hier die CH-Bindungen in den Methylgruppen Längsschwingungen ausführen. Sichere Aussagen lassen sich jedoch erst dann machen, wenn die experimentellen Messungen vervollständigt werden.

*Hans Falkenhagen.*

**Levine, S.: The free energy of the double layer of a colloidal particle.** Proc. phys. Soc., Sect. A **64**, 781—790 (1951).

In einer Reihe von Arbeiten hat Verf. bereits eine Anzahl von Sätzen hergeleitet, welche sich auf die freie Energie der elektrischen Doppelschicht eines kolloidalen Teilchens in einem Elektrolyten beziehen. Weitere Sätze ähnlicher Natur wurden vom Verf. gefunden und sind in dieser Arbeit zusammengestellt. Die Überlegungen beziehen sich immer nur auf ein einzelnes kolloidales Teilchen, welches eine beliebige Gestalt haben kann. Es sei erwähnt, daß stets die Poisson-Boltzmannsche Gleichung verwendet wird. Vernachlässigt wird bei Aufstellung der freien Energie der Beitrag, welcher von der gegenseitigen Anziehung der Ionen unter sich herrührt. — Es sind im wesentlichen in dieser Mitteilung 3 Hauptergebnisse zu erwähnen. Als erstes finden wir eine Verallgemeinerung eines von Casimir im Jahre 1948 aufgestellten Theorems. Der Ladungsprozeß wird in dieser Arbeit unter der Annahme durchgeführt, daß die Dichte der absorbierten Ionen auf der Oberfläche des kolloidalen Teilchens eine Funktion des Ladungsparameters ist. Als zweites besonderes Ergebnis finden wir eine Formel für die freie Energie eines dielektrischen Teilchens, welche in einer späteren Mitteilung verwendet werden soll, um die Wirkung mehrerer kolloidaler Teilchen zu bestimmen. Schließlich wird noch unter Verwendung besonderer Näherungen eine andere spezielle Darstellung für die freie Energie eines Teilchens gegeben.

*Hans Falkenhagen.*

**Fuoss, Raymond M., Aharon Katchalsky and Schneor Lifson: The potential of an infinite rod-like molecule and the distribution of the counter ions.** Proc. nat. Acad. Sci. USA **37**, 579—589 (1951).

Durch die Debye-Hückelsche Theorie wird das Verhalten einfacher Elektrolyte bei niedrigen Konzentrationen verhältnismäßig gut beschrieben. Die immer wiederkehrende Annahme jedoch, daß das Potential  $\psi$  kugelsymmetrisch und daß  $\epsilon\psi$  weit kleiner als  $kT$  ist, beschränkt den Anwendungsbereich der Theorie. Einige Arbeiten beschäftigen sich bereits mit dem Fall einer unsymmetrischen Ladungsverteilung. Verwey und Overbeck geben eine Zusammenstellung der bis zum Jahre 1948 erschienenen Arbeiten. Bei ternären Elektrolyten, quaternären Elektrolyten usw. soll nun eine besondere Struktur vorherrschend sein, wie aus experimentellen Beobachtungen gefolgert werden kann. Es sollen sich nämlich infolge der herrschenden elektrischen Kräfte stabähnliche Moleküle bestimmter Ladung bilden, die von einer Wolke von Gegenionen umgeben werden. — Verff. bestimmen in ihrer Arbeit das Potential und die Ladungsverteilung um ein derartiges Stabmolekül. Bei der Annahme einer Boltzmannschen Verteilung ist man in der Lage, die hier zugrunde liegende Potentialgleichung in Zylinderkoordinaten exakt zu lösen. Es braucht also nicht die Voraussetzung gemacht zu werden, daß  $\epsilon\psi$  kleiner als  $kT$  ist. In der Arbeit wird dann weiter das Verhalten des Potentials in Abhängigkeit von Ladung und Abstand vom Stabmolekül im einzelnen untersucht.

*Hans Falkenhagen.*

**Cullity, B. D.: One- and two-dimensional X-ray diffraction.** Amer. J. Phys. **19**, 500—506 (1951).

**Korhonen, Unto: Über die Kristallstruktur des kubischen Rubidiumnitrats.** Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. A I, Nr. 102, 37 S. (1951).

**Opinsky, A. J. and R. Smoluchowski: The crystallographic aspect of slip in body-centered cubic single crystals. I. Theoretical considerations.** J. appl. Phys. **22**, 1380—1384 (1951).

**Niggli, Alfred und Paul Niggli: Raumgruppensymmetrie und Berechnungsmethoden der Kristallstrukturlehre.** Z. angew. Math. Phys. **2**, 311—336 (1951).

In Fortsetzung einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **42**, 391) werden Regeln angegeben, die Punktdichte im Kristallraum zu bestimmen. Diese werden sodann auf den Patterson-Raum angewendet, indem mittels passender Tafeln die auftretenden Koeffizienten abgelesen werden können. *Johann Jakob Burckhardt.*

**Kikuchi, Ryoichi: A theory of cooperative phenomena.** Phys. Review, II. Ser. **81**, 988—1003 (1951).

Verf. entwickelt eine neue Näherungsmethode zur Berechnung der Entropie eines Systems mit Ordnungs-Unordnungserscheinungen. Bei geeigneter Wahl der Variablen führt sie zurück auf früher entwickelte Näherungen von Bethe bzw. Kramers und Wannier. Verf. prüft seine verbesserte Methode durch Vergleich mit der strengen Entwicklung der Zustandssumme nach Kirkwoods Momentenmethode am Beispiel des kubischen Gitters und findet Übereinstimmung mit dieser Entwicklung bezüglich des ungeordneten Zustands bis zum 4. Moment. Trotz der inzwischen erfolgten Lösung vieler zweidimensionalen Probleme durch Onsager, Kaufman und Wannier ist seine neue Näherungsmethode für dreidimensionale Probleme von Wert, wo die Theorie heute noch großen mathematischen Schwierigkeiten gegenüber steht. *Walter Kofink.*

**Domb, C.: Order-disorder statistics. I.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A **196**, 36—50 (1949).

(Teil II. s. dies. Zbl. **35**, 286; III. s. nachsteh. Referat.) Von Kramers und Wannier [Phys. Review, II. Ser. **60**, 252 (1941)] wurde gezeigt, daß das Überstrukturproblem der klassischen statistischen Mechanik im zweidimensionalen Fall mathematisch äquivalent ist der Auffindung des größten Eigenwerts einer unendlichen Matrix besonders einfacher Struktur. Verf. zeigt, wie diese Methode auf den dreidimensionalen Fall erweitert werden kann. Die Überlegungen gelten für die eigentlichen Ordnung-Unordnungs-Umwandlungen, aber ebenso z. B. auch (Mischung von Spins beider Richtungen!) für die Theorie der Ferromagnetika (Curie-Punkt). *Ludwig Waldmann.*

**Brooks, J. E. and C. Domb: Order-disorder statistics. III. The antiferromagnetic and order-disorder transitions.** Proc. roy. Soc. London, Ser. A **207**, 343—358 (1951).

Das in der vorhergehenden Mitteilung (dies. Zbl. **35**, 286) entwickelte Verfahren zur Berechnung der Zustandssumme und der thermodynamischen Eigenschaften von zweidimensionalen quadratischen ferromagnetischen Isinggittern wird auf solche antiferromagnetische Gitter übertragen. Bei diesen besteht eine Abstoßung zwischen parallelen Spins, und der Zustand tiefster Energie stellt eine antiparallele Anordnung dar. Bei Abwesenheit eines magnetischen Feldes ist, wie schon Kramers und Wannier (dies. Zbl. **27**, 285) gezeigt haben, die antiferromagnetische Lösung effektiv identisch mit der ferromagnetischen. Bei Anwesenheit eines magnetischen Feldes können wie im ferromagnetischen Fall (vgl. Referat zu Teil II) mehrere Glieder der aufgestellten Potenzreihen berechnet werden. Der Vergleich in beiden Fällen ermöglicht es, einige qualitative Züge des antiferromagnetischen Zustandes anzugeben. Die für die Anfangspermeabilität erhaltenen Reihen für hohe und tiefe Temperaturen werden mit den Näherungslösungen von Bragg-Williams und Bethe verglichen und festgestellt, daß diese 2 bzw. 4 Glieder genau ergeben. Die Anwendung der Theorie auf binäre Lösungen mit von 1 abweichenden Konzentrationsverhältnissen  $z$  ergibt, daß für  $z < 0,226$  keine Fernordnung mehr bestehen kann. Weiterhin wird die Anwendung auf die Adsorption von Gasen auf Festkörperoberflächen diskutiert. Dabei entsprechen anziehende bzw. abstoßende Kräfte zwischen den adsorbierten Molekülen dem ferromagnetischen bzw. antiferromagnetischen Fall, ferner der Gasdruck dem magnetischen Feld und die Belegungsdichte der Magnetisierung. *Albert Kochendörfer.*

**Eshelby, J. D. and A. N. Stroh: Dislocations in thin plates.** Philos. Mag., VII. Ser. **42**, 1401—1405 (1951).

Für den Halbraum, die Platte und die Kreisscheibe werden die Verschiebungen und Spannungen einer geradlinigen Schraubenversetzung angegeben. Die Versetzungslinie steht in allen 3 Fällen senkrecht zur Oberfläche der behandelten Körper, bei der Kreisscheibe fällt sie mit deren Achse zusammen. Die Spannungen für



den Fall der Platte unterscheiden sich ganz wesentlich vom Halbraum oder vom unendlichen Raum. Das Spannungsfeld der Platte beschränkt sich im wesentlichen auf eine Umgebung der Versetzungslinie von der Größenordnung der Plattendicke, während in den anderen Fällen weitreichende Spannungen vorhanden sind. Das drückt sich z. B. in der Kraft aus, mit welcher sich zwei parallele Schraubenversetzungen anziehen. Im unendlichen Raum ist diese Kraft umgekehrt proportional zum Abstand der beiden Versetzungslinien, in der Platte ist diese Kraft auf kleine Entfernungen beschränkt. Für Stufenversetzungen werden die gleichen Verhältnisse nur andeutungsweise diskutiert. In dicken Platten sollten Spannungen und Verschiebungen praktisch mit denen des unendlichen Raums übereinstimmen, in dünnen Platten sollten die Verhältnisse unter Berücksichtigung der Biegung weitgehend zu denen der Schraubenversetzung analog sein. *Günther Leibfried.*

**Peach, M. O.:** The concept of force in dislocation theory. J. appl. Phys. 22, 1359—1364 (1951).

Der allgemeine Begriff einer Kraft auf eine Versetzung, sowie auf andere Inhomogenitäten in einem Kristall wird ausführlich erläutert. Eine Übersicht über die bisher veröffentlichten Arbeiten zu diesem Thema wird gegeben.

*Günther Leibfried.*

**Eshelby, J. D.:** The force on an elastic singularity. Philos. Trans. Roy. Soc. London, Ser. A 244, 87—112 (1951).

Verf. leitet einen allgemeinen Ausdruck für Kräfte auf Singularitäten in einem elastischen Kontinuum ab. Unter Singularität ist allgemein ein Zustand innerer Spannungen zu verstehen, welcher zwar den Gleichgewichtsbedingungen, aber nicht den Compatibilitätsbedingungen der Elastizitätstheorie genügt. Die räumliche Ausdehnung der Singularität, d. i. des Gebietes, in welchem die Compatibilitätsbedingungen verletzt sind, ist dabei nicht notwendig auf einen Punkt, eine Linie oder eine Fläche beschränkt. Ausgangspunkt für die Kraftdefinition ist die Änderung der gesamten Energie mit den Parametern, welche die Lage der Singularität kennzeichnen. Die Kräfte auf die innerhalb einer Fläche gelegenen Singularitäten können durch einen nichtsymmetrischen „Spannungstensor“  $P_{ij}$  beschrieben werden. Das Oberflächenintegral  $\int P_{ij} dF_j$  liefert die  $F$ -Komponente der wirkenden Kraft. Im statischen Fall ist  $P_{ij}$  identisch mit dem räumlichen Anteil des „Energie-Impuls-Tensors“, wie er üblicherweise aus der Lagrange-Dichte der elastischen Bewegungsgleichungen definiert wird. Es ist:  $P_{jil} = \frac{1}{2} p_{ik} \epsilon u_i / \epsilon x_k \cdot \delta_{jl} - p_{ij} \epsilon u_l / \epsilon x_l$  ( $p_{ik}$  elastische Spannungen,  $u_i$  Verschiebungskomponenten,  $x_k$  Koordinaten,  $i, k, j, l, \dots = 1, 2, 3$ ). Speziell behandelt werden Kräfte auf Fremdatome im Gitter und Versetzungen. Ein analoges Ergebnis erhält man für die Kräfte auf Gebiete mit räumlich veränderlichen elastischen Konstanten. Ein Ausblick auf die Behandlung des dynamischen Falles wird diskutiert.

*Günther Leibfried.*

**Klemens, P. G.:** The thermal conductivity of dielectric solids at low temperatures. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 208, 108—133 (1951).

Die Wärmeleitung von dielektrischen Festkörpern ist im wesentlichen durch die elastischen Gitterschwingungen bestimmt, die nach Peierls quantisiert werden können. Da die Phononen der Bose-Einstein-Statistik gehorchen, ist ihre Gleichgewichtsverteilung durch eine Plancksche Funktion gegeben. Eine Näherungslösung für ihr statistisches Gleichgewicht bei Anwesenheit eines Temperaturgradienten wird in üblicher Weise durch die Annahme gewonnen, daß die Verteilungsfunktion nur wenig von der Gleichgewichtsfunktion abweicht. Ferner wird angenommen, daß sich bei der Störung einer Normalschwingung  $\alpha$  das Gleichgewicht zeitlich nach einer Exponentialfunktion wieder einstellt, also eine Relaxationszeit  $\tau_\alpha$  besteht. Die effektive Relaxationszeit  $\tau$  wird durch  $1/\tau = \sum 1/\tau_\alpha$  definiert. Wird schließlich noch Isotropie angenommen, so ergibt sich die Wärmeleitfähigkeit  $\kappa$  als Integral über die Wellenzahlen  $k$  zu

$$(1) \quad \kappa = \frac{1}{3} \sum_j \int \frac{\partial}{\partial t} (E_j(k, T)) l(k) v(k) dk.$$

Hierin bezeichnet  $E$  die Energiedichte,  $j$  den Polarisationsindex,  $v$  die Geschwindigkeit der Phononen (Gruppengeschwindigkeit der Wellenpakete) und  $l = v\tau$  die effektive Relaxationslänge. Gleichung (1) ist äquivalent der verallgemeinerten Debyeschen Gleichung [I. Pomeranchuk (J. Physics Acad. Sci., USSR 4, 357 (1941), 6, 237 (1942), dies. Zbl. 25, 136], jedoch bezeichnet  $l$  nicht die übliche freie Weglänge, die im allgemeinen viel kleiner ist als die Relaxationslänge. — Die eigentliche Aufgabe besteht nun darin,  $l$  zu berechnen. Hierzu werden 4 Stoßprozesse

betrachtet. 1. Dreierprozesse, bei denen 2 Phononen vernichtet werden und 1 neues entsteht oder umgekehrt, wobei Energie und Impuls erhalten bleiben. 2. Dreierprozesse, bei denen die Energie erhalten bleibt, aber eine Impulskomponente um  $\hbar/a$  ( $a$  Atomabstand) geändert wird (Peierlsche Umklappprozesse, abgekürzt U-Prozesse). Beide Prozesse haben ihre Ursache in anharmonischen Anteilen der inneratomaren Kräfte. 3. Elastische Streuung von Phononen an Störstellen oder Grenzflächen (Mosaikgrenzen, Oberfläche). 4. Unelastische Streuung. Von Prozessen höherer Ordnung wird abgesehen, da sie nur bei sehr hohen Temperaturen ins Gewicht fallen (I. Pomeranchuk, loc. cit.). Die Berechnung von  $l$  für diese Prozesse erfolgt in grundsätzlich derselben Weise wie sie von ähnlichen Vorgängen her bekannt ist. — Die theoretischen Befunde werden für Gläser und Kristalle ausgewertet und die Ergebnisse mit den in einer vorhergehenden Arbeit von R. Berman [Proc. roy. Soc. London, Ser. A 208, 90—108 (1951)] mitgeteilten experimentellen Ergebnissen im Temperaturbereich von 2 bis 90° K verglichen. Die Übereinstimmung ist bei geeigneter Wahl von 2 bis 3 unbestimmten Konstanten gut. Im einzelnen bestehen folgende Verhältnisse: Bei Gläsern (Quarzglas, Phönixglas) ist  $\kappa$  bei Temperaturen unterhalb etwa 100° K nicht mehr proportional zur spezifischen Wärme, sondern nimmt langsamer ab als diese und zwar unterhalb etwa 4° K proportional zu  $T$  anstatt zu  $T^3$ ; zwischen etwa 5 und 10° K ist  $\kappa$  nahezu temperaturunabhängig. Dies ergibt sich als Folge davon, daß bei hohen Temperaturen vorwiegend die transversalen Phononen, bei tiefen Temperaturen vorwiegend die longitudinalen Phononen maßgebend sind. Bei Kristallen (Quarz und Korund) durchläuft  $\kappa$  ein Maximum (bei etwa 15 bzw. 50° K), oberhalb dessen ein Bereich existiert, in dem die Leitfähigkeit nahezu vollständig durch U-Prozesse bestimmt ist. Die starke Abnahme von  $\kappa$  bei sehr tiefen Temperaturen ist eine Folge der Grenzflächenstreuung. Durch Bestrahlung mit Neutronen nimmt die Leitfähigkeits-Temperatur-Kurve bei tiefen Temperaturen einen ähnlichen Verlauf an wie bei Gläsern, wobei der nahezu temperaturunabhängige Bereich besonders ausgeprägt ist. Dies kann durch die Annahme, daß die Bestrahlung isolierte Fehlstellen und größere Fehlerbereiche (clusters) erzeugt, erklärt werden. Die Konzentration derselben kann abgeschätzt werden.

*Albert Kochendörfer.*

**Schultz, Walter:** Energieverlust schneller Elektronen beim Durchgang durch Folien (Vielfachstreuung). Z. Phys. 129, 530—546 (1951).

Es wird versucht, die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Energieverluste eines Elektrons durch Ionisation auf Grund einer Integro-Differentialgleichung durch geschlossene analytische Ausdrücke wiederzugeben und auf die Experimente von Paul und Reich [Z. Phys. 127, 429 (1950)] mit Elektronen vom 5- bzw. 8-fachen ihrer Ruhenergie anzuwenden. Der Polarisierungseffekt [E. Fermi: Phys. Review, II. Ser. 57, 485 (1940)] wird als Korrektur nachträglich berücksichtigt.

*Detlof Lyons.*

**Mott, N. F.:** The mechanical properties of metals. Proc. phys. Soc., Sect. B 64, 729—741 (1951).

**Slater, J. C.:** The electron theory of solids. Amer. J. Phys. 19, 368—374 (1951).

**Volz, H. und H. Haken:** Zur Quantentheorie des Mehrelektronenproblems im Festkörper. Z. phys. Chemie 198, 61—74 (1951).

Für die Elektronen in einem unendlich ausgedehnten idealen Kristallgitter wird die Schrödingergleichung des Mehrelektronenproblems mit Wechselwirkung angesetzt, und dabei Periodizität der Lösung in einem großen endlichen Grundgebiet gefordert, wodurch dem Zusammenhang zwischen Ausdehnung des Kristalls und Elektronenzahl  $n$  in sinnvoller Weise Rechnung getragen wird. Es wird gezeigt, daß die Lösungen die Gestalt haben  $\psi_K = \exp(i K X) \cdot u_K(X, \xi_{ik})$ , worin  $u_K$  in der Schwerpunktskoordinate  $X$  mit der Gitterkonstanten periodisch ist, jedoch noch in allgemeiner Weise von den Relativkoordinaten  $\xi_{ik}$  abhängt. Im elektrischen Feld  $F$  verschiebt sich die Wellenzahl  $K$  der Schwerpunktsbewegung entsprechend der Newtonschen Beschleunigungsgleichung  $d(\hbar K)/dt = n e F$ .

*Walter Franz.*

**Born, Max:** Die Gültigkeitsgrenze der Theorie der idealen Kristalle und ihre Überwindung. Festschr. Akad. Wiss. Göttingen 1951, math.-phys. Kl., 1—16 (1951).

In der Kristalltheorie pflegt man ein Verfahren zu benutzen, das der Born-Oppenheimerschen Näherung der Molekültheorie entspricht. Zunächst wird die Elektronenenergie als Funktion der als Parameter behandelten Kernkoordinaten bestimmt. Die Forderung der Stationarität liefert die Gleichgewichtslage der Kerne,



für die dann eine Schrödingergleichung mit näherungsweise quadratischem Potential angeschrieben wird. Der Verf. weist darauf hin, daß dieses Verfahren auf makroskopische Kristalle nicht anwendbar ist, weil sich schon nach etwa 1000 Gitterkonstanten der Einfluß der Anharmonizität zu stark aufsummiert hat. Er gibt daher eine neue Methode an, die diesem Einwand nicht ausgesetzt ist und spricht die Vermutung aus, daß Lösungen existieren, die einem Gitter mit Sekundärstruktur entsprechen.

Gerhard Höhler.

**Müller, H.:** Ein Verfahren zur genäherten Bestimmung der Lage von Energiebändern in Kristallen. *Ann. der Physik*, VI. F. 9, 141—150 (1951).

Nach Wigner-Seitz und Slater bestimmt man die Lage der Energiebänder von Kristallen aus den Nullstellen der atomaren Eigenfunktionen und ihrer Ableitungen. Da die Nullstellen in einem Gebiet gesucht werden, welches außerhalb des Atomrumpfes liegt, sind die Eigenfunktionen dort angenähert die des Wasserstoffs und daher bis auf eine Phase  $\delta$  durch Lösung der Schrödingergleichung des Wasserstoffs zu gewinnen. Die Phase kann man empirisch aus spektroskopischen Daten entnehmen; sie geht als einzige spezielle Eigenschaft des Atoms in die Berechnung der Energiebänder ein. Indem Verf. die Nullstellen der Wasserstoff-Funktionen und ihrer Ableitungen in Abhängigkeit von Energie, Abstand und  $\delta$  bestimmt, ermittelt er die Ränder der Energiebänder als Funktionen der Gitterkonstanten. Als Beispiele werden C, Si und Ge im Diamantgitter behandelt, wobei sich insbesondere die Energielücke über dem Valenzband bei C sehr breit ergibt, bei Si erheblich schmaler und bei Ge (trotz nahezu gleicher Gitterkonstanten) noch etwa um die Hälfte schmaler als bei Si. Die Übereinstimmung mit früheren Berechnungen von Hund und Mrowka (bei welchen das Fermische Ionenmodell benutzt wurde) ist befriedigend.

Walter Franz.

**Hoffmann, T. A.:** Some investigations in the field of the theory of solids. II. Linear chain of different atoms. Binary systems. *Acta phys. Acad. Sci. Hungar.* 1, 175—195 (1951).

Die in einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 42, 232) angegebene Methode zur Behandlung linearer Atomketten (lineare Kombination der atomaren Elektronen-Eigenfunktionen in einem Riesenmolekül) wird auf binäre Ketten angewandt, welche streng periodisch aus Atomen mit je einem Valenzelektron aufgebaut sind; für die elementare Periode wird speziell die Gestalt  $AB$ ,  $AAB$ ,  $AAAB$  und  $AABB$  angenommen, und von der letzten auf den allgemeinen Fall geschlossen. Aus den Grundzuständen der Valenzelektronen entstehen so viele im allgemeinen getrennte Bänder, wie Atome in der elementaren Periode enthalten sind. Genau die Hälfte dieser Bänder ist bei der Temperatur Null besetzt. Bei ungerader Anzahl Atome in der Elementarperiode ist daher das mittlere Band halb besetzt, die Verbindung ist ein Leiter; bei geradzahigen Perioden entsteht im allgemeinen ein Isolator.

Walter Franz.

**Harrison, Ralph J.:** Use of the scattering-matrix method in the determination of the electronic properties of a three-dimensional crystal. *Phys. Review*, II. Ser. 84, 377 (1951).

**Nicholas, J. F.:** Outer Brillouin zones for face-centred and body centred cubic lattices. *Proc. phys. Soc., Sect. B* 64, 953—956 (1951).

**Lidiard, A. B.:** The influence of exchange energy on the specific heat of free electrons in metals. *Philos. Mag.*, VII. Ser. 42, 1325—1327 (1951).

**Glauber, A. E. und I. I. Tal'janskij:** Zur Theorie des Austretens von Elektronen aus einem Metall in einem elektrischen Felde. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 78, 661—664 (1951) [Russisch].

Der Mechanismus von Zener (dies. Zbl. 9, 276) wird ohne die hier erforderliche Rechtfertigung der Anwendbarkeit auf Metall-Halbleiter-Kontakte angewendet. Das Modell ist sehr vereinfacht und berücksichtigt nicht die Randschicht.

Gerhard Höhler.

**Fan, H. Y.:** Temperature dependence of the energy gap in semiconductors. *Phys. Review*, II. Ser. 82, 900—905 (1951).

Verf. berechnet die Änderung der Wechselwirkungsenergie Elektron-Gitter bei der Anregung in Abhängigkeit von der Temperatur. Die so erhaltene Verschiebung

der Terme in den Bändern führt bei plausiblen Annahmen über die effektive Elektronenmasse und Berücksichtigung der Verschiebung durch thermische Ausdehnung etwa zu den experimentellen Werten (Ge, Si). Für polare Kristalle ergibt sich die gleiche Abhängigkeit wie bei Radkowsky (dies. Zbl. 32, 330), dessen Berechnung der Verbreiterung der Terme durch Wechselwirkung mit den Gitterschwingungen jedoch im nichtpolaren Fall nur 1/1000 der beobachteten Verschiebung der Absorptionskante liefert. Vgl. auch Muto und Ôyama, *Progress theor. Phys.* 5, 833 (1950).

*Gerhard Höhler.*

Vonsovskij, S. V., A. A. Smirnov und A. V. Sokolov: Die optischen Eigenschaften von Metallegierungen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. Ser. 80, 353—356 (1951) [Russisch].

Muto, Toshinosuke and Seiichi Ôyama: Theory of the temperature effect of electronic energy bands in crystals. II. *Progress theor. Phys.* 6, 61—64 (1951).

Butcher, P. N.: The absorption of light by alkali metals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 64, 765—772 (1951).

Berechnung der Band-Band-Absorption in Alkalimetallen im Rahmen der Näherung fast freier Elektronen. Die langwellige Grenze dieser Absorption liegt bei 0,6—1,3  $\mu$ .

*Gerhard Höhler.*

Heller, William R. and Alma Marcus: A note on the propagation of excitation in an idealized crystal. *Phys. Review*, II. Ser. 84, 809—813 (1951).

Wright, R. W.: The effect of the mean free path of electrons on the electrical properties of nonmetals. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 64, 984—999 (1951).

Welker, H.: Zur Theorie der galvanomagnetischen Effekte bei gemischter Leitung. *Z. Naturforsch.* 6a, 184—191 (1951).

Die Messung von Leitfähigkeit und Hall-Effekt reicht nur bei einfacher Leitung zur Bestimmung von Konzentration und Beweglichkeit der Ladungsträger aus. Um auch bei gemischter Leitung die nötige Anzahl Bestimmungsstücke zu gewinnen, wurde vom Verf. die Frequenzabhängigkeit des Hall-Effekts herangezogen. Im Falle gleichzeitiger Elektronen- und Defektelektronenleitung muß der Rekombination und thermischen Erzeugung von Elektronen-Defektelektronen-Paaren in den Differentialgleichungen der galvanomagnetischen Effekte Rechnung getragen werden. Infolge Oberflächenrekombination ergibt sich dabei eine bisher nicht bekannte Abhängigkeit bereits der statischen Hall-Konstante von der Feldstärke, weiter liefern Oberflächen- und Volum-Rekombination einen Beitrag zur magnetischen Widerstandsänderung. Durch Messung der angegebenen Effekte kann eine Bestimmung der Konstanten der Elektronen-Defektelektronen-Rekombination wie der Konzentration und Beweglichkeit der Ladungsträger in Kristallen gewonnen werden.

*Walter Franz.*

Prim, R. C.: A note on the partial differential equations describing steady current flow in intrinsic semiconductors. *J. appl. Phys.* 22, 1388—1389 (1951).

Lempicki, A.: The electrical conductivity of simple *p*-type semiconductors. *Proc. phys. Soc., Sect. A* 64, 589—590 (1951).

Billig, E.: Application of the image-force model to the theory of contact rectification and of rectifier breakdown. *Proc. roy. Soc. London*, Ser. A 207, 156—181 (1951).

Verf. stellt fest, daß die Diffusionstheorie gut mit den Befunden an Se-Gleichrichtern übereinstimmt, wenn der gewöhnlich angenommene Potentialsprung am Halbleiter-Leiter-Kontakt durch einen stetigen Potentialverlauf ersetzt wird, wie ihn etwa die Bildkraft liefert. Die vom Verf. entwickelten Formeln sind auch für den sonst unzugänglichen Fall hoher Sperrspannungen brauchbar. Die in diesem Falle beobachteten Erscheinungen, insbesondere der thermische Durchschlag, erklären sich durch Verminderung des Potentialwalls im elektrischen Feld. Der Sperrspannungsbereich, für welchen ein Kontakt-Gleichrichter verwendbar ist, wird durch



die thermische Instabilität auf um so kleinere Spannungen eingeschränkt, je größer die Leitfähigkeit des Halbleiters ist.

*Walter Franz.*

**Landsberg, P. T.:** The theory of direct-current characteristics of rectifiers. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 206, 463—477 (1951).

Die Diffusionstheorie der Trockengleichrichter wird unter Berücksichtigung der Bildkraft durchgeführt und mit den experimentellen Charakteristiken von CuO, Se und Ge verglichen. Für den Potentialverlauf in der Sperrschicht werden sowohl die von Mott wie auch die von Schottky angegebenen Funktionen verwendet. Die Übereinstimmung mit der Erfahrung ist in beiden Fällen befriedigend, jedoch für die Schottkysche Sperrschicht etwas besser. Allerdings ergibt sich dabei für die Sperrschicht eine hundertmal größere Dichte der Verunreinigungs-Zentren wie für das Innere des Halbleiters, im Gegensatz zu der in der Schottkyschen Theorie vorausgesetzten konstanten Dichte der Verunreinigungen. Hierauf wird in einer folgenden Veröffentlichung näher eingegangen (s. folgendes Referat). — Schließlich stellt Verf. eine allgemeine Beziehung zwischen Diffusions- und Diodentheorie auf.

*Walter Franz.*

**Landsberg, P. T.:** Contributions to the theory of heterogeneous barrier layer rectifiers. Proc. roy. Soc. London, Ser. A 206, 477—488 (1951).

Unter der Annahme einer willkürlichen Raumladungsverteilung in der Sperrschicht wird die allgemeine Form der Strom-Spannungs-Abhängigkeit sowohl auf dem Boden der Diffusions- wie der Diodentheorie abgeleitet; die Gestalt der Charakteristik wird nach beiden Theorien nahezu identisch. — Die allgemeinen Beziehungen werden auf eine Sperrschicht angewandt, in welcher sich die Verteilung der Verunreinigungszentren durch Diffusion selbst einstellt. Die so erhaltene Charakteristik stimmt mit dem Experiment ebenso gut überein wie die in der vorangehenden Arbeit (siehe vorsteh. Referat) aus der Schottkyschen Sperrschicht berechnete, ohne daß die in der Sperrschicht auftretenden großen Verunreinigungsdichten hier eine Schwierigkeit darstellen.

*Walter Franz.*

**Mataré, H. F.:** Randschichtwechselwirkung und statistische Schwankungen beim Dreielektrodenkristall. Z. Phys. 131, 82—97 (1951).

**Dormont, H.:** La température électronique des cathodes à oxydes. Interprétation des résultats expérimentaux. J. Phys. Radium 12, 710—716 (1951).

**Tisza, Laszlo:** On the nature of the superconducting state. Phys. Review, II. Ser. 84, 163 (1951).

**Wentzel, Gregor:** The interaction of lattice vibrations with electrons in a metal. Phys. Review, II. Ser. 83, 168—169 (1951).

Zur Beleuchtung der Theorien, die die Supraleitung auf die Wechselwirkung zwischen Gitterschwingungen und Elektronenbewegung zurückführen (dies. Zbl. 37, 430) wird festgestellt, daß bei Erfüllung der mit Störungsrechnung gefundenen Kriterien für Supraleitung die Störungsrechnung nicht mehr brauchbar ist. Die Untersuchung des eindimensionalen Gitters zeigt, daß starke Kopplung von Elektronen und Gitterschwingungen zum Zerfall des Gitters führt.

*Friedrich Hund.*

**Kohn, W. and Vachaspati:** A difficulty in Fröhlich's theory of superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 83, 462 (1951).

**Drell, S. D.:** On the interaction of conduction electrons with lattice vibrations. Phys. Review, II. Ser. 83, 838 (1951).

**Huang, Kun:** A note on Fröhlich's theory of superconductivity. Proc. phys. Soc., Sect. A 64, 867—873 (1951).

**Fröhlich, H.:** Superconductivity and effective mass of electrons. Nature 168, 280—281 (1951).

Kleine effektive Masse der Elektronen erklärt ohne Zuhilfenahme der Wechselwirkung von Gitterschwingungen und Elektronenbewegung (dies. Zbl. 37, 430) noch nicht die Supraleitung.

*Friedrich Hund.*

**Bardeen, J.:** Choice of gauge in London's approach to the theory of superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 81, 469—470 (1951).

In einer kurzen Notiz wird der Einfluß von Eichtransformationen in der Londonschen — atomistischen — Theorie der Supraleitung untersucht. *Wilhelm Macke.*

**Bardeen, J.:** Criterion for superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 82, 978—979 (1951).

**Bardeen, J.:** Relation between lattice vibration and London theories of superconductivity. Phys. Review, II. Ser. 81, 829—834 (1951).

Referat s. dies. Zbl. 40, 429.

**Schachenmeier, R.:** Weiteres zur Quantentheorie der Supraleitung. Z. Phys. 130, 243—244 (1951).

Vergleich mit Untersuchungen von Born und Cheng [dies. Zbl. 30, 334 und Nature 163, 247 (1949)]. *Friedrich Hund.*

**Kuper, C. G.:** An unbranched laminar model of the intermediate state of superconductors. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 961—977 (1951).

Berechnung des „Zwischenzustandes“ (Gleichzeitiges Bestehen von supraleitenden und nicht-supraleitenden Bereichen) von Ellipsoiden. Es wird angenommen, daß die supraleitenden Bereiche nicht „aufgefasert“ sind, sondern die Gestalt flacher Scheiben haben (die als abgeplattete Ellipsoide behandelt werden). — Die lineare Zunahme des magnetischen Moments, die für den vollständig supraleitenden Zustand charakteristisch ist, besteht bis zu einem Wert von  $H$ , bei dem an einem Punkt der Oberfläche die thermodynamische Stabilität schon nicht mehr besteht. Diese Überschreitung wird mit einer Oberflächenspannung zwischen supraleitenden und nichtsupraleitenden Bereichen in Zusammenhang gebracht. *Heinz Koppe.*

**Koppe, H.:** Zur phänomenologischen Theorie der Supraleitung. Z. Naturforsch. 6a, 284—287 (1951).

Es wird darauf hingewiesen, daß die Abhängigkeit der Londonschen Konstante  $\lambda$  von der Temperatur zu sehr unplausiblen Aussagen über die Entropie eines Supraleiters im Magnetfeld führt. Zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten wird eine Abänderung der Londonschen Theorie vorgeschlagen, bei der  $\lambda$  eine Veränderliche ist, die sich auf einen thermodynamischen Gleichgewichtswert einstellt. Es zeigt sich, daß man so zu einer nichtlinearen Verallgemeinerung der Londonschen Theorie geführt wird. (Autoreferat.) *Wilhelm Macke.*

**Sokolov, A. V. und A. Z. Veksler:** Thermoelektronenemission in Ferromagneten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. Ser. 81, 27—30 (1951) [Russisch].

**Lidiard, A. B.:** On the theory of free electron ferromagnetism. Proc. phys. Soc., London, Sect. A 64, 814—825 (1951).

Es wird der Ferromagnetismus von freien Elektronen mit Austauschwechselwirkung untersucht. Für die Verteilungsfunktion erhält man eine komplizierte

$$\text{Integralgleichung} \quad x^2 - a \int_0^\infty x' \log \left| \frac{x+x'}{x-x'} \right| f(x') dx' = b \log \frac{1-f(x)}{f(x)},$$

für die sich keine exakte Lösung finden läßt. Deshalb wird eine Näherungslösung bestimmt, indem für  $f(x)$  ein Ansatz mit einem verfügbaren Parameter gemacht wird, und dieser Parameter aus einem zugeordneten Variationsproblem bestimmt wird. — Für  $T = 0$  erhält man für hinreichend kleine Elektronendichten eine spontane Magnetisierung, die der Parallelstellung aller Spins entspricht. Mit wachsender Temperatur klappen einige Elektronenspins herum, aber im Gegensatz zum normalen Ferromagnetismus fällt bei der Curie-Temperatur die Magnetisierung von einem endlichen Wert auf Null. *Heinz Koppe.*

**Becker, R.:** La dynamique de la paroi de Bloch et la perméabilité en haute fréquence. J. Phys. Radium 12, 332—338 (1951).

Bei niedrigen Feldstärken wächst die Magnetisierung ferromagnetischer Sub-



stanzen dadurch, daß sich die Wände zwischen den einzelnen Bezirken verschieben. Diesen „Bloch'schen Wänden“ schreibt Verf. eine träge Masse zu, der zufolge die Wände bei hohen Frequenzen dem angelegten Felde nicht mehr folgen können. Es wird diskutiert, wieweit durch diese Hypothese das beobachtete Verschwinden der Suszeptibilität erklärt werden kann.

*M. Schütte.*

**Rado, George T.: On the inertia of oscillating ferromagnetic domain walls.** Phys. Review, II. Ser. **83**, 821—826 (1951).

Wie erstmals W. Döring (dies. Zbl. **34**, 140) gezeigt hat, besitzt eine Blochwand zwischen zwei Gebieten verschiedener Magnetisierungsrichtung in einem Ferromagneten einen bestimmten Energieinhalt, der neben einem konstanten Anteil einen Zusatzbetrag enthält, der proportional dem Quadrat der Wanderungsgeschwindigkeit der Wand anwächst und daher als kinetische Energie einer der Wand eigentümlichen trägen Masse gedeutet werden kann. Während aber Döring zur Berechnung dieser Masse noch eine bestimmte Annahme über den Dämpfungsmechanismus bei einer solchen Wandverschiebung einführen mußte, zeigt Verf., daß eine solche Annahme nicht nötig wird, wenn man das Verhalten der Wand in einem Wechselfeld untersucht. Doch kommt er auch in diesem Fall genau zum gleichen Wert für die träge Masse der Wand wie Döring.

*Fritz Sauter.*

**Herring, Conyers and Charles Kittel: On the theory of spin waves in ferromagnetic media.** Phys. Review, II. Ser. **81**, 869—880 (1951).

Es wird gezeigt, daß die Theorie der Spinwellen, welche sich bei der Begründung des  $T^{3/2}$ -Gesetzes für die Temperaturabhängigkeit der ferromagnetischen Sättigungsmagnetisierung und bei den Betrachtungen über die Bloch-Wände bei Weiß'schen Bezirken so gut bewährt hat, viel allgemeiner ist, als es nach ihrer üblichen Ableitung aus der Heitler-London-Heisenbergschen Theorie des Ferromagnetismus erscheinen möchte. Vielmehr läßt sich diese Theorie auch ohne spezielle Annahmen aus einer feldmäßigen Behandlung des ferromagnetischen Materials gewinnen, in der die Dichten der drei Spinkomponenten als Amplituden eines gequantelten Vektorfeldes betrachtet werden.

*Fritz Sauter.*

**Klein, Martin J. and Robert S. Smith: Thin ferromagnetic films.** Phys. Review, II. Ser. **81**, 378—380 (1951).

Verff. untersuchen den Ferromagnetismus dünner Schichten nach der Bloch'schen Spinwellentheorie. Sie werten ihr Ergebnis für 1 bis 128 Atomlagen numerisch aus. (Vgl. eine Note des Ref., dies. Zbl. **37**, 139.)

*Gerhard Höhler.*

**Stoner, E. C.: Collective electron ferromagnetism in metals and alloys.** J. Phys. Radium **12**, 372—388 (1951).

Die Voraussetzungen und Ergebnisse der Theorie, die in mehreren Arbeiten seit 1933 veröffentlicht wurden, werden zusammengefaßt und mit experimentellen Untersuchungen an Nickel verglichen. Man erhält bemerkenswerte Übereinstimmung.

*M. Schütte.*

**Mason, W. P.: A phenomenological derivation of the first- and second-order magnetostriction and morphic effects for a nickel crystal.** Phys. Review, II. Ser. **82**, 715—723 (1951).

**Montroll, E. W. and T. H. Berlin: An analytical approach to the Ising problem.** Commun. pure appl. Math. **4**, 23—30 (1951).

Zur Berechnung der Zustandssumme beim dreidimensionalen Isingschen Modell (zwei mögliche Spineinstellungen mit einer Spinwechselwirkung nur zwischen nächsten Nachbarn) schlagen Verff. ein Verfahren vor, das in der Einführung zusätzlicher Hilfsintegrationen vom Charakter von  $\delta$ -Funktionen besteht und bewirkt, daß an der Stelle der Summen über die zwei Spinlagen eines jeden Gitterbausteins Integrale über alle Spinwerte zwischen  $-1$  und  $+1$  treten. Dann lassen sich zwar die Spinintegrale geschlossen ausführen, nicht aber nunmehr auch noch die ursprünglich eingeführten Hilfsintegrationen, so daß mithin durch

dieses Verfahren praktisch nichts gewonnen wird. Nur im eindimensionalen Fall der linearen Kette, für welche sich das Isingsche Problem bekanntlich elementar lösen läßt, gelingt den Verff. die vollständige Durchführung ihres Verfahrens bis zur (bekannten) Schlußformel.

*Fritz Sauter.*

Mandel, M.: La dispersion de la constante diélectrique selon le modèle d'Onsager. *Physica* **17**, 799—800 (1951).

O'Dwyer, J. J.: Field dependence of the dielectric constant. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 1125—1132 (1951).

Devonshire, A. F.: Theory of barium titanate. II. *Philos. Mag., VII. Ser.* **42**, 1065—1079 (1951).

Kittel, C.: Theory of antiferroelectric crystals. *Phys. Review, II. Ser.* **82**, 729—732 (1951).

Ein antiferroelektrischer Zustand besteht, wenn Reihen von Ionen in einem Kristall spontan polarisiert sind, aber Nachbarreihen antiparallel zueinander sind, so daß die makroskopische Polarisation Null ist. Zunächst wird gezeigt, daß ein solcher Zustand in allgemeinerer Weise durch eine Singularität in der Verbindung zwischen äußerem elektrischen Feld und Polarisation entsteht, wie im ferroelektrischen Fall (Lorentz-Katastrophe). Die Dielektrizitätskonstante in der Umgebung des antiferroelektrischen Curiepunktes wird dann für Umwandlungen 1. und 2. Ordnung untersucht, indem die freie Energie als eine Potenzreihe 6. bzw. 4. Ordnung in den Polarisierungen dargestellt wird. In beiden Fällen braucht diese Größe keine hohen Werte anzunehmen, im ersten Fall besitzt sie selbst, im zweiten Fall ihr Temperaturkoeffizient eine Unstetigkeit. Die thermischen Anomalien sind qualitativ dieselben wie bei Ferroelektrika. Die Umwandlung sollte röntgenographisch festgestellt werden können. Ein wesentliches Ergebnis ist es, daß ein Temperaturverlauf der Suszeptibilität der Form  $C/(T + \theta)$ , wie er z. B. bei Strontiumtitanat beobachtet wurde, nicht notwendig auf einen antiferroelektrischen Zustand hinweist (wie es beim antiferromagnetischen Zustand der Fall ist), es müssen schon direkte Umwandlungsmerkmale vorliegen. Ein solcher Temperaturverlauf zeigt eher einen ferroelektrischen Zustand mit negativer Curietemperatur an, bei dem stets der unpolarisierte „Hochtemperaturzustand“ vorliegt. Der antiferroelektrische Zustand ist nicht piezoelektrisch, da ein Symmetriezentrum existiert.

*Albert Kochendörfer.*

Vleck, J. H. van: Recent developments in the theory of antiferromagnetism. *J. Phys. Radium* **12**, 262—274 (1951).

Aus der Tatsache, daß die Curietemperatur kleiner ist als die Konstante des Weiss'schen Gesetzes, folgt nach Néél, daß die Spins der zweitnächsten Nachbarn antiparallel sind, während die Spins der nächsten Nachbarn teilweise parallel eingestellt sein können. Ähnliches finden Shull und Smart aus der Streuung von Neutronen. Dieses Verhalten wird beschrieben durch die Theorie der „Superaustauschwechselwirkung“, die von Anderson entwickelt wurde.

*M. Schütte.*

Ziman, J. M.: Antiferromagnetism by the Bethe method. *Proc. phys. Soc., Sect. A* **64**, 1108—1112 (1951).

Anderson, P. W.: Limits on the energy of the antiferromagnetic ground state. *Phys. Review, II. Ser.* **83**, 1260 (1951).

Vleck, J. H. van: Ferromagnetic resonance. *Physica* **17**, 234—252 (1951).

Kittel, C.: Ferromagnetic resonance. *J. Phys. Radium* **12**, 291—302 (1951). Bericht.

Abragam, A. and M. H. L. Pryce: The theory of the nuclear hyperfine structure of paramagnetic resonance spectra in the copper Tutton salts. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **206**, 164—172 (1951).

Die in einer früheren Arbeit von Grund auf entwickelte Theorie wird auf Doppelsulfate  $\text{CuM}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  angewendet. M bedeutet ein einwertiges Ion. Nur bei Berücksichtigung einer Beimischung von höheren Zuständen ergibt sich Übereinstimmung mit experimentellen Befunden, die für ( $M =$ ) K,  $\text{NH}_4$  und Rb vorliegen.

*Erwin Kreyfig.*

Abragam, A. and M. H. L. Pryce: The theory of paramagnetic resonance in hydrated cobalt salts. *Proc. roy. Soc. London, Ser. A* **206**, 173—191 (1951).

Die früher entwickelte Theorie wird auf Kobaltsalze angewendet und



mit experimentellen Werten bei  $\text{CoSiF}_6 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{Co}(\text{NH}_4)_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  und  $\text{CoK}_2(\text{SO}_4)_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$  verglichen. Es besteht Übereinstimmung hinsichtlich der  $g$ -Faktoren und der Größe der Hyperfeinstrukturaufspaltung. *Erwin Kreyßig.*

Ishiguro, Eiichi, Kenjiro Kambe and Tunemaru Usui: The spin relaxation time of chromium alum. *Phys. Review*, II. Ser. 82, 680—683 (1951).

Dingle, R. B.: The diamagnetism of free electrons in finite systems. *Phys. Review*, II. Ser. 82, 966 (1951).

Osborne, M. F. M.: The perfect diamagnetism of free electrons with application to superconductivity. *Phys. Review*, II. Ser. 81, 147—148 (1951).

Es wird untersucht, inwieweit der vollständige Diamagnetismus der Supraleiter sich verstehen läßt vom Standpunkt eines Fermigas und unter Berücksichtigung des Randverhaltens der Wellenfunktionen. *Wilhelm Macke.*

Baumann Fry, Ruth and William J. Fry: Crystal systems with low loss. *J. appl. Phys.* 22, 198—200 (1951).

Ein Kristall, welcher Längs- und Querschwingungen ausführen kann und am einen Ende frei jedoch am anderen Ende belastet ist, besitzt eine elektrische Impedanz  $z_e$ , die unter diesen Bedingungen eine Funktion seiner Abmessungen, seiner Kapazität, seiner piezoelektrischen Konstanten, ferner der Frequenz der Schallgeschwindigkeit, des Elastizitätsmoduls, der Dichte und seiner mechanischen Impedanz ist. Für die Resonanz- und Antiresonanzfrequenz hat der Betrag von  $z_e$  einen Extremwert. Diese Bedingung liefert eine Beziehung zwischen der Resonanz- und Antiresonanzfrequenz und der mechanischen End-Impedanz. Es werden Näherungsformeln entwickelt, die auf Systeme mit niedrigen Verlusten und einer uneingeschränkten rückwirkenden Komponente anwendbar sind. Setzt man  $X_a + j Y_a = Z_{m2}/Z_0$ , wobei  $Z_{m2}$  die mechanische Belastungsimpedanz des Kristalls ist und  $Z_0$  das Produkt aus Kristalldichte, Vorderfläche und Schallgeschwindigkeit im Kristall bedeuten, so liefern die Näherungsformeln Werte für den Qualitätsfaktor und die Differenz zwischen Resonanz- und Antiresonanzfrequenz als Funktion von  $X_a$  und  $Y_a$  mit einem Fehler von höchstens 12%. Dabei sind  $X_a$  und  $Y_a$  auf die Bereiche  $0 \leq X_a \leq 0,05$  bzw.  $0 \leq Y_a \leq 2$  beschränkt. Einige Beispiele, die in dieser Arbeit gegeben sind, beziehen sich auf Quarz-Quecksilber-Systeme. *Hans Falkenhagen.*

Huang, Kun: On the interaction between the radiation field and ionic crystals. *Proc. roy. Soc. London*, Ser. A 208, 352—365 (1951).

Verf. zeigt, daß für Frequenzen von der Größenordnung der Reststrahlungsfrequenz und kleiner infolge der Retardierung eine so starke Kopplung zwischen elektromagnetischen Wellen und transversalen polaren Schwingungen eines Ionenkristalls besteht, daß diese beiden Sorten von Wellen nicht mehr zu trennen sind. Indem man die gemeinsamen monochromatischen Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen und der Gleichungen der polaren Gitterschwingungen aufsucht, erhält man das überraschende Ergebnis, daß die Lichtwellen im Kristall, welche bei kurzen Wellen fast ausschließlich elektromagnetische Energie enthalten, mit zunehmender Wellenlänge einen immer größeren Anteil mechanischer Energie aufweisen, und zwar für zweiatomige Gitter bei längsten Wellen etwa 70%. Umgekehrt wächst bei den transversalen polaren Gitterschwingungen der Anteil an elektromagnetischer Energie mit zunehmender Wellenlänge von null auf etwa 70% bei längsten Wellen an. Während man bei kurzen Wellen, wie bisher, von je zwei elektromagnetischen und mechanischen transversalen Schwingungen sprechen kann, ergeben sich bei langen Wellen also vier unabhängige Schwingungen des gekoppelten Systems Gitter plus Strahlungsfeld, bei welchen die Anteile an elektromagnetischer und mechanischer Energie von gleicher Größenordnung sind. — Die longitudinalen polaren Gitterschwingungen erleiden keine Modifikation durch das Maxwellfeld, sondern behalten ihre mechanische Natur auch bei langen Wellenlängen bei. *Walter Franz.*

Pelzer, H.: Energy density of monochromatic radiation in a dispersive medium. *Proc. Roy. Soc. London*, Ser. A 208, 365—366 (1951).

Kun Huang hat berechnet (s. vorsteh. Referat), daß die elektromagnetischen Wellen im Gitter auch mechanische Energie enthalten, somit zu dem üblichen Ausdruck  $W = \mathcal{E} \cdot \mathfrak{D} + \mathfrak{B} \cdot \mathfrak{H}$  ein Term hinzuzufügen ist. Verf. erläutert dies durch

die Überlegung, daß beim Einschalten der Schwingung notwendig benachbarte Frequenzen auftreten, somit die Dielektrizitätskonstante infolge der Dispersion sich verändert, und daher aus  $dW/dt = \mathcal{E} \cdot \dot{\mathfrak{D}} + \mathfrak{H} \cdot \dot{\mathfrak{B}}$  nicht der obige Ausdruck für die Feldenergie durch Integration folgt. Den richtigen Ausdruck für die Feldenergie erhält Verf. aus dem Poyntingvektor (im zeitlichen Mittel) durch Division mit der Gruppengeschwindigkeit:  $\bar{W} = S dk/d\omega$ . Für das in der Huangschen Arbeit zugrunde gelegte Dispersionsgesetz ergibt sich so genau die Huangsche Formel für die Energie der Welle. *Walter Franz.*

**Heywang, W.:** Zur wirksamen Feldstärke im kubischen Gitter. *Z. Naturforsch.* **6a**, 219—220 (1951).

**Hellwege, K. H.:** Optische Anisotropie kubischer Kristalle bei Quadrupolstrahlung. *Z. Phys.* **129**, 626—641 (1951).

Gegenüber elektrischer und magnetischer Quadrupolstrahlung verhalten sich kubische Kristalle anisotrop, während sie gegenüber elektrischer und magnetischer Dipolstrahlung sich isotrop verhalten. Entwickelt man die durch eine Lichtwelle in einem Gitterpunkt in einem kubischen Kristall hervorgerufene Verrückung  $r$  der Ladungen nach Potenzen des Verhältnisses Atomabstand  $\delta$ /Vakuumwellenlänge  $\lambda$ , wobei  $\delta/\lambda$  eine sehr kleine Zahl ist, und bricht die Reihenentwicklung mit dem linearen Glied  $\delta/\lambda$  ab, so ergibt dies: optische Isotropie des Kristalls. Berücksichtigt man das quadratische Glied, so ergibt sich, daß der Kristall doppelbrechend ist. Dabei verschwindet die Doppelbrechung, wenn die Einstrahlung parallel zu den Würfelkanten und parallel zu den Raumdiagonalen erfolgt. Man erhält also sieben als „optische Achsen“ zu bezeichnende Richtungen, drei 4-zählige und vier 3-zählige. Da andererseits die von einem Atom vom Radius  $\delta$  ausgestrahlte elektrische Quadrupolstrahlung um den Faktor  $(\delta/\lambda)^2$  schwächer ist als seine elektrische Dipolstrahlung, ist zu vermuten, daß auch die absorbierte oder emittierte Strahlung eines auf einem Gitterplatz mit Oktaedersymmetrie in einem kubischen Kristalle sitzenden Atoms anisotrop ist, wenn es sich um Quadrupolstrahlung handelt. Die hieraus sich ergebenden Folgerungen werden mathematisch näher diskutiert, indem zunächst auf die Elektronenzustände und die zugehörigen Quantenzahlen eingegangen wird. Auch die Intensität der Strahlung, die den verschiedenen Quantenübergängen entsprechen, werden formelmäßig angegeben u. zwar sowohl für Quadrupol- als für Dipolstrahlung. *Johannes Picht.*

**Ramachandran, G. N.:** Theory of optical activity of crystals. I. General ideas. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **3**, 217—227 (1951).

**Chandrasekharan, V.:** Thermal scattering of light in crystals. III. Theory for birefringent crystals. *Proc. Indian Acad. Sci., Sect. A* **33**, 183—198 (1951).

**Taurel, L. et J. P. Chapelle:** Diffusion Rayleigh de la lumière par les solides. *J. Phys. Radium* **12**, 817—822 (1951).  
Bericht.

**Dexter, D. L.:** Note on the absorption spectra of pure and colored alkali halide crystals. *Phys. Review, II. Ser.* **83**, 435—438 (1951).

## Astronomie, Astrophysik, Geophysik.

**Eichhorn, Heinrich:** Die Ausnahmefälle bei der Bestimmung einer Kreisbahn. *Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz.* **1951**, 228—235 (1951).

In einer früheren Arbeit (dies. Zbl. **40**, 140) hat Verf. versucht, die Ausnahmefälle bei der Bahnbestimmung in der Ellipse vollständig zu diskutieren. In der vorliegenden Arbeit untersucht er nach denselben Gesichtspunkten den wesentlich einfacheren Fall der Bestimmung einer Kreisbahn unter der Voraussetzung, daß eine Kreisbahn tatsächlich vorliegt. *Karl Stumpff.*



**Eichhorn, Heinrich:** Zur Erfassung der Ausnahmefälle bei der Bahnbestimmung. Österreich. Akad. Wiss., math.-naturw. Kl., Anz. 1951, 235—241 (1951).

Eine Ergänzung zu den früheren Arbeiten des Verf. über den gleichen Gegenstand. Die Erfassung der Ausnahmefälle im Falle der Bestimmung einer elliptischen Planetenbahn war ihm im Prinzip völlig gelungen, doch war die Deutung des komplizierten und unanschaulichen Resultats nur in dem einfacheren Fall einer Kreisbahn (siehe vorsteh. Referat) vollständig möglich. In der vorliegenden Arbeit wird ein Weg aufgezeigt, auch im elliptischen Falle wenigstens in einem Teil der Ausnahmefälle zu einer einfachen geometrischen Deutung zu gelangen. *Karl Stumpff.*

**Rabe, W.:** Neue Methoden zur Bahnbestimmung und Bahnverbesserung visueller Doppelsterne. Astron. Nachr. 280, 1—23 (1951).

Die Bestimmung von Doppelsternbahnen ist schwierig und ungenau, wenn nur ein kleiner Bogen der scheinbaren Bahn mit Beobachtungen belegt ist. Die neueren Methoden benutzen in diesem Fall Potenzreihenentwicklungen der beobachteten Koordinaten (Positionswinkel und Distanz) nach der Zeit und bestimmen die Bahnelemente dann mit Hilfe der Differentialquotienten erster und höherer Ordnung. Bei kurzen Bahnbögen haben aber die höheren Ableitungen unsichere Werte, zudem erfordern diese Methoden einen erheblichen Aufwand an Rechenarbeit. Verf. schlägt ein neues Verfahren vor, in dem nur die ersten Differentialquotienten benutzt werden. Die möglichen Bahnen, die alle Ort und scheinbare Geschwindigkeit zu einer geeigneten, in der Mitte des beobachteten Bahnstücks zu wählenden Epoche gemeinsam haben, bilden eine Schar gleichberechtigter Ellipsen, deren Grenzen sich durch Abschätzungen um so besser einengen lassen, je größer der erfaßte Bogen war. Man kommt hierbei durch einfache Hypothesenrechnung auf vier Dezimalstellen zu verschiedenen Lösungen, die die Beobachtungsreihe gut darstellen und sich als Grundlage für spätere Bahnverbesserungen eignen. Die Unterschiede dieser Lösungen lassen die Unsicherheit der einzelnen Bahnelemente deutlich erkennen.

*Karl Stumpff.*

**Aneckstein, Jules:** Un système particulier de nombres hypercomplexes et son application à l'étude des systèmes planétaires. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 459—479 (1951).

Für hyperkomplexe Zahlen  $a + \varepsilon b$ , wo  $\varepsilon^2 = 1$ , lassen sich arithmetische Operationen wie Addition und Multiplikation in ähnlicher Weise definieren wie für gewöhnliche komplexe Zahlen. In der Zahlenebene dargestellt, haben sie Zusammenhänge mit den Hyperbelfunktionen, die mit dem Zusammenhang der komplexen Zahlen mit den trigonometrischen Funktionen vergleichbar sind. Wenn man durch die Zahlenwerte gewisser Bahnelemente der großen Planeten in bestimmter Weise hyperkomplexe Zahlen definiert, findet man zwischen diesen interessante Beziehungen, welche es gestatten, gewisse Bahnelemente im Planetensystem vorherzusagen.

*F. Schmeidler.*

**McVittie, G. C. and Cecilia Payne-Gaposchkin:** A model of a spiral galaxy. Monthly Not. Roy. astron. Soc. 111, 506—522 (1951).

Die Bildung von spiralförmigen Sternsystemen wird darauf zurückgeführt, daß eine rotierende Kernmasse von einer längs einer geraden Linie angeordneten Zusatzmasse umgeben ist. Wenn durch irgendeinen Prozeß sich die Zusatzmasse zu Einzelsternen zusammenballt, beschreiben diese unter dem Einfluß der Gravitation des Kerns elliptische Bahnen. Es wird gezeigt, daß die geometrischen Orte der in Bahnen verschiedener Exzentrizität und Halbachse nach einer bestimmten Zeit erreichten Punkte Spiralen sind. Einige wirkliche Sternsysteme, darunter auch die Milchstraße, werden mit dem beschriebenen Modell verglichen. Es ergibt sich eine weitgehende Ähnlichkeit der Gestalt wirklicher Sternsysteme mit den aus der entwickelten Theorie folgenden Formen.

*F. Schmeidler.*

**Guha, U. C.: Reversal of polarisation of microwaves from sun-spots.** *Indian J. Phys., Calcutta* **25**, 8—16 (1951).

**Koeckelenbergh, André: Sur un modèle de chromosphère solaire en équilibre hydrostatique.** *Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér.* **37**, 252—259 (1951).

Ausgehend von einer empirischen Beziehung zwischen der Temperatur einer bestimmten chromosphärischen Schicht und der von dieser emittierten Radiostrahlung (in einem Wellenlängenbereich von 1—50 cm) berechnet Verf. unter Annahme hydrostatischen Gleichgewichtes die Temperatur- und Dichteverteilung in der Sonnenchromosphäre. In dem dem zugrunde gelegten Wellenlängenbereich entsprechenden Temperaturintervall zwischen  $4800^{\circ}$  und  $10^6$  K erhält man dabei eine Verteilung, die durchaus vergleichbar ist mit theoretisch gefundenen Werten für den Temperatur- und Dichteverlauf in einer durch Stoßwellen, die von der Sonnengranulation ausgehen, aufgeheizten Chromosphäre. Aus dieser Übereinstimmung schließt Verf., daß sich die Sonnenchromosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht befindet.

*Stefan Temesváry.*

**Sykes, J. B.: Approximate integration of the equation of transfer.** *Monthly Not. Roy. astron. Soc.* **111**, 377—386 (1951).

Es werden die verschiedenen Methoden diskutiert, die uns für die numerische Integration der Strahlungstransportgleichung zur Verfügung stehen. Verf. kommt zu dem Ergebnis, daß zwar die Newton-Cotes-Methode, die von Kourganoff benutzt wird, besser ist als die Gauß-Methode, die von Chandrasekhar angewandt wird, daß aber diesen beiden Methoden eine von ihm selbst entwickelte Methode, die „double-Gauss-Methode“, die auf der zweimaligen Anwendung der Gaußschen Formel beruht, überlegen ist. Die theoretischen Ausführungen werden noch an Hand von Tabellen und graphischen Darstellungen näher erläutert.

*H. Vogt.*

**Schmeidler, F.: Turbulenz bei thermisch stabiler Schichtung im Sterninneren.** *Astron. Nachr.* **279**, 231—236 (1951).

Es wird die Möglichkeit turbulenten Energietransports im Sterninneren bei thermisch stabiler Schichtung bzw. bei unteradiabatischem Temperaturgradienten diskutiert. Verf. ist der Ansicht, daß ein solcher Energietransport, der unter den genannten Bedingungen nach innen gerichtet wäre, im Sterninneren genügend groß sein kann, um den Aufbau der Sterne erheblich zu beeinflussen. Es wird auch versucht, die funktionale Abhängigkeit des Austauschoeffizienten von dem herrschenden Temperaturgradienten abzuleiten. In einer Bemerkung zu vorliegender Arbeit äußert L. Biermann starke Bedenken gegenüber den Darlegungen des Verf. Insbesondere soll ein Vergleich der Verhältnisse in einem Stern mit denen in der Erdatmosphäre nicht statthaft sein, da die dynamische Instabilität in der Erdatmosphäre nur sekundär durch die Rotation beeinflusst werde, während die vom Verf. vorausgesetzte Turbulenz als Folge dynamischer Instabilität derjenigen Zirkulationen angesehen wird, die in rotierenden Sternen zwangsläufig auftreten müssen.

*H. Vogt.*

**Chandrasekhar, S.: The gravitational instability of an infinite homogeneous turbulent medium.** *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A* **210**, 26—29 (1951).

Die Instabilität eines unendlichen homogenen Mediums in einem Gravitationsfeld ist zuerst von J. H. Jeans (1902) untersucht worden. Er erhielt das Ergebnis, daß das Medium instabil ist gegenüber Dichteschwankungen in der Form ebener Wellen, vorausgesetzt, daß die Wellenlänge einen bestimmten Betrag überschreitet. Das gleiche Problem wird vom Verfasser unter Anwendung der in der vorstehenden Arbeit für kompressible Strömungen entwickelten Betrachtungsweise erneut behandelt. Es ergibt sich dabei das Kriterium, daß die entsprechenden sphärischen Wellen zeitlich anwachsen, wenn die Elemente der Dichteschwankungen eine ge-



wisse kritische Größe überschreiten. die gegeben ist durch  $\frac{1}{2} \lambda c = \pi \sqrt{\frac{c^2 + u^2/3}{4\pi G \varrho}}$ .

Trotz der andersartigen Betrachtungsweise ergibt sich also ein ganz analoges Ergebnis, das sich gegenüber der Jeansschen Formel nur durch den Term  $u^2/3$  unterscheidet.

Walter Wuest.

Schatzman, Evry: Sur la stabilité de certains modèles de planètes. Acad. Roy. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. Sér. 37, 599—609 (1951).

In Arbeiten von Ramsey und Lighthill (dies. Zbl. 40, 140, 141) wurde die Stabilität von Planeten untersucht, in deren Innern die Dichte an einer Stelle einen Sprung aufweist. Verf. untersucht die gleiche Frage für Modelle, in denen zwei oder drei Diskontinuitäten des Dichteverlaufs vorliegen. Sein Resultat ist, daß das Vorhandensein von mehreren Sprungstellen der Dichte keine stärkere Tendenz zur Instabilität gegenüber dem Fall von nur einer Diskontinuität bedingt.

F. Schmeidler.

Thompson, W. B.: Thermal convection in a magnetic field. Philos. Mag., VII. Ser. 42, 1417—1432 (1951).

Es wird untersucht, welche Änderungen sich für die Rayleigh-Jeffreyssche Theorie langsamer thermischer Konvektion ergeben, wenn es sich um eine in einem Magnetfeld befindliche elektrisch-leitende Flüssigkeit handelt. Auch bei verschwindender Viskosität gibt es dann bereits einen kritischen Temperaturgradienten, der überschritten werden muß, damit Konvektion auftritt. Nach Schätzungen ist dieser Temperaturgradient groß genug, um experimentell festgestellt werden zu können.

H. Vogt.

Thompson, W. B.: Thermal convection in a magnetic field. Proc. II. Canadian math. Congr. Vancouver 1949, 196—205 (1951).

Zur Untermauerung der Bullard-Elsasserschen Theorie des Ursprungs des permanenten Magnetfeldes der Erde wird folgendes Modell untersucht: Eine elektrisch leitfähige reibungslose Flüssigkeit zwischen zwei vollkommen leitenden Ebenen, die sich in einem homogenen vertikalen Magnetfeld befindet, werde von unten erwärmt. In der vorliegenden Untersuchung wird die Wirkung aller auftretenden elektrischen Felder vernachlässigt. Dann ermöglicht das Magnetfeld eine zelluläre Konvektion ähnlich wie in einer zähen Flüssigkeit, wenn der Temperaturgradient einen kritischen Wert überschreitet. Es wird eine äquivalente magnetische Zähigkeit eingeführt, die proportional den Quadraten der magnetischen Feldstärke und der Schichtdicke ist. Die Rechnung wird wiederholt unter der Annahme, daß die Flüssigkeit von vornherein endliche Zähigkeit besitzt. Dazu werden Zahlenbeispiele angegeben.

W. Kertz.

Kertz, W.: Theorie der gezeitenartigen Luftschwingungen als Eigenwertproblem. Ann. der Meteorol. 4, 1. Beiheft 1—31 (1951).

Die Bewegungsgleichungen einer aurobarotropen Atmosphäre über einem Erdkörper mit beliebig gestalteter Oberfläche werden aufgestellt und durch Operatoren ausgedrückt. Dadurch wird deutlich, daß es sich hier um ein lineares Eigenwertproblem handelt. Von den bekannten Lösungen für die ruhende Erde mit glatter Oberfläche ausgehend, werden mit Hilfe der Störungsrechnung die Abweichungen ermittelt, die durch die Erdrotation und ein den westamerikanischen Kordillern ähnliches Hindernis entstehen. Beim Vergleich der Beobachtungen mit der Theorie ergibt sich eine qualitative Übereinstimmung.

Autoreferat.

Choudhury, D. C.: Effect of vertical transport of ions caused by solar tides in  $F_2$  region. Indian J. Phys., Calcutta 25, 1—7 (1951).

Gerson, N. C.: A critical survey of ionospheric temperatures. Phys. Soc., Rep. Progr. Phys. 14, 316—365 (1951).

## Autorenregister

Besteht eine Arbeit aus mehreren Mitteilungen, so wird hinter dem Stichwort die Mitteilungsnummer mit römischen Ziffern angegeben.

- Abbé, Maurice** L' s. L'Abbé Maurice 8.
- Abolinja, V. E. s. A. D. Myškis** 314.
- Abraham, A. and M. H. L. Pryce** (Hyperfine structure) 448; (Paramagnetic resonance) 448.
- Abramjan, B. L. und M. M. Džrbašjan** (Torsion einer Welle) 187.
- Abramowitz, Milton**  $\left( \int_0^x e^{-u^2} du \right)$  337.
- Acheson jr., Louis K.** (Finite nuclear size) 218.
- Aczél, János** (Funktionalgleichungen mehrerer Veränderlichen) 110.
- Aden, Arthur L. and Milton Kerker** (Scattering of electromagnetic waves) 416.
- Afriat, S. N.** (Bounds for characteristic values) 16.
- Agnew, Ralph Palmer** (Fruhlani integrals) 56; (Ratio tests for convergence) 60.
- Agostinelli, Cataldo** (Vibrazioni elettromagnetiche in una cavità) 416.
- Agostini, Amedeo** (Ev. Torricelli) 243; (Codice di aritmetica anonimo) 243.
- Akizuki, Yasuo** (Theorems of Bertini) 363.
- Alder, K.** (Directional correlation) 136.
- Alexandroff (Aleksandrov), P. S.** (Dualitätssatz von Pontrjagin) 171.
- — — s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 12.
- Allen, J. E.** (Discharge) 227.
- Alves, Maria Teodora** (Satz der Metamathematik) 247.
- Amemiya, Ichiro** (Equi-continuity) 118.
- Amerio, Luigi** (Equazioni differenziali periodiche. I. II.) 89.
- Amitsur, A. S.** (Nil Pi-rings) 267.
- — — and J. Levitzki (Minimal identities) 37.
- Anderson, P. W.** (Antiferromagnetic ground state) 448.
- T. W. (Regression coefficients) 139.
- Andersson, Bengt** (Integrals of moduli of analytic functions) 76.
- Andreae, J. H. and John Lamb** (Ultrasonic relaxation processes) 438.
- Aneckstein, Jules** (Nombres hypercomplexes et systèmes planétaires) 451.
- Ankeny, Nesmith C.** (Inequality of Minkowski) 270.
- — —, E. Artin and S. Chowla (Class-number) 40.
- — — and S. Chowla (Class-number) 269.
- Ansoff, H. I.** (Rocket motor) 193.
- Antosiewicz, H. A.** (Asymptotic stability) 310.
- Anzai, Hirotada** (Ergodic transformations) 112.
- Aoi, T. s. S. Tomotika** 191.
- Apostol, T. M.** (Partition function) 44; (Lerch zeta function) 71; (Hurwitz zeta function) 300.
- — — and Herbert S. Zuckerman (Magic squares) 272.
- Apte, Madhumalati s. A. B. Shah** 357.
- Arfken, G. B., L. C. Biedenharn and M. E. Rose** (Nuclear gamma-radiation) 220.
- — — s. L. C. Biedenharn 431.
- Argence, Émile** (Trajectoires d'un signal) 240.
- Armsen, Paul** (Sequenzen in Permutationen) 251.
- Arnold, B. H.** (Topologies defined by bounded sets) 118; (Lattices with a third operation) 265.
- Arnous, Edmond** (Diffusion cohérente des rayons X) 431.
- — — and S. Zienau (Dämpfungsphänomene. I.) 423.
- Artin, E. and John T. Tate** (Finite ring extensions) 267.
- — s. N. Ankeny 40.
- Artobolevskij, I. I.** (Mechanismus zur Lösung quadratischer Gleichungen) 128.
- Aržanyč, I. S.** (Vektor aus Rotation und Divergenz) 101; (Fundamentalintegrale) 395.
- Ascoli, Guido** (Ricerche asintotiche) 311.
- Ashwell, D. G.** (Distortion of a twisted elastic prism) 393.
- Ataka, Y.** (Exchange current) 427; (Nuclear potential) 427.
- Auluck, F. C.** (New types of partitions) 45.
- Aumann, Georg** (Alternativ-Zerlegungen in Booleschen Verbänden) 264.
- Avery, R. s. C. H. Blanchard** 221.
- Aylward, Mary s. C. N. Davies** 398.
- B. Robinson, G. de s. Robinson, G. de B.** 260.
- Babbage, D. W.** (Associated forms) 19.
- Bachmann, Friedrich** (Begründung der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff) 351.
- — — und Wilhelm Klingenberg (Seiteneinteilungen in affinen Ebenen) 352.
- Bagchi, Hari Das and Nalini Kanta Chakrabarti** (Integrals involving Tschebyscheff's functions) 292.
- — — and Phatik Chand Chatterji (Weber's function  $D_n(z)$ ) 292.
- — — and Kantish Chandra Maity (Algebraic inequalities) 60.
- Bagge, Erich** (Polarisation des Vakuums) 428.
- Bailey, W. N.** (Identities of the Rogers-Ramanujan type) 61.
- Balázs, N. L.** (Adsorption) 410.
- Baldassarri, Mario** (Classi di superficie d'ordine  $n$ ) 150; (Proprietà proiettive delle superficie) 150.
- Ballieu, Robert et Marie-Jeanne Schuind** (Anneaux) 38.



- Balser, L. (Kartenlehre) 378.  
 Banach, Stefan (Mechanics) 181.  
 Banachiewicz, T. (Équations linéaires algébriques) 122.  
 Bandyopadhyay, Gaganbihari (Einstein's field theory) 209.  
 Banerjee, D. P. (Recurrence formulae for cumulants) 339.  
 Baranger, Michel (Lamb shift) 423.  
 Barbuti, Ugo (Approssimazioni successive) 307.  
 Bardeen J. (Gauge in theory of superconductivity) 446; (Superconductivity) 446.  
 Barden, S. E. (Resonance damping) 223.  
 Barenblatt, G. J. und B. M. Levitan (Poissonsche Formel) 410.  
 Barnes, E. S. (Minimum of the product of two values of a quadratic form. I.) 276.  
 Barnett, M. P. and C. A. Coulson (Evaluation of integrals. I. II.) 225.  
 Barrière, R. Pallu de la s. Pallu de la Barrière, R. 115.  
 Bartlett, M. S. (Discriminant function) 344.  
 Bartsch, Helmut (Hyperflächengewebe) 369.  
 Basilevitch, Vladimir (Sukzessive Approximation) 334.  
 Basoco, M. A. (Arithmetical identity) 299.  
 Basov, V. P. (Lineare Differentialgleichungen) 308.  
 Basu, D. (Power of the best critical region) 142; (Scattering of neutrons by protons) 429.  
 Bateman, Paul T. (Sum of three squares) 46.  
 — and Paul Erdős (Geometrical extrema) 162.  
 Beaumont, Ross A. and H. S. Zuckerman (Subgroups of the additive rationals) 29.  
 Becker, Oskar und Jos. E. Hofmann (Geschichte der Mathematik) 241.  
 — R. (Paroi de Bloch) 446.  
 — Walter (Dreifachaufspaltung) 240.  
 Beckert, Herbert (Elliptische Systeme partieller Differentialgleichungen) 96.  
 Becquerel, Jean (Notion physique du temps) 207.  
 Beenacker, J. J. M. s. C. J. Gorter 229.  
 Beghin, H. et G. Julia (Exercices de mécanique. I, 2.) 181.  
 Behnke, Heinrich und Karl Stein (Komplexe Mannigfaltigkeiten und Riemannsche Gebiete) 303.  
 Beljakova, V. K. (Schwingungen einer Platte) 189.  
 Bell, E. T. (Functional equation) 44.  
 — James H. (Unilateral direct product matrix equation) 14; (Unilateral matrix equation) 14, 15.  
 — P. O. (Projective differential geometry of surfaces) 369; (Projective differential invariants) 370.  
 Bellman, Richard (Harmonic analysis of viscous fluid flow) 191.  
 Bereis, R. (Ebene Bewegung) 154.  
 Beresteckij, V. B. und I. Ja. Pomerančuk (Umwandlung eines  $\pi$ -Mesons in ein neutrales Meson) 429.  
 Berghuis, J. (Asymptotische Entwicklung) 66.  
 Bergman, S. and M. Schiffer (Kernel functions) 84; (Nonlinear partial differential equations) 316.  
 Bergmann, Otto (Kernphotoeffekt an Beryllium) 220.  
 Bericht 71.  
 Berker, Ratip (Mouvement à la Poincaré) 399.  
 Berkeš, Branko (Elektronenballistik im Lichte der Laplace-Transformation) 322.  
 Berkson, Joseph (Estimates of regression coefficients) 139.  
 Berlin, T. H. s. E. W. Montroll 447.  
 Bernard, Michel (Lentilles à grilles) 205; (Lentille à trois électrodes) 206.  
 — s. P. Grivet 205.  
 Bernštejn, S. N. (Quasialgebroid und algebroid Funktionen) 78.  
 Bers, Lipman (Minimal surfaces) 159.  
 Bertein, F. (Lentilles faibles électrostatiques) 417.  
 Bertolini, Fernando (Spazio delle funzioni continue) 121.  
 Bertram, G. (Ritzsches Verfahren) 336.  
 Betchov, R. s. J. Kampé de Fériet 402.  
 Bethe, H. A. s. R. L. Gluckstern 218.  
 Biarge, Julio Fernández (Ebene Schnitte der Quadriken) 359.  
 Biedenharn, L. C., G. B. Arfken and M. E. Rose (Triple cascade transitions) 431.  
 — — — s. G. B. Arfken 220.  
 Bieri, H. ( $(V, M)$ -Problem) 376.  
 Biermann, Ludwig and Arnulf Schlüter (Cosmic radiation. II.) 223.  
 Bilby, B. A. s. A. H. Cottrell 234.  
 Bilinski, Stanko (Sphärische Evolventoiden) 366.  
 Billig, E. (Rectifier breakdown) 444.  
 Bilo, J. (Couple de Moebius) 357; (Quaternion projective geometry) 357.  
 Bing, R. H. (Equilateral distance) 167; (Snake-like continua) 168; (Hereditarily indecomposable continua) 168, 169.  
 Bini, Umberto (Teorema di Fermat) 205.  
 Birkhoff, G., D. M. Young and E. H. Zarantonello (Conformal transformation) 125.  
 Bishop, J. F. W. (Virtual source distributions) 406.  
 Bjerhammar, Arne (Method of least squares) 122.  
 Blackman, M. (Diffraction) 204; (Curved linear lattice) 204.  
 Blackwell, David (Translation parameter problem) 138.  
 — J. H. and A. D. Misener (Heat flow problem) 198.  
 Blanc, Charles (Erreur en formules d'interpolation) 335; (Erreur en formules d'intégration) 335.  
 Blanchard, C. H. and R. Avery (Velocity dependent interactions) 221.  
 — René (Cubique de Mac Cay) 148.  
 Bland, Merrill E. M. s. H. Jeffreys 239.  
 Blank, Albert s. J. B. Keller 414.  
 Blauša, Danilo (Relativistische Kinematik) 417.  
 Blaschke, Wilhelm (Geometria dei tessuti) 369.  
 Blin-Stoyle, R. J. (Polarized nuclear reactions) 430.  
 — — — and J. A. Spiers (Beta-decay) 222.  
 Bloch, I., M. H. Hull jr., A. A. Broyles, W. G. Bouricius, B. E. Freeman and G. Breit (Coulomb functions) 219.  
 — Pierre Henri (Laplace-Transformierte) 321.

- Blomqvist, Nils (Dichotomization) 347.
- Blunck, O. (Bremsstrahlung dünner Antikathoden) 226.
- Boas jr., R. P. (Partial sums of Fourier series) 291.
- Bocheński, I. M. (Ancient formal logic) 245.
- Bodea, E. I. (Classification of physical constants) 387.
- Bogert, B. P. (Equation involving Bessel-functions) 125.
- Bohm, David and David Pines (Electron interactions. I.) 437.
- Boiteux, Marcel (Revenu distribuable) 145.
- Bokštejn, M. F. (Dimension des topologischen Produktes) 167.
- Bol, Gerrit (Halbinvariante Differentiation) 94.
- Boltjanskij, V. (Additionssatz der Dimensionen) 168.
- Bond, R. s. R. A. Seban 400.
- Bonnevay, Georges (Groupe des rotations) 263.
- Booth, Andrew D. (Binary multiplication technique) 129.
- Borel, Emile (Transmission d'un caractère héréditaire) 341.
- Borgardt, A. (Matrizen in der Theorie des Mesons) 425.
- Born, Max (Ideale Kristalle) 442.
- Bose, Chameli (Errors in double sampling) 137.
- S. K. (Maximum modulus of an integral function) 77.
- Bourgeois-Pichat, J. (Démographie potentielle) 143.
- Bourgin, D. G. (Bordering transformations) 329.
- Bouricius, W. G. s. I. Bloch 219.
- Box, G. E. P. and K. B. Wilson (Attainment of optimum conditions) 344.
- Brachman, Malcolm K. (Thermodynamic functions) 437.
- Brahana, H. R. (G. A. Miller) 5; (Finite metabelian groups) 28.
- Brandt, Heinrich (Quadratisches Reziprozitätsgesetz) 273.
- Brauer, Peter (Ionenkristalle) 233.
- Richard (Structure of group rings) 27.
- Brechovskich, L. M. (Diffraktion von Schallwellen) 407.
- Breit, G. s. I. Bloch 219.
- Breit, G. and M. C. Yovits (Nucleon-nucleon singlet  $S$  scattering) 429.
- Bremmer, H. (Optical images) 202; (W. K. B. approximation) 203; (Diffraction theory) 204; (Discontinuous solutions of wave equation) 414.
- Brenner, J. L. (Matrices of quaternions) 14.
- Brewer, B. W. (Tests for primality) 48.
- Britton, J. L. and J. A. H. Shepperd (Almost ordered groups) 21.
- Brock, J. E. (Numerical method for nonlinear vibrations) 126.
- Brodersen, Svend and A. Langseth (Electronic lines) 230.
- Brodin, Jean (Réseaux linéaires) 413.
- Brodskij, A. M. s. D. D. Ivanenko 237.
- Broer, L. F. J. (Canonical ensemble) 196.
- Brogie, Louis de (Onde pilote) 211; (Remarque) 418.
- Brooks, J. E. and C. Domb (Order-disorder statistics. III.) 440.
- Brouwer, L. E. J. (Order in the continuum) 250.
- Brown, W. B. and H. C. Longuet-Higgins (Multicomponent systems) 409.
- Broyles, A. A. s. I. Bloch 219.
- Bruck, R. H. (Extension theory for loops) 20.
- Brueckner, Keith (Production of  $\pi$ -mesons) 215.
- A. and Francis Low (Theory of effective range) 219.
- Bruijn, N. G. de (Function occurring in theory of primes) 65.
- — —, Ca. van Ebbenhorst Tengbergen and D. Kruyswijk (Divisors of a number) 43.
- Brunner, Karl (Inconsistency in economics) 145.
- Brzezicki, A. de Castro s. Castro Brzezicki, A. de 93, 183, 207, 388.
- Bucerus, Hans (Ellipsoidpotential) 317; (Freier Fall) 388.
- Buck, R. Creighton (Factoring theorem for homomorphisms) 38.
- Bückner, Hans (Moderne Rechengegeräte) 130; (Integrieranlage) 338.
- Buehler, Robert J. and Joseph O. Hirschfelder (Bipolar expansion) 199.
- Bullen, K. E. (Seismic phase PKJKP) 238.
- Burchnall, J. L. (Algebraic property of polynomials) 74.
- Burgatti, Pietro (Memorie scelte) 387.
- Burkill, J. C. (Trigonometric series) 70; (Lebesgue integral) 279.
- Burniat, Pol (Surfaces canoniques) 150, 362.
- Burton, W. K. (Lagrangian  $S$ -matrix) 214.
- — —, N. Cabrera and F. C. Franks (Growth of crystals) 234.
- Butcher, P. N. (Absorption of light by alkali metals) 444.
- Cabrera, N. s. W. K. Burton 234.
- Caccioppoli, Renato (Equazione lineare ellittica) 314.
- Callen, Herbert B. s. R. F. Greene 410.
- Campbell, H. E. („Principal theorem“ of Wedderburn) 268.
- Robert (Séries de Weber) 69; (Fonctions de Mathieu) 293.
- Cansado, Enrique (Bivariate distributions) 132.
- Carmody, Francis J. (Al-Bitrūjis astronomy) 1.
- Carosella, Alberto (Formula di addizione) 60.
- Carstou, Ion (Produit dans le calcul symbolique) 109.
- Casesnoves, D. Maravall s. Maravall Casesnoves, D. 181.
- Cashwell, E. D. (Asymptotic solutions) 91.
- Caspar, M. s. J. Kepler 3.
- Cassels, J. W. S. (Diophantine equation  $F^2 = X^3 - D$ ) 43; (Class number) 50.
- — — W. Ledermann and K. Mahler (Farey section) 52.
- Castelnuovo, Emma (Frazioni) 251.
- Castro Brzezicki, A. de ( $xy'' + ny' + axy = 0$ ) 93; (Gleichgewichtslagen eines Punktes) 183; (Theorien Einsteins) 207; (Bewegung eines Massenpunktes) 388.
- Cecconi, Jaurès (Teorema di Gauss-Green) 58.
- Cell, John Wesley (Analytic geometry) 357.
- Četaev, N. G. (Stables System) 183.



- Chakrabarti, N. K. (Eccentricity of the conic) 359.  
 — — — s. H. D. Bagchi 292.  
 Chalvet, Odilon, Raymond Daudel, Monique Roux, Camille Sándorfy et Claude Vroelant (Calcul des interactions de configuration) 225.  
 Chand, Uttam (Symmetry of a regression matrix) 347.  
 Chandrasekhar, S. (Magneto-hydrodynamics. I. II.) 191; (Gravitational instability) 452.  
 Chandrasekharan, V. (Scattering of light in crystals. III.) 450.  
 Chapelle, J. P. s. L. Taurel 450.  
 Châtelet, Albert (Théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder) 264.  
 Chatterji, Phatik Chand s. H. D. Bagchi 292.  
 Chavinson, S. Ja. (Taylor-sche Summen beschränkter Funktionen) 79.  
 Chazy, Jean (Valeur d'un déterminant fonctionnel) 236.  
 Cheng, Min-teh (Generalized Laplace operators) 109.  
 Chern, Shiing-shen and E. Spanier (Orientable surfaces in fourdimensional space) 384.  
 Chernoff, Herman (Type A regions) 346.  
 Cheston, W. B. (Reactions  $\pi^+ + d \Rightarrow p + p^*$ ) 426.  
 Chevalley, C. (Theorem of Gleason) 32; (Groupe exceptionnel ( $E_6$ )) 260; (Groupe ( $E_6$ )) 260.  
 Chil'mi, G. F. ( $n$  gravitierende Körper) 184.  
 Chinčín, A. Ja. s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 12.  
 Choquet, Gustave (Catégorie dans les espaces topologiques) 164; (Capacités) 317.  
 Choundhury, D. C. (Transport of ions in  $F_2$  region) 453.  
 Chow, Hung Ching (Summability of a power series) 295.  
 Chowla, S. and P. Erdős (Distribution of values of  $L$ -functions) 46.  
 — — — I. N. Herstein and W. K. Moore (Symmetric groups. I.) 259.  
 — — — s. N. C. Ankeny 40, 269.  
 Chown, L. N. and P. A. P. Moran (Estimating correlation coefficients) 138.  
 Ciliberto, Carlo (Problema di Holmgren-Levi) 100.  
 Cimring, S. E. s. M. A. Kovner 224.  
 Civin, Paul (Conjugate functions) 67.  
 Clark, A. C. and S. N. Ruddlesden (Disintegration of nuclei) 222.  
 — R. S. (Conformal geometry) 374.  
 Clastre, José (Fonction de Patterson) 233.  
 Clemence, G. M. (Celestial mechanics) 236.  
 Clements, G. R. and L. T. Wilson (Mechanics) 181.  
 Coester, F. (Detailed balance) 424.  
 Čogošvili, G. S. (Dualitätsrelationen) 170.  
 Cohen, Eckford (Polynomials in Galois field) 269.  
 — I. S. and I. Kaplansky (Rings for which every module is a direct sum of cyclic modules) 267.  
 — jr., A. C. (Estimation of parameters) 137.  
 Cohn, Harvey (Critical lattices) 52; (Convex body) 52.  
 Coish, H. R. (Internal conversion) 220.  
 Cole, Julian D. (Parabolic equation occurring in aerodynamics) 99; (Drag of a wedge) 193.  
 Colombani, Antoine (Coefficient d'induction mutuelle) 200.  
 Colombo, G. (Velo flessibile) 388.  
 Colonnetti, Gustavo (Équilibre élasto-plastique. I. II. III.) 188.  
 Conte, Luigi (Formula di Erone) 244.  
 Conti, Roberto (Equazioni alle differenze finite) 86.  
 Cook, M. B. (Bivariate  $k$ -statistics) 343.  
 Coolidge, J. L. (Story of tangents) 4; (Six female mathematicians) 5.  
 Copson, E. T. (Discontinuities in electromagnetic field) 414.  
 Corrsin, Stanley (Buckingham's  $\pi$ -theorem) 387.  
 Cottrell, A. H. and B. A. Bilby (Deformation twins) 234.  
 Couchet, Gérard (Équation complètement intégrable) 93.  
 Coulson, C. A. (Ionic-homopolar resonance) 225. (Bond lengths) 225.  
 — — — s. M. P. Barnett 225.  
 Court, L. M. (Conditional extremes) 59.  
 — Nathan Altshiller (Imaginary elements in geometry) 357.  
 Cox, D. R. (Experimental designs) 136.  
 Craggs, J. W. (Elastic-plastic bending) 394.  
 Craig, Homer V. (Vector analysis) 153.  
 Crespo, Ramon (Ernst Schröder) 245.  
 Crocco, Arturo (Missili geodetici. I. II.) 390.  
 Croiset, Robert s. M.-L. Dubreil-Jacotin 265.  
 Cros, F. Teissier du s. Teissier du Cros, F. 185, 186.  
 Cullity, B. D. (X-ray diffraction) 439.  
 Curry, Haskell B. (Philosophy of mathematics) 6.  
 Curtis, A. Robert (Elasticity corrections for pendulums) 238.  
 Dahlquist, Germund (Numerische Integration) 336.  
 Dalitz, R. H. (Higher Born approximations) 420.  
 Darling, B. T. and M. Leichter (Group uniqueness) 216.  
 Daudel, Raymond et Alexandre Laforge (Charges, moments dipolaires et moments de transition) 225.  
 — — s. O. Chalvet 225.  
 Daunt, J. G. s. C. V. Heer 229.  
 Davenport, H. and P. Erdős (Sequences of positive integers) 49.  
 David, F. N. and N. L. Johnson (Nonnormality and heterogeneity of variance) 345; (Sensitivity of analysis of variance tests) 345.  
 Davies, C. N. and Mary Aylward (Trajectories of heavy particles) 398.  
 — T. V. (Gravity waves. I.) 238.  
 Davis, Alex S. (Euler-Fermat theorem for matrices) 272.  
 — M. s. O. Schreier 12.  
 Davison, B. (Influence of a black sphere upon neutron density) 433.  
 — — — S. A. Kushneriuk and W. P. Seidel (Influence of a black cylinder upon neutron density) 432.  
 Daymond, S. D. (Resistance of a metal plate) 199.  
 Deaux, R. (Coniques ayant un contact triponctuel) 148.

- Deemer, Walter L. and Ingram Olkin (Matrix transformations) 342.
- Dekker, David B. (Hypergeodesics) 157.
- Delange, Hubert (Inversion de l'intégrale de Laplace-Stieltjes) 321; (Singularités des intégrales de Laplace) 321.
- Demeur, M. (Charge-renormalization) 214.
- s. J. Géhéniau 212.
- Dénes, Péter (Relativ zyklische Körper) 41; (Serie von relativ-zyklischen Zahlkörpern) 41; (Fermat's last theorem) 273.
- Destouches, J. L. (Mécanique classique et intuitionnisme) 250.
- Destouches-Février, Paulette (Notion de système physique) 218; (Intuitionnisme et conception constructive) 250; (Caractère ouvert de la mécanique ondulatoire) 419.
- Deutsch, Martin (Angular correlations) 431.
- Devidé, Vladimir (Kommutativität und Assoziativität) 255.
- Devonshire, A. F. (Barium titanate. II.) 448.
- Deweck, M. (Courbes sur une surface développable) 367.
- Dexter, D. L. (Absorption spectra of alkali halide crystals) 450.
- Diaz, E. Pajares s. Pajares Diaz, E. 147.
- Dick, I. D. s. H. R. Thompson 343.
- Dieudonné, Jean (Suites de mesures de Radon) 112; (Groupes orthogonaux rationnels) 261; (Théorème de Lebesgue-Nikodym. IV.) 330.
- Dijksterhuis, E. J. (Traductions de Proclus) 1.
- Diliberto, S. P. and E. G. Straus (Approximation of a function of several variables) 68.
- Dinghas, Alexandre (Croissance des fonctions harmoniques) 104.
- Dingle, Herbert (Century of science) 5.
- R. B. (Diamagnetism of free electrons) 449.
- Dirac, G. A. (Additive number theory) 47; (Collinearity properties) 146; (Colouring of graphs) 385.
- Dirac, P. A. M. (Quantum mechanics) 211; (Classical theory of electrons) 428.
- Dixmier, J. (Anneaux d'opérateurs) 327.
- Doetsch, Gustav (Asymptotik der durch komplexe Integrale dargestellten Funktionen) 107; (Endliche Laplace-Transformation) 108.
- Dolapčiev, Bl. (Wirbelstraßen) 189.
- Dolginov, A. Z. (Parkonversion) 429.
- Domb, C. (Order-disorder statistics. I.) 440.
- s. J. E. Brooks 440.
- Donskaja, L. I. (Lineare Differentialgleichungen) 309.
- Dormont, H. (Température électronique) 445.
- Dorrestein, R. (Water ripples. I.) 195.
- Douglas, Jesse (Finite groups with two independent generators. I.) 24; (Existence of basis for every finite abelian group) 258; (Basis theorem for finite abelian groups. II.) 258.
- Dragoni, Giuseppe Scorza s. Scorza Dragoni, Giuseppe 278.
- Drazin, M. P. (Diagonable and normal matrices) 14; (Matrix commutativity) 17.
- J. W. Dungey and K. W. Gruenberg (Commutative matrices) 252.
- Drell, S. D. (Photomeson production) 425; (Conduction electrons) 445.
- Dresher, Melvin (Games of strategy) 135.
- Dresselaers, Céline et Paul P. Gillis (Tests de signification) 141; (Test séquentiel unilatéral) 347.
- Dubois-Violette, Pierre-Louis (Réglages de température) 411.
- Dubreil-Jacotin, Marie-Louise et Robert Croisot (Ensembles où sont définies plusieurs opérations) 265.
- Duff, G. F. D. ( $F$ -equation) 322.
- Dufresnoy, J. et Ch. Pisot (Prolongement analytique) 294.
- Dugas, René (H. Poincaré) 5.
- Dugué, Daniel (Valeurs asymptotiques et valeurs doubles) 83; (Valeurs exceptionnelles de Julia) 298.
- Dugundji, J. (Tietze's theorem) 381.
- Dumézil-Curien, Perrine (Entropie d'un mélange de gaz) 229.
- Dungey, J. W. s. M. P. Drazin 252.
- Dunning, Kenneth L. and Rufus G. Fellers (Circular wave guide) 416.
- Durbin, J. s. G. S. Watson 139.
- Durieu, M. (Points remarquables du triangle) 355.
- Dürr, Karl (Propositional logic of Boethius) 5.
- Dvoretzky, A. and J. Wolfowitz (Sums of random integers) 339.
- Dyke, Milton D. van (Supersonic flow) 405.
- Đžrbašjan, M. M. s. B. L. Abramjan 187.
- Eagle, E. L. (Slide rule) 128.
- Ebbenhorst Tengbergen, Ca. van s. N. G. de Bruijn 43.
- Ecker, Günter (Kanalstrahllicht. II.) 227.
- Edel'man, S. L. ( $p$ -Normalreihen einer Gruppe) 21.
- Edwards, R. E. (Translational bases) 114; (Multiplicative norms on Banach algebras) 114.
- Ehresmann, Charles (Prolongements d'une variété différentiable. I. II. III.) 174.
- Ehrhart, E. (Triangle orienté) 355.
- Eichhorn, Heinrich (Bestimmung einer Kreisbahn) 450; (Bahnbestimmung) 451.
- Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane (Homology theories for multiplicative systems) 254.
- Eisenhart, Luther P. (Generalized Riemann spaces) 373.
- Eisenschitz, R. (Transport processes in liquids) 229.
- Elliot, H. Margaret (Generalized continuity condition) 105.
- Joanne (Singular integral equations) 319.
- Ellis, David (Autometrized boolean algebras. II.) 34; (Abstract distance geometry II.) 166.
- H. W. (Approximate Perron integrals) 55.
- Elovskich, M. P. s. S. V. Vallander 229.
- Elphinstone, M. D. W. (Methods of graduation) 349.



- El'sgol'e, L. É. (Differentialgleichungen mit retardiertem Argument) 127.
- El'sin, M. I. (Phasentrajektorien) 92.
- Emden, Karl ( $\int e^{b(x+a\cos x)} dx$ ) 284.
- Emersleben, Otto (Fehlerintegral) 337.
- Emmons, H. W. (Boundary layer. I.) 191.
- Enatsu, H. (Selfenergies of nucleons) 427.
- and P. Y. Pac (Cohesive meson) 427.
- Enderby, J. A. (Colloidal suspensions) 230.
- Endo, S. and H. Kanazawa („Champ soustractif“) 428.
- Enomoto, Shizu (Measurability) 280.
- Enzyklopädie der Elementarmathematik. II. 12.
- Epstein, T. (Quantum field theory) 423.
- Erdélyi, A. s. F. G. Tricomi 291.
- Erdős, P. (Diophantine equation) 43.
- F. Herzog and G. Piranian (Schlicht Taylor series) 80.
- s. P. Bateman 162.
- s. S. Chowla 46.
- s. H. Davenport 49.
- Erismann, Th. (Integriergerate) 128.
- Erugin, N. P. (Stabilität einer Bewegung) 183.
- Eshelby, J. D. (Elastic singularity) 441.
- and A. N. Stroh (Dislocations in thin plates) 440.
- Esipovič, E. M. (Stabilität der Lösungen) 310.
- Est, W. T. van and Hans Freudenthal (Trennung in topologischen Räumen) 380; (Compactness criterion) 381.
- Eubanks, R. A. s. E. Sternberg 392.
- Evans, Griffith C. (Multiple valued harmonic functions) 103.
- Trevor (Multiplicative systems. I.) 20.
- W. Duane (Variance of estimates) 137.
- II, G. W. (Problem of Stefan) 411.
- Eves, Howard and V. E. Hoggatt, jr. (Hyperbolic trigonometry) 353.
- Eygrafov, M. A. (Potenzreihen mit ganzen Koeffizienten. II.) 77.
- Ewing, Maurice s. F. Press 238.
- Eyges, Leonard (Photo-nuclear reactions) 435.
- L. and S. Fernbach (Cascade showers) 435.
- Fabri, Jean, Raymond Siestrunk et Claude Fouré (Champs aérodynamique) 193.
- Fabricius-Bjerre, Fr. (Zykloide Kurven) 147; (Cycloids) 366.
- Fage, M. K. (Symmetrische Matrizen) 13.
- Fan, Chang-Yun (Cosmic radiation) 223.
- H. Y. (Energy gap in semiconductors) 443.
- Fantappiè, Luigi (Funzionali derivati degli autovalori) 120; (Autofunzioni di un nucleo „variato“) 120.
- Farago, T. (Arithmetisch-geometrisches Mittel) 285.
- Farwell, H. W. (Cartesian ovals) 148.
- Federhofer, Karl (Trägheitspolkurve) 155.
- Fedorov, E. P. (Hauptglieder der Nutation) 183.
- V. S. (Monogene Vektorfunktionen. I.) 153.
- Feenberg, E. and K. C. Ham-mack (Spheroidal nuclear model) 221.
- Eugene s. G. L. Trigg 222.
- Feinstein, J. and H. K. Sen (Radio wave generation) 200.
- Feldman, Chester (Wedderburn principal theorem) 268.
- Feller, William (Range of sums) 342.
- and George E. Forsythe (New matrix transformations) 15.
- Fellers, R. G. s. K. L. Dunning 416.
- Fériet, J. Kampé de s. Kampé de Fériet, J. 402.
- Fermi, Enrico (High energy nuclear collisions) 434.
- Fernbach, S., T. A. Green and K. M. Watson (Scattering of  $\pi$ -mesons) 426.
- s. L. Eyges 435.
- Ferrar, W. L. (Finite matrices) 13.
- Feshbach, Herman (Scattering of electrons) 420.
- and Julian Schwinger (Neutron-proton interaction) 219.
- Feynman, Richard P. (Probability in quantum mechanics) 211.
- Fichera, Gaetano (Teoria del potenziale. I, II.) 101.
- Ficken, F. A. (Functional equations) 322.
- Fine, N. J. (Hurwitz zeta-function) 78.
- Finkelstein, R., R. Le Levier and M. Ruderman (Non-linear spinor fields) 216.
- Finsterwalder, Sebastian (Streifengeometrie. I.) 367.
- Fischer, Wilhelm (Dedekind's function  $\eta(\tau)$ ) 305.
- Fitch, E. R. s. H. O. Hartley 337.
- Fjeldstad, Jonas Ekman (Seiches in lakes) 238.
- Fleckenstein, J. O. (Keplersche Bewegung) 237.
- Fletcher, Alan (Tables of two integrals) 128.
- Flint, H. T. and E. Marjorie Williamson (Quantum mechanics of electron) 217.
- Foa, Emanuele (Termodinamica) 195.
- Foldy, L. L. (Pseudoscalar meson theory) 215; (Electron-neutron interaction) 223; (Diffusion of high energy gamma-rays. I, II.) 434.
- s. F. J. Milford 434.
- Föppl-Sonntag (Tafeln zur Festigkeitslehre) 391.
- Forsythe, G. E. s. W. Feller 15.
- Fort jr., M. K. (Functions discontinuous on a dense set) 55; (Pointwise convergence) 113; (Plane light open mappings) 178.
- Foster, E. W. (Nuclear effects in spectra) 436.
- Fouré, Claude s. J. Fabri 193.
- Fourès, Léonce (Surfaces de Riemann) 301.
- Fournet, G. (Théorie de Born et Green) 229.
- Fox, Charles (Determination of position) 378.
- Fraïssé, Roland (Conséquence d'une hypothèse) 54.
- Frajese, Attilio (Geometria greca e continuità) 241.
- Franchetta, Alfredo (Forme algebriche sviluppabili) 362.
- Frank, F. C. (Crystal dislocations) 235.
- s. W. K. Burton 234.
- P. and J. Kiefer (Almost subminimax procedures) 346.
- R. M. (Selfenergy of electron) 212.
- Frank-Kameneckij, D. A. (Pulsationen in Sternen) 238.

- Franke, H. W. (Richtungs-doppelfokussierung) 417.
- Franz, W. und L. Tewordt (Multipole des Mesonenfeldes) 214.
- Fraser, D. A. S. (Generalized hit probabilities) 133; (Statistically equivalent blocks) 344.
- — — and R. Wormleighton (Nonparametric estimation. IV.) 348.
- Freeman, B. E. s. I. Bloch 219.
- Freilich, Gerald (Sets of constant width) 376.
- Freudenthal, Hans (Mathématiques et sciences sociales) 5; (Kompaktisierungen) 165; (Statistische Denkweise) 341; (Kompaktheitskriterium) 381.
- — — s. W. T. van Est 380, 381.
- Fricke, W. s. O. Heckmann 208.
- Fridlander, V. R. (Lineare Differential-Operatorenungleichungen) 317.
- Friedrich, Konrad und Werner Jenne (Geometrisch-anschauliche Auflösung linearer Gleichungssysteme) 334.
- Fröberg, Carl-Erik (Proton-proton interaction) 219.
- Froda, Al. (Fonctions vectorielles) 364.
- Fröhlich, H. (Effective mass of electrons) 445.
- Fry, Ruth Baumann und William J. Fry (Crystal systems) 449.
- William J. s. R. B. Fry 449.
- Frye, W. E. (Long-range ballistic rocket) 185.
- Fuglede, Bent und Richard V. Kadison (Conjecture of Murray and von Neumann) 117; (Determinants) 328.
- Fulks, W. (Laplace's method) 320.
- Fulton jr., Lewis M. (Finite-to-one closed mappings) 381.
- Funk, P. (Stabilitätsproblem bei Meßbändern) 188.
- Fuoss, Raymond M., Aharon Katchalsky und Schneor Lifson (Potential of a rod-like molecule) 439.
- Fürth, R. (Emission of photons) 201.
- Gabor, D. (Microscopy. II.) 202.
- Gachov, F. D. (Riemannsche Randwertaufgabe) 84.
- Gaeta, Federico (Koinzidenzpunkte einer Korrespondenz) 361; (Matrice de l'idéal homogène) 361.
- Galin, L. A. (Instationäre Bewegung des Grundwassers) 408.
- Gallarati, Dionigi (Superficie del 6° ordine) 362.
- Gallone, S. and C. Salvetti (Nuclear model) 221.
- Galvani, Luigi (Méthode représentative) 136.
- Ganin, M. P. (Polyanalytische Funktionen) 104; (Singuläre Integralgleichungen) 106; (Randwertproblem für analytische Funktionen) 319.
- García Pradillo, Julio (Bedingungen der Monogenität) 76.
- Gardiner, J. G. (Red giant star) 238; (Cowling stellar model) 238.
- Gardner, G. H. F. (Skew-symmetric tensors) 153.
- G. W. s. H. Messel 435.
- Martin (Topology and magic) 179.
- Garnier, René (Problème de Riemann-Hilbert) 293.
- Garreau, G. A. (Sequences of 0's and 1's) 61.
- Garstang, R. H. (Transition probabilities) 436.
- Gáspár, R. s. P. Gombás 226.
- Gasson, J. D. N. (Mathematic for students. I. II.) 277.
- Gaumnitz, Erwin A. s. R. E. Larson 144.
- Gautschi, Walter (Graphische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen) 125.
- Gavrik, V. Ja. (Gerät zur Demonstration von Wahrscheinlichkeitsgesetzen) 135.
- Géhéniau, J. (Fonctions singulières) 212; (Espaces de l'électromagnétisme) 411.
- — — et M. Demeur (Solutions singulières) 212.
- — — et R. Servranckx (Polarisabilité du proton) 430.
- Geiringer, Hilda (Perfect plastic body) 394.
- Gelbaum, B. (Basis for Hilbert space) 326.
- Gemigniani, Giuseppe (Sistemi lineari di ipersuperficie) 363.
- Gerber, Robert (Écoulements irrotationnels) 190.
- Gerbes, Werner (Laminare Strömung) 190.
- Germa, R. H. (Équations récurrentes aux dérivées partielles) 94; (Systèmes d'équations récurrentes) 112; (Équation aux dérivées partielles du premier ordre) 313.
- Gerson, N. C. (Ionospheric temperatures) 453.
- Ghizzetti, Aldo (Serie di funzioni di Hermite) 289.
- Ghosh, Birendranath (Random distances) 377.
- Giannopoulos, Alex. I. (Mayer  $M_{(r)}$  trihedron) 155.
- Gião, Antonio (Équations du champ. I. II.) 210.
- Giese, J. H. (Degenerate hodographs) 403.
- Giger, Adolf (Körper im Gravitationsfeld) 182.
- Gill, Stanley s. M. V. Wilkes 129.
- Gillis, Paul P. (Équations de Monge-Ampère) 314.
- — — s. C. Dresselaers 141; 347.
- Ginsburg, L. P. s. D. D. Ivanenko 237.
- Glauber, A. E. und I. I. Tal'janskij (Austritten von Elektronen) 443.
- Gleason, A. M. (Compact subgroups) 264.
- Gluckstern, R. L. and H. A. Bethe (Neutron-deuteron scattering) 218.
- Glur, P. s. H. Hadwiger 355.
- Gluškov, V. M. (Lokal nilpotente Gruppen ohne Torsion) 256.
- Gnanadoss, Adaikalam A. (Linear difference equations) 306.
- Gnedenko, B. V. (M. V. Ostrogradskij) 245.
- Goddard, L. S. (Positive definite quadratic forms) 253.
- Godeaux, Lucien (F. Enriques) 5; (Surfaces multiples) 149; (Système linéaire de surfaces) 149; (Surfaces du quatrième ordre) 151; (Quartiques rationnelles) 360; (Surfaces algébriques) 362.
- Godement, Roger (Caractères dans les groupes unimodulaires) 32.
- Goertzel, G. s. W. Sollfrey 213.
- — — s. N. Tralli 430.
- G. H. s. M. E. Rose 220.
- Goldberger, M. L. (Scattering) 211.



- Goldsbrough, G. R. (Saturn's rings) 236.
- Goldsmith, N. A. (Ruled surfaces belonging to a linear complex) 370.
- Goldstein, Herbert (Classical mechanics) 180.
- L. s. P. Parzen 227.
- Goldstine, Herman H. and John von Neumann (Inverting of matrices. II.) 123.
- Gombás, P. and R. Gáspár (Thomas-Fermi-Dirac equation) 226; (Thomas-Fermi-Diracsche Gleichung) 226.
- Gomory, R. and D. E. Richmond (Van der Pol's equation) 125.
- Goodier, J. N. and I. M. Neou (Sandwich plates) 186.
- Goormaghtigh, R. (Géométrie du triangle. I. II. III.) 355.
- Gordeev, G. V. (Plasmaschwingungen und Schichten) 229.
- Gorter, C. J., K. W. Taconis and J. J. M. Beenakker (Helium II) 229.
- Götling, Erik (Lesniewski-Mihailescu-theorem) 249.
- Gotô, Morikuni (Local Lie groups) 31.
- Gottschalk, W. H. (Choice functions) 54.
- Gotusso, Guido (Principio variazionale in idrodinamica) 397.
- Gouarné, René (Dérivés substitués) 225.
- Gougenheim, André (Projections conformes de la sphère) 378.
- Graf, Ulrich und Hans-Joachim Henning (Kleine Stichproben) 143.
- Graffi, D. (Forced oscillations) 312.
- Granger, Sarah and R. D. Spence (Spheroidal nuclear wall) 221.
- Graue, Louis C. (Curve on a hyperquadric) 156.
- Green, A. E. and R. T. Shield (Torsion of cylinders) 392.
- H. S. and H. Messel (High energy nucleon-nucleon collisions) 219.
- J. A. (Structure of semi-groups) 256.
- John W. (Ballistics) 185.
- T. A. s. S. Fernbach 426.
- Greene, Richard F. and Herbert B. Callen (Thermodynamic fluctuation theory) 410.
- Grigorov, N. L. (Harte Komponente der kosmischen Strahlung) 433.
- Grimshaw, M. E. s. H. L. Hamburger 325.
- Griss, G. F. C. (Logic of intuitionistic mathematics) 249; (Intuitionistic mathematics. III. IVa. IVb.) 250.
- Grivet, Pierre (Lentille électronique) 417.
- et Michel Bernard (Éléments gaussiens) 205.
- Gröbner, W. (Oberflächenwellen) 408.
- Gronow, D. G. C. (Significance of difference between means) 140.
- Groot, R. S. de and H. A. Tolhoek (Chemical potential) 231.
- — — s. H. A. Tolhoek 223, 431, 432.
- Grootenboer, D. (Reserveberechnung nach Lidstone) 144.
- Gross, B. and H. Pelzer (Creep and relaxation. III.) 396.
- Grothendieck, Alexandre (Espaces vectoriels topologiques) 329.
- Gruenberg, K. W. s. M. P. Drazin 252.
- Grün, Otto (Berechnung des elektrischen Feldes) 200.
- Grundy, P. M. (Expected frequencies. I.) 340.
- Grunsky, Helmut (Beschränkte Funktionen) 78.
- Gruting, C. J. van (Dreiecke und Kreise in der elliptischen Geometrie. II.) 353.
- Guha, U. C. (Polarisation of microwaves) 452.
- Gumbel, E. J. and L. H. Herbach (Exact distribution of extremal quotient) 132.
- Gunn, J. C., E. A. Power and B. F. Touschek (Production of mesons) 215.
- Gupta, Suraj N. (Supplementary condition in quantum electrodynamics) 423.
- Gurevič, L. E. (Evolution von Sternsystemen) 237.
- Gustin, W. and J. A. Sullivan (Contractions in hyperbolic space) 354.
- Gut, Max (Kubische Klassenkörper) 42.
- Guth, E. and C. J. Mullin (Coulomb scattering wave functions) 219.
- Haack, Wolfgang (Charakteristikenverfahren) 406.
- Haacke, W. ( $n$ -faches ebenes Pendel) 183.
- Haag, Jules (Systèmes différentiels) 311; (Synchronisation d'un oscillateur) 389.
- Habicht, Walter und B. L. van der Waerden (Lagerung von Punkten) 356.
- Hadwiger, H. (Würfel als Körper kleinsten Relativoberfläche) 375; (Radius nichtkugelförmiger Moleküle) 437.
- und P. Glur (Zerlegungsgleichheit) 355.
- Hagstroem K.-G. (Pension schemes) 350.
- Hahn, Wolfgang (Spezielle Differenzengleichung) 86.
- Haimo, Franklin (Limits of Boolean algebras) 34; (Representation for Boolean algebras) 264.
- Haimovici, M. (Équations à dérivées partielles. II.) 312.
- Haken, H. s. H. Volz 442.
- Halberstam, H. and K. F. Roth (Gaps between  $k$ -free integers) 49.
- Haldane, J. B. S. (Square roots) 122.
- Halfar, Edwin (Point-set operators) 328.
- Hall, G. G. and Sir John Lennard-Jones (Chemical valency. VII. VIII.) 225.
- Halperin, Israel (Non-measurable sets) 110.
- Hamburger, H. L. and M. E. Grimshaw (Linear transformations in vector space) 325.
- Hamermesh, Morton s. L. Landau 198.
- Hamill, C. M. (Group of order 6531840) 28.
- Hamilton, Hugh J. (Vector subseries) 61.
- Hammack, K. C. s. E. Feenberg 221.
- Hammer, Preston C. (Centroid of a convex body) 163; (Convex bodies associated with a convex body) 163.
- Hammersley, J. M. (Total length of the edges of a polyhedron) 375.
- Hanner, Olof and Hans Rådström (Theorem of Fenchel) 162.
- Harr, J. s. M. E. Rose 220.
- Harrison, Ralph J. (Scattering-matrix method) 443.
- Hartley, H. O. and E. R. Fitch (Incomplete beta function) 337.
- — — E. S. Pearson (Distribution of range) 136.

- Hartman, Philip and Aurel Wintner (Oscillation criterion) 87.
- Haselgrove, C. B. (Analytic theory of numbers) 47.
- Haskell, N. A. (Sound channel wave propagation) 407.
- Hasse, Helmut (Geschlechtertheorie) 40.
- Hausner, M. s. O. Schreier 12.
- Haviland, D. K. (Unrestricted solutions of  $\Delta u = f(u)$ ) 102.
- Havlicek, F. I. (Wave-surface) 204.
- Hawkins, George Andrew (Thermodynamics) 196.
- Hayashi, Chikio (Survey of language) 144.
- , Fumiyo Maruyama and Masatsugu D. Ishida (Criteria for stratification) 344.
- Heber, G. (Magnetische Momente der Nukleonen. I. II.) 221.
- Heckmann, O., P. Jordan und W. Fricke (Gravitationstheorie) 208.
- Heer, C. V. and J. G. Daunt (Bose-Einstein liquids) 229.
- Heinrich, G. (Pinnen-gelagerter, symmetrischer Kreis) 183; (Fleuriais-Kreis) 183.
- Heins, Albert E. (Coupling of two ducts) 408.
- Maurice (Finite Blaschke products) 76; (Interior mapping) 301.
- Heinz, Erhard (Hermitesche Operatoren) 117; (Störungstheorie der Spektralzerlegung) 326.
- Heisenberg, W. (Elementary particles) 216; (Paradoxien des Zeitbegriffs) 428.
- Helfenstein, H. (Parabel) 147.
- Heller, William R. and Alma Marcus (Excitation in an idealized crystal) 444.
- Hellwege, K. H. (Optische Anisotropie) 450.
- Helsel, R. G. (Isoperimetric inequality) 58.
- Henning, Hans-Joachim s. U. Graf 143.
- Henstock, R. (Density integration) 280.
- Herbach, L. H. s. E. J. Gumbel 132.
- Herbst, Robert Taylor (Passive total systems) 312.
- Herring, Conyers and Charles Kittel (Spin waves) 447.
- Herstein, I. N. (Theorem of Jacobsen) 266.
- — — s. S. Chowla 259.
- Herzog, F. and G. Piranian (Univalence of functions) 81.
- — s. P. Erdős 80.
- Heuser, P. (Fabersche Polynome) 293.
- Heyting, A. (Riesz-Fischer theorem) 291.
- Heywang, W. (Feldstärke im kubischen Gitter) 450.
- Hiby, J. W. und M. Pahl (Einzelstreuung) 228.
- Higman, Donald G. (Lattice homomorphisms) 23.
- Graham (Almost free groups) 257.
- Hill, J. D. (Summability) 63; (Borel property of summability methods) 286.
- R. (State of stress) 235.
- Hilton, P. J. (Homotopy groups of  $A^2$ -polyhedra. II.) 383.
- Hiramatu, Hitosi s. K. Yano 375.
- Hirsch, Guy (Homologie des espaces fibrés) 171, 172.
- Hirschfelder, Joseph O. s. R. Buehler 199.
- Hirschman jr., I. I. and D. V. Widder (Convolution transforms) 109.
- Hirzebruch, Friedrich (Komplexe Mannigfaltigkeiten) 303.
- Hitotumatu, Sin (Weil's integral representation) 85.
- Hodge, W. V. D. (Characteristic classes on algebraic varieties) 173.
- Hodges jr., J. L. (Extremal problem of geometry) 162.
- Hodgson, P. E. s. Sir George Thomson 435.
- Hoffmann, T. A. (Theory of solids. II.) 443.
- Hofmann, J. E. (Thomas Bradwardine) 2.
- — — s. O. Becker 241.
- Hogg, Robert V. (Ratios of algebraic forms) 343.
- Hoggatt jr., V. E. s. H. Eves 353.
- Hohenberg, Fritz (Hyperkegelschnitte) 147; (Zykloiden und Trochoiden) 148; (Lilienthalsche Flächenpaare) 160; (Brennpunkteigenschaften) 359.
- Höller, Paul (Ausbreitung elektromagnetischer Wellen. I.) 414.
- Holmes, C. T. (Trigonometry) 356.
- Holøien, Erling (Negative helium ion) 224; (Rydberg correction) 224.
- Holstein, T. (Resonance radiation) 227.
- Holte, Gunnar (Slowed-down neutrons) 432.
- Hopkins, H. H. (Coherence in optics) 201.
- Horoï, M. and S. Onogi (Forced vibration of reed) 396.
- Horn, Alfred (Sentences which are true) 248.
- Hornich, Hans (Successioni di serie) 60.
- Horninger, H. (Planare Evolventenbewegung) 365.
- Hostinsky, L. Aileen (Endomorphisms of lattices) 34.
- Householder, A. S. s. C. W. Sheppard 433.
- Hove, L. van s. B. R. A. Nijboer 228.
- Howarth, L. (Rayleigh's problem) 193; (Boundary layer. II.) 399; (Boundary layer on a rotating sphere) 401.
- Hsu, L. C. (Asymptotic behaviour of multiple integrals) 283.
- Huang, Kun (Superconductivity) 445; (Radiation field) 449.
- Huber, Heinz (Analytische Abbildungen von Ringgebieten) 302.
- Huby, R. and H. C. Newns (Nuclear excitation) 430.
- Hull, T. E. s. L. Infeld 386.
- jr., M. M. s. I. Bloch 219.
- Hummel, P. M. and C. L. Seebek jr. (Interpolation formula) 64.
- Hunt, G. A. (Random Fourier transforms) 306.
- Hurley, A. C. (Finite rotation groups) 262.
- Husimi, K. and R. Utiyama (Belinfant's new theory) 428.
- Huxley, L. G. H. (Conductivity of a gas) 437.
- Ida, K. (Production of vector  $\pi$ -mesons) 426.
- Ikenberry, Ernest (Conservation of systems) 409.
- Il'ieff, Ljubomir (3-symmetrische schlichte Funktionen) 298.
- Imai, Isao (Viscous fluid flow) 190.
- Infeld, L. and T. E. Hull (Factorization method) 386.
- Ingraham, Richard (Relativité conforme) 209.
- Ioffe, B., A. Rudik und I. Smuškevič (Einfangen von  $\pi$ -Mesonen) 426.



- Isaacs, G. L. (Theorem due to M. Riesz) 287.
- Isaacson, Stanley L. (Unbiased tests of statistical hypotheses) 345.
- Iseki, Kanetsiro s. T. Tatusawa 274.
- Kiyoshi (Simply ordered groups) 31; (Closure operation in lattice theory) 35.
- Ishida, Masatsugu D. s. Ch. Hayashi 344.
- Ishiguro, Eiichi, Kenjiro Kambe and Tunemaru Usui (Spin relaxation time) 449.
- Išlinskij, A. Ju. (Umformung eines doppelten Konturintegrals) 199.
- Itô, Noboru (Irreducible representations of a finite group) 260.
- Ivanenko, D. und N. Kolesnikov (Doppelter  $\beta$ -Zerfall) 432.
- — und A. Sokolov (Klassische Feldtheorie) 198.
- — D., A. M. Brodskij und L. P. Ginsburg (Stabilität astronomischer Systeme) 237.
- Iyanaga, S. et T. Tamagawa (Théorie du corps de classes) 41.
- Iyer, R. Venkatachalam s. Venkatachalam Iyer, R. s. 1, 43.
- Izarn, André Sahut de s. Sahut d'Izarn, André 350.
- Jackson, F. H. (Dilution of matrices) 62.
- J. L. (Nuclear reactions) 222.
- S. B. (Spirals) 148.
- Jacobson, Nathan (Lie algebras of linear transformations) 268.
- James, G. S. (Comparison of groups of observations) 140.
- Robert C. (Linear functionals) 324.
- Jánossy, L. and H. Messel (Cascade theory) 435.
- Lajos and Harry Messel (Nucleon cascade) 435.
- Leonie and Harry Messel (Electron-photon cascade) 224.
- Järnefelt, G. (Finite approximation to Euclidean geometry) 351.
- Jarník, V. (Produit de composition de deux fonctions) 108.
- Jauch, J. M. s. A. Simon 430.
- Jauho, Pekka (Nuclear potential) 219.
- Jean, Maurice (Seconde quantification I. II. III.) 216; (IV. V.) 421.
- Jeffery, R. L. (Functions of a real variable) 279; (Convergent integrals) 281.
- Jeffreys, Harold (Gravity waves) 238; (Cellular convection) 240.
- — and Merriell E. M. Bland (Instability of a fluid sphere) 239.
- Jellinek, Karl (Wellenmechanik. II.) 224.
- Jenne, Werner s. K. Friedrich 334.
- Jessel, Maurice (Rayonnement d'une antenne) 201.
- Jessen, Børge (H. Bohr) 5; (Almost periodic functions) 305.
- Johnson, M. H. (Scattering of  $\pi$ -mesons) 426.
- N. L. s. F. N. David 345.
- R. E. (Prime rings) 267.
- Joos-Kaluza (Höhere Mathematik) 278.
- Jordan, P. s. O. Heckmann 208.
- Julia, G. s. H. Beghin 181.
- Juan, Ricardo San s. San Juan, Ricardo 66, 221.
- Kačanov, L. M. (Stabilität der Verbiegung II. III.) 188.
- Kadison, Richard V. (Bounded self-adjoint operators) 115.
- — s. B. Fuglede 117, 328.
- Kahan, Théo et Guy Rideau (Principe variationnel en Physique) 420.
- Kähler, Erich (Rein algebraische Körper) 39.
- Kakutani, Shizuo (Schauder's theorem) 329.
- Källén, G. (Mass- and charge-normalizations) 213; (Heisenberg representation) 213.
- Kaluza s. Joos-Kaluza 278.
- jr., Th. (Mittelwertfunktionen) 284.
- Kambe, Kenjiro s. E. Ishiguro 449.
- Kamefuchi, Susumu s. S. Sakata 217.
- — s. H. Umezawa 423, 425, 427.
- Kämmerer, C. (Stationäre Gasströmung) 193.
- Kampé de Fériet, J. and R. Betchov (Turbulent functions) 402.
- Kanazawa, H. s. S. Endo 428.
- Kanellos, S. G. (Probability of infinitely many events) 131.
- Kantorovič, L. V. (Majorantenprinzip) 119.
- — B. Z. Vulich und A. G. Pinsker (Halbgeordnete Räume) 332.
- Kapilevič, M. B. (Cauchysches Problem) 314.
- Kaplansky, Irving (Division rings) 37; (Rings of operators) 115.
- — s. I. S. Cohen 267.
- Kaplon, M. F. ( $\pi$ -meson production) 425.
- Kappos, Demetrios A. (Unabhängigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie) 338.
- Kaprekar, D. R. (Equal sums of powers) 43.
- Karapandžić, Djordje (Intégrales singulières des équations différentielles) 307.
- Karlin, Samuel (Continuous games) 135.
- Karpelevič, F. I. (Charakteristische Wurzeln von Matrizen) 16.
- Karplus, Robert and Maurice Neuman (Scattering of light by light) 424.
- Karush, W. (Characteristic vectors) 16.
- Katayama, Y. s. Z. Tokuoka 428.
- Katchalsky, Aharon s. R. M. Fuoss 439.
- Katscher, Friedrich (Neutron-Proton-Wechselwirkung) 219.
- Kawada, Yukiyo (Grouping of a topological group) 31; (Class field theory) 42.
- Kazačkov, B. V. (Sätze vom Sylowschen Typus) 22.
- Keldyš, Ljudmila (Stetige Abbildung des Segments auf den  $n$ -dimensionalen Kubus) 168.
- M. V. (Ausartung von Gleichungen elliptischen Typs) 95.
- Keller, Joseph B. and Albert Blank (Diffraction of pulses) 414.
- Kellner, L. (Vibrations of an infinitely long chain of  $\text{CH}_2$ -groups) 224.
- Kelly, L. M. (Distance sets) 167.
- Kennedy, E. S. (Lunar eclipse computer) 2.
- Kepler, Johannes (Gesammelte Werke. XIII. XIV. XV.) 3.
- Kerker, Milton s. A. L. Aden 416.

- Kertész, A. (Groups every subgroup of which is a direct summand) 29.
- Kertz, W. (Gezeitenartige Luftschwingungen) 453.
- Kesava Menon, P. (Finite transformation groups. I.) 262.
- Kiefer, J. s. P. Frank 346.
- Kikuchi, Ryoichi (Cooperative phenomena) 440.
- Kilburn, T. (Digital computing machine) 128.
- Kilmister, C. W. (Wave-tensor calculus) 365.
- Kingsley, Edward H. (Bernstein polynomials) 290.
- Kittel, C. (Antiferroelectric crystals) 448; (Ferromagnetic resonance) 448.
- Charles S. C. Herring 447.
- Klauder, H. (Exponenten der Temperatur) 238.
- Klee jr., V. L. (Compactness) 381.
- Klein, Abraham (Kemmer field) 214.
- Lawrence R. (Sample survey data) 348.
- Martin J. and Robert S. Smith (Ferromagnetic films) 447.
- Klemens, P. G. (Thermal conductivity) 441.
- Kline, Morris (Asymptotic solution of Maxwell's equations) 415.
- Klingenberg, Wilhelm s. F. Bachmann 352.
- Klitchieff, J. M. (Shearing forces) 187; (Stability of plates) 187.
- Klobe, Gerhard (Adiabatenskoefizient) 229.
- Knipp, Julian K. and Rufus C. Ling (Ionization yields) 434.
- Kneser, Hellmuth (Reihenentwicklung bei schwach singulären Stellen) 308.
- Knoche, Hans-Georg (Frobenius'scher Klassenbegriff) 258.
- Kochendörfer, A. s. A. Seeger 235.
- Kočin, N. E. (Vektor- und Tensorrechnung) 153.
- Kočina, N. N. (Grundwasser) 195.
- Koeckelenbergh, André (Modèle de chromosphèresolaire) 452.
- Kofoed-Hansen, O. ( $\beta$ -transitions) 223.
- Kohler, Max (Planetenbewegung) 418.
- Kohn, W. and Vachaspati (Fröhlich's theory of superconductivity) 445.
- Koiter, W. T. (Torsional vibrations of crankshafts) 395.
- Koizumi, Shoji (Differential forms on algebraic varieties. II.) 152.
- Kokareva, I. A. (Analytische Lösungen für Integro-Differentialgleichungen) 318.
- Koksma, J. F. (Uniform distribution) 277.
- Kolesnikov, N. s. D. Ivanenko 432.
- Kondô, Motokiti (Théorie descriptive des ensembles) 54.
- König, H. W. (Quantenhafte Eigenschaften) 218.
- Koopman, B. O. (Banach algebras) 133; (Markoff chains) 134.
- Koppe, H. (Supraleitung) 446.
- Korenblum, B. I. (Sätze vom Tauberschen Typus) 287; (Interpolationsproblem) 288.
- Korenev, B. G. (Verbiegung einer Platte) 186.
- Korevaar, Jacob (Tauberian theorems for power series) 63.
- Korhonen, Unto (Rubidiumnitrat) 439.
- Korovkin, P. P. (Wachstum der Funktionen) 83.
- Köthe, Gottfried (Reziproke einer unendlichen Matrix) 324.
- Koval'skij, B. S. (Querschwingungen der Last) 183.
- Kovner, M. A. und Š. E. Cimring (Moleküle des Metans) 224.
- Kramer, Edna E. (Main stream of mathematics) 245.
- Krasnosel'skij, M. A. (Zwei Aufgaben) 179.
- Krastanow, L. (Kondensationsvorgänge) 240.
- Krauss, Franz s. A. Sommerfeld 245.
- Krejn, M. G. (Charakteristische Zahlen und Ljapunovsche Stabilitätszonen) 309.
- Krishnan, K. S. and Sanat Kumar Roy (Oscillation of alkali halide crystals. I.) 233.
- Kritikos, N. (Convergence ou divergence) 60.
- Kropp, Gerhard (Lalouvéres Quadratura circuli) 243.
- Krüger, H. (Kernquadrupolspektren) 220.
- Krull, Wolfgang (Jacobson'sche Ringe) 38.
- Kruppa, Erwin (Mindingsche Verbiegungen) 367.
- Kruyswijk, D. s. N. G. de Bruijn 43.
- Kuerti, C. (Flow between spiral walls) 401.
- Kuhn, T. S. (Confluent hypergeometric equation) 72.
- Kulaschko, B. (Dreiecksflächen bei der Parabel) 237.
- Kundert, E. G. (Schnittflächen in speziellen Faserungen) 174.
- Kunisama, Kiyonori (Dispersion) 241.
- Kuntzmann, J. (Grille et tube) 333.
- Kuper, C. G. (Intermediate state of superconductors) 446.
- Kurita, Minoru (Riemann spaces) 372.
- Kuroš, A. G. (O. Ju. Šmidt) 5; (Ringe und Algebren) 35.
- Kushneriuk, S. A. s. B. Davison 432.
- Kustaanheimo, Paul (Finite approximation of euclidean plane geometry) 351.
- Kuttner, B. (Method of summability) 63.
- Kuznecov, P. I. s. N. N. Luzin 93.
- L'Abbé, Maurice (Henkin's axioms of propositional calculus) 8.
- Labrador, Juan Francisco (M. C. Agnesi) 5.
- Ladopoulos, Panaiotis (Métrique des courbes algébriques) 360.
- Ladyženskaja, O. A. (Hyperbolische Gleichungen) 98, 315.
- Laforge, Alexandre s. R. Daudel 225.
- Lafoucrière, J. (Méthode de la trochoïde) 206.
- Laible, Theodor (Höhenkarte des Fehlerintegrals) 128.
- Laitone, E. V. (Hadamard's solution) 405.
- Lamb, John s. J. H. Andreae 438.
- jr., Willis E. (Fine structure of hydrogen) 436.
- Lambe, C. G. (Lamé functions) 76.
- Lampariello, Giovanni (Relatività ed elettrodinamica) 207.
- Landau, L. and E. Lifshitz (Theory of fields) 198.
- Landauer, Rolf (Reflections in wave mechanics) 211.



- Landsberg, Max (Elektrostatischer Durchgriff) 412.  
 — P. T. (Characteristics of rectifiers) 445; (Barrier layer rectifiers) 445.  
 Landweber, L. (Fredholm integral equations) 106.  
 Langseth, A. s. S. Brodersen 230.  
 Lannér, Folke (Complexes with transitive groups of automorphisms) 179.  
 Larson, Robert E. and Erwin A. Gaumnitz (Life insurance mathematics) 144.  
 Lasley jr., J. W. (Projective-metric definition of distance) 351.  
 Lattanzi, Filippo (Teoria dell'ellisse di elasticità trasversale. I. II.) 393.  
 Latter, A. L. (Scattering approximation) 211.  
 Laudet, Michel (Distribution volumique de quadrupoles) 412.  
 Lauffer, R. (Analytische Kurvenpaare) 366.  
 Lavrent'ev, M. A. und L. A. Ljusternik (N. K. Bari) 5.  
 — V. M. (Wellenwiderstand eines Schiffes) 195.  
 Lawrence, H. R. (Lift distribution) 404.  
 Lax, Peter D. (Method of orthogonal projections) 317.  
 Le Levier, R. s. R. Finkelstein 216.  
 Lebedev, N. F. (Entlastungswelle) 189.  
 Ledermann, W. s. J. W. S. Cassels 52.  
 Leemans, J. (Relations entre polynomes  $s_n$ ) 251.  
 Lehan, Frank W. (Crossings of axis) 134.  
 Lehmann, N. Joachim (Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen) 105.  
 Lehmer, D. H. (Triangular number formula) 44.  
 Leichter, M. s. B. T. Darling 216.  
 Leisenring, Kenneth (Area in non-euclidean geometry) 353.  
 Leite Lopes, J. (Quantized Bose fields. I.) 425.  
 Lekkerkerker, C. G. (Formel für  $e^{(\pm \log x)}$ ) 71.  
 Lelong, Pierre (Singularités d'une fonction harmonique) 103; (Problem of Zorn) 296.  
 Lelong-Ferrand, Jacqueline (Représentations canoniques) 302.  
 Lemoine, Simone (Réseaux conjugués persistants) 367.  
 Lempicki, A. ( $p$ -type semiconductors) 444.  
 Lennard-Jones, Sir John (Conjugated molecules) 225.  
 — — — s. G. G. Hall 225.  
 Lense, Josef (Projektive Kräftetransformation) 182; (Winkeldreiteilung) 354.  
 Lenz, Friedrich (Magnetisches Linsensfeld) 417.  
 Lenzen, Victor F. (Statistical interpretation of quantum mechanics) 211.  
 Lepik, Ju. R. (Stabilitätsverlust von Platten) 188.  
 Lepsius, Richard (Kernphysikalische Betrachtungen. I.) 428.  
 Lessen, Martin (Prismatic ducts) 191.  
 Letov, A. M. (Charakteristische Zahl) 309.  
 Leutert, Werner (Heat equation) 126.  
 Levin, B. Ja. (Operatoren über den ganzen Funktionen) 85.  
 — M. L. (Transversale elektrische Felder) 199.  
 — V. I. (Asymptotische Entwicklungen) 65.  
 Levine, S. (Free energy of the double layer) 439.  
 — — and A. Suddaby (Free energy of the double layers) 231.  
 Levinger, J. S. (Nuclear photoeffect) 220.  
 Levitan, B. M. (Entwicklung nach Besselschen Funktionen) 70.  
 — — — s. G. J. Barenblatt 410.  
 Levitzki, J. s. A. S. Amitsur 37.  
 Lévy, Paul (Analyse fonctionnelle) 323.  
 Lewy, Hans (Minimal surfaces) 160.  
 Li, T. Y. and H. T. Nagamatsu (Density fluctuations) 192.  
 Lichnerowicz, A. (Géométrie kählérienne) 374.  
 Lidiard, A. B. (Exchange energy) 443; (Free electron ferromagnetism) 446.  
 Lifshitz, E. s. L. Landau 198.  
 Lifson, Schneor s. R. M. Fuoss 439.  
 Linejkin, P. S. (Oberflächenschicht des Meeres) 239.  
 Linfoot, E. H. (Schmidt cameras) 416.  
 Ling, Chih-Bing (Torsion of prisms) 188.  
 — Rufus C. s. J. K. Knipp 434.  
 Ljapunov (Liapounoff), A. A. (Auswahl von Verteilungsgesetzen) 141.  
 Ljusternik, L. A. s. M. A. Lavrent'ev 5.  
 Löbell, Frank (Basis komplexer Vektoren) 363.  
 Lochin, I. F. (Vollständigkeit eines Funktionensystems) 297.  
 Loeb, Arthur L. (Thermal conductivity) 197.  
 — Julien (Servomécanismes) 184.  
 Loeffler, A. (Cercle osculateur d'une quartique) 360.  
 Lohwater, A. J. and G. Piranian (Linear accessibility of boundary points) 82.  
 Lokki, Olli (Analytische Funktionen mit endlichem Dirichletintegral) 79.  
 Long, W. M. (Quality control systems) 136.  
 Longmire, C. L. and A. M. L. Messiah (Forbidden  $\beta$ -spectra) 223.  
 Longuet-Higgins, H. C. (Multi-component systems) 409.  
 — — — s. W. B. Brown 409.  
 Loonstra, F. (Partially ordered groups) 256.  
 Lopes, J. Leite s. Leite Lopes, J. 425.  
 López Nieto, Antonio (Baryzentrische Nomogramme) 337.  
 Łopuszański, Jan (Thomas-Fermi equation) 226.  
 Lorch, E. R. (Inequalities and convex bodies) 376.  
 Lorentz, G. G. (Spaces  $A$ ) 113; (Deferred Bernstein polynomials) 290.  
 Loud, W. S. (Functions with Lipschitz condition) 55; (Rounding-off procedure) 340.  
 Low, Francis s. K. A. Brueckner 219.  
 Löwdin, Per-Olov s. S. O. Lundqvist 225.  
 Lowe, John (Automatic computation) 190.  
 Luchak, George (Fall of a particle) 240.  
 Ludeke, Carl A. (Subharmonic oscillations) 389.  
 Lüders, Gerhart (Meßprozeß) 210.  
 Ludford, G. S. S. (Subsonic compressible flow) 404.

- Ludwig, H. (Kanalströmung) 195.
- Ludwig, Günther (Harmonischer Oszillator) 211.
- W. (Vaterschaftsteste) 144.
- Łukasiewicz, J. (Aristotle's syllogistic) 246.
- Luke, Yudell L. and Dolores Ufford (Roots of algebraic equations) 334.
- Lundqvist, Stig O. and Per-Olov Löwdin (Four-centre integrals) 225.
- Lufe, A. I. (Operatorenrechnung) 181.
- Luzin, N. N. und P. I. Kuznetsov (Absolute Invarianz und Invarianz bis auf  $\varepsilon$ . III.) 93.
- Maccaferri, Eugenio (Teoremi di Pappo-Guldino) 357.
- MacCann, G. D. s. R. H. MacNeal 188.
- Machida, S. and T. Tamura (Photo-meson production) 426.
- MacLane, Saunders s. S. Eilenberg 254.
- MacNeal, R. H., G. D. MacCann and C. H. Wilts (Aeroelastic problems) 188.
- Magenes, Enrico (Estremanti dei polinomiali) 108.
- Magnus, K. (Nicht-harmonische Erregung) 184.
- Wilhelm (Beschränkte Matrizen) 325.
- Mahajani, G. S. (Pure solid geometry) 356.
- Mahler, K. (Integers with a missing digit) 53; (Question in elementary geometry) 356.
- s. J. W. S. Cassels 52.
- Maity, Kantish Chandra s. H. D. Bagchi 60.
- Majstrenko, Petro (Set-theoretic generalization of analytic continuation. I.) 85.
- Majumdar, N. G. (Matter in a static field) 207.
- Mal'cev, A. I. (Unendliche auflösbare Gruppen) 23.
- Malkin, I. G. (Stabilität einer Bewegung) 310.
- Manacorda, Tristano (Discontinuità delle derivate del potenziale) 189.
- Manarini, Mario (Omografia vettoriale) 363.
- Mandel, Jean (Consolidation des sols) 231.
- M. (Constante diélectrique) 448.
- Mandelbrojt, S. (Theorems of closure) 289.
- Mann, W. Robert and Frantisek Wolf (Heat transfer) 100.
- Maravall Casesnoves, Dario (Kraft- und Massebegriff) 181.
- Marcus, Alma s. W. R. Heller 444.
- F. (Résultat de B. Segre) 367.
- Marcuvitz, Nathan (Field representations) 413.
- Mardesić, Sibe (Hauteurs des triangles en géométrie hyperbolique) 352.
- Mardžanišvili, K. K. (I. M. Vinogradov) 5.
- Marino, Caruncho R. (Grundlagen der Euklidischen Metrik) 351.
- Markov, A. (Unmöglichkeit von Algorithmen) 11.
- Markušević, A. I. s. Enzyklopädie der Elementarmathematik 12.
- Maroger, A. (Problème Pythagore-Fermat) 5.
- Martin, M. H. ( $(1p + e(y)p_y - 0)$ ) 315.
- Maruyama, Fumiyuki s. Ch. Hayashi 344.
- Maslov, P. G. (Zentralkraftsystem) 182.
- Mason, W. P. (First- and second-order magnetostriction) 447.
- Massey, H. S. W. and B. L. Moiseiwitsch (Atomic scattering problems. I.) 226.
- Massignon, Daniel (Hydrodynamique quantique. II.) 438.
- Mataré, H. F. (Randschichtwechselwirkung) 445.
- Matricon, M. (Répartition de la chaleur) 197.
- Matschinski, Matthias (Structure du vent) 240.
- Matthai, Abraham (Estimation of parameters) 137.
- Mautner, F. I. (Unitary representations of Lie groups) 30; (Fourier analysis and symmetric spaces) 263.
- Maxfield, Margarete Waugh (Order of a matrix) 272.
- May, Michael M. (Polarization of Bremsstrahlung) 214.
- McConnell, A. J. (Hypercircle method of approximation) 127.
- McCrea, W. H. (Clock paradox) 207.
- McKay, C. D. s. A. E. Scheidegger 410.
- McLachlan, N. W. (Stability of non-linear oscillator) 90.
- McNaughton, Robert (Infinite-valued sentential logic) 9.
- McPherson, J. C. s. K. Millsaps 183.
- McVittie, G. C. and Cecilia Payne-Gaposchkin (Spiral galaxy) 451.
- Meixner, Josef (Mathieu'sche Funktionen) 75.
- Meksyn, D. (Motion in the wake) 190; (Boundary-layer equation) 191.
- and J. T. Stuart (Stability of viscous motion) 400.
- Melvin, M. Avramy (Symmetry of electromagnetic fields) 418.
- Menon, P. Kesava s. Kesava Menon, F. 262.
- Mergeljan, S. N. (Satz von Lavrent'ev) 66; (Mit analytischen Funktionen zusammenhängendes Integral) 79.
- Merli, Luigi (Polinomi interpolanti) 64.
- Meschkowski, Herbert (Konforme Abbildung. I.) 82; (Normalabbildungsfunktionen) 302.
- Messel, H. (Nucleon cascade) 435, 436; (Electron-photon cascade) 436.
- and G. W. Gardner (Jánossy G-equation) 435.
- s. H. S. Green 219.
- s. L. Jánossy 224, 435.
- Messiah, Albert M. L. (Scattering of slow neutrons) 429.
- s. C. L. Longmire 223.
- Métral, Paul (Fonctions presque automorphes) 306.
- Meulenbeld, B. (Theorems of Erdős and Grünwald) 284; (Berechnung der Wurzeln einer Gleichung) 334.
- Meurers, J. (Globuli-Phänomen) 237.
- Meyer-König, W. (Matrizen der Limitierungstheorie) 286.
- Meyer zur Capellen, Walther (Zwillingskurbeltrieb) 155.
- Michael, Ernest (Topologies on spaces of subsets) 379.
- Michailovitch, Dobrivoje (Problème particulier de  $n$  corps) 390.
- Michal, Aristotle D. (Invariant differential forms) 331.
- Michel, Louis (Invariants formés de quatre fonctions d'onde) 421.



- Michiura, Tadashi (Simply ordered groups) 21.
- Mickle, Earl J. (Fréchet and Kérékjártó equivalence) 382.
- — — and Tibor Radó (Surface area theory) 57.
- Middleton, David (Randomly modulated waves) 413.
- Migotsky, E. and M. V. Morkovin (Shock-wave reflections) 194.
- Miles, John W. (Delta airfoils) 406.
- jr., Ernest P. (Functions harmonic within a sphere) 104.
- Milford, F. J. and L. L. Foldy (Cosmic-ray primaries) 434.
- Miller, Kenneth S. (Onesided Green's function) 88; (Sturm-Liouville problem) 88; (Differential operators) 307.
- Mills, W. H. (Holomorphs of Abelian groups) 257; (Jordan algebras) 269.
- Millsaps, Knox and J. C. McPherson (Oscillations) 183.
- Mingot Shelly, Jose (Umfüllaufgabe) 12.
- Ministry of Supply (Internal ballistics) 391.
- Minorsky, Nicolas (Pendule entretenu par un courant alternatif) 90.
- Miranda, Carlo (Soluzioni delle equazioni di tipo ellittico) 97.
- Mirimanov, R. G. (Feld in einer geschlossenen Kugelschale) 412.
- Misener, A. D. s. J. H. Blackwell 198.
- Mises, Richard von (Wahrscheinlichkeit) 130.
- Mishra, Ratan Shanker (Line congruences) 161.
- Mitchell, Josephine (Complete orthonormal system and kernel function) 325; (Geometry of matrices) 325.
- Mitra, S. C. and A. Sharma (Generating functions of polynomials. I.) 292.
- Mitrinovich, Dragoslav S. (Équation différentielle indéterminée) 87.
- Mitrović, Dragiša (Égalité d'intégrales) 298.
- Mizushima, Masataka (Pressure broadening) 228.
- Moffitt, W. (Oxygen molecule) 224.
- Mohr, Ernst (Bewegung eines Kreiseis) 183.
- Mohrenstein, A. v. ( $H_2$ -Molekül) 437.
- Moiseiwitsch, B. L. (Inelastic collision problems) 226.
- — — s. H. S. W. Massey 226.
- Moneo, Alberto (Semihomographische Transformationen) 357.
- Monna, A. F. (Approximations diophantiques. II.) 276.
- Montroll, E. W. and T. H. Berlin (Ising problem) 447.
- Moore, W. K. s. S. Chowla 259.
- Moran, James H. (Nonlinear oscillator) 427.
- P. A. P. (Animal trapping) 144.
- — — s. L. N. Chown 138.
- Mordell, L. J. (Lattice points in a tetrahedron) 51.
- Morduchaj-Boltovskoj, D. (Satz von Poncelet in der Lobačevskischen Ebene) 353.
- Morgenstern, Oskar (A. Wald) 245.
- Mori, Akira (Conformal representation of multiply connected domain) 81.
- Morita, Kiiti (Extension of a space. II. III.) 165.
- Moriya, Mikao (Klassenkörper) 42.
- Morkovin, M. V. s. E. Migotsky 194.
- Morris, Rosa M. (Plane stress) 186.
- Morrow, D. C. ( $D$  numbers) 43.
- Mostowski, Andrzej (Rules of proof in functional calculus) 9.
- Mott, N. F. (Metals) 442.
- Mott-Smith, H. M. (Boltzmann equation for a shock wave) 407.
- Motz, H. (Microwave theory) 413.
- Motzkin, Th. (Planes connecting the points of a finite set) 146.
- Mučnikov, V. M. (Bewegungsgleichung eines Zuges) 182.
- Muggia, Aldo (Calcolo dell'interferenza elica-ala) 397.
- Muhly, H. T. (Integral bases and varieties) 363.
- Mukherjee, B. N. (Mean value theorem) 59.
- — — and T. S. Nanjundiah (Laguerre and Hermite polynomials) 292.
- Mulholland, H. P. (Hartley-Khamis solution of the moment-problem) 338.
- Müller, Gert H. (Kuratowski-scher Raum. II.) 379.
- H. (Energiebänder) 443.
- Hans Robert (Geschlossene Bewegungsvorgänge) 365.
- W. (Längsbewegung eines Rotationskörpers) 398.
- Müller-Lübeck, Kurt (Ambipolare Raumladungsströmung) 438.
- Mullin, C. J. s. E. Guth 219.
- Mullineux, N. (Lattice points in a star body) 51.
- Muracchini, Luigi (Varietà  $V_5$ ) 370.
- Murnaghan, Francis D. (Hermite's law of reciprocity) 19; (Irreducible representations) 259; (Representations of the linear group) 260.
- Murteira, Bento (Autoregressive series) 143.
- Murti, Lakshmana (Elementary calculus) 277.
- V. N. (Mathematical expectation) 338.
- Muto, Toshinosuke and Seiichi Ōyama (Energy bands in crystal. II.) 444.
- Myers, S. B. (Functional uniformities) 166.
- Myhill, John (Consistent set-theory) 10.
- Myrberg, Lauri (Vermischte Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen) 316.
- Myškis, A. D. (Differentialgleichungen mit retardiertem Argument) 309.
- — — und V. E. Abolinja (Gemischtes Problem für partielle Differentialgleichungen) 314.
- Nabarro, F. R. N. (Dislocation fields) 235.
- Nabeya, Seiji (Moments of transformed correlation) 342.
- Nadeau, Gérard (Lentilles magnétiques) 206.
- Nagamatsu, H. T. s. T. Y. Li 192.
- Nagumo, Mitio (Degree of mapping) 178.
- — — s. S. Simoda 97.
- Nakabayasi, K. and I. Sato (Anomalous magnetic moment) 427.
- Nakamura, S. s. M. Taketani 427, 432.
- — — s. M. Umezawa 432.
- Nanda, V. S. (Partition theory) 196.
- Nandi, H. K. (Type  $B_1$  and type  $B$  regions) 346.

- Nanjundiah, T. S. s. B. N. Mukherjee 292.  
 — — s. V. R. Thiruvengkatachar 72.  
 Natanson, I. P. (Singuläre Doppelintegrale) 288.  
 Nedelkow, I. (Schwerkraftverteilung) 238.  
 Nelder, J. A. (Statistical independence of quadratic forms) 136.  
 Neou, I. M. s. J. N. Goodier 186.  
 Neuman, Maurice (Fredholm structures) 421.  
 — — s. R. Karplus 424.  
 Neumann, B. H. (Groups with finite classes of conjugate elements) 24; (Non-associative rings) 36.  
 — Hanna (Amalgam of abelian groups) 257.  
 — J. von s. H. Goldstine 123.  
 Nevanlinna, Rolf (Gauß-Bonnet'scher Satz) 301.  
 Neville, E. H. (Jacobian elliptic functions) 76; (Trigonometrical inequality) 285.  
 Newell, M. J. (Pléthysm of  $S$ -functions) 260.  
 Newman, D. J. (Number of partitions) 45.  
 News, H. C. s. R. Huby 430.  
 — W. F. (Basic sets of polynomials) 297.  
 Newton, R. R. s. M. E. Rose 420.  
 Neyman, Jerzy (Estimates of the directional parameter) 349.  
 — — and Elizabeth L. Scott (Estimating the linear structural relation) 139.  
 Niče, Vilko (Surfaces des génératrices isotropes dans les congruences) 362.  
 Nicholas, J. F. (Outer Brillouin zones) 443.  
 Nicolau, Edm. (Oscillateurs électroniques) 413.  
 Niehrs, Heinz (Mengenfunktion) 196; (Wärmemenge) 196.  
 Nielsen, Harald H. (Microwave spectra) 228.  
 Nieto, Antonio López s. López Nieto, Antonio 337.  
 Niggli, Alfred und Paul Niggli (Kristallstrukturlehre) 440.  
 — Paul s. Alfred Niggli 440.  
 Nijboer, B. R. A. et L. van Hove (Fonction de distribution radiale) 228.  
 Nikol'skij, S. M. (Ungleichungen für ganze Funktionen) 56.  
 Nishijima, K. (Furry's theorem) 424.  
 Nöbeling, Georg (Verallgemeinerung des Folgenbegriffes) 163.  
 Noether, Gottfried E. (Confidence and tolerance intervals) 348.  
 Noi, Salvatore di (Congruenze sulla retta) 352.  
 Nollet, Louis (Surfaces algébriques à système canonique réductible) 150.  
 Norzi, Livio (Instabilità elastica) 188.  
 Noshiro, Kiyoshi (Open Riemann surface) 301.  
 Novožilov, V. V. (Statistische Untersuchungen isotroper Materialien) 136.  
 Nye, J. F. (Flow of glaciers) 394.  
 Obrechhoff, N. (Approximation des nombres irrationnels) 277; (Fonctions réelles définies sur tout l'axe réel) 282.  
 O'Dwyer, J. J. (Dielectric constant) 448.  
 Ogawa, Junjiro (Ratio of population means) 348; (Weinberg's statistical method) 350.  
 Ohtsuka, Makoto (Dirichlet problems of Riemann surfaces) 300.  
 Oka, Kiyoshi (Fonctions analytiques de plusieurs variables. VIII.) 304.  
 Ōkubo, H. (Stretching of spiral rods. I.) 393.  
 Oldroyd, J. G. (Motion of an elastico-viscous liquid I.) 395.  
 Olejnik, O. A. (Randwertproblem für Gleichungen vom elliptischen Typus) 96.  
 Olkin, Ingram s. W. L. Deemer 342.  
 Olsson, P. O. (Neutron-proton scattering) 219.  
 Ono, Ken-ichi s. M. Taketani 432.  
 Onogi, S. s. M. Horio 396.  
 Öpik, E. J. (Interplanetary matter) 237.  
 Opinsky, A. J. and R. Smoluchowski (Slip in cubic single crystals. I.) 439.  
 Ore, Oystein (Commutators) 24; (Graphs) 385.  
 Orgeval, B. d' (Diviseur de Severi) 150.  
 Orloff, Konstantin (Théorème des accroissements finis) 284.  
 O'Rourke, R. C. (Three-dimensional photoelasticity) 391.  
 Osborne, M. F. M. (Perfect diamagnetism) 449.  
 Ossicini, Alessandro (Sommabilità delle serie di Legendre) 69.  
 Ostrowski, Alexander (Lokalisierung der charakteristischen Wurzeln) 17.  
 — A. M. and Olga Taussky (Positive definite matrix) 252.  
 Oswatitsch, Klaus (Kompressibilitätseffekt) 192.  
 Ou Tchen-Yang, Vicent s. Tchen-Yang, Vicent Ou 298.  
 Ōyama, Seiichi s. T. Muto 447.  
 Pac, P. Y. s. H. Enatsu 427.  
 Pacella, Giovan Battista (Problema di Stokes) 191.  
 Page, A. (Trigonometry) 356.  
 Pahl, M. s. J. W. Hiby 228.  
 Pai, S. I. (Two-dimensional laminar jet flow) 400.  
 Paige, L. J. (Mappings of finite groups) 24.  
 Pajares Diaz, E. (Quartik) 147.  
 Palamà, Giuseppe (Sistemi indeterminati impossibili) 253.  
 Palatnik, L. S. (Kristallgeometrische Zuordnung) 232.  
 Pallu de la Barrière, Robert (Algèbres unitaires) 115; (Décomposition des opérateurs non bornés) 115.  
 Pan, T. K. (Hypergeodesics) 157.  
 Papapetrou, A. and E. Schrödinger (Nonsymmetric field theory) 208.  
 Parodi, Maurice (Équations intégrales) 320.  
 Parzen, G. (Radiation from an electron) 423.  
 — P. and L. Goldstein (Gas discharge plasma) 227.  
 Pastidès, N. (Transformations cycliques) 385.  
 Pati, Tribikram (Non-euclidean geometry) 352.  
 Patinkin, Don (Classical monetary theory) 350.  
 Patroni, Adriano (Manoscritto di Leonardo da Vinci) 2.  
 Payne-Gaposchkin, Cecilia s. G. C. McVittie 451.  
 Peach, M. O. (Dislocation theory) 441.  
 Pearson, E. S. s. H. O. Hartley 136.



- Pease, Jane S. (Dibarc particles) 215.
- Peaslee, D. C. (Compound Dirac equation) 421; ( $\beta$ -matrix formalism) 425.
- Peck, J. E. L. (Ergodic theorem) 333.
- Peebles, Glenn H. and Milton S. Plesset (Transmission of gamma-rays) 434.
- Pellegrino, F. s. P. Lévy 323.
- Pelzer, H. (Dispersive medium) 449.
- s. B. Gross 396.
- Penico, A. J. (Jordan algebras) 39.
- Pennington, W. B. (Ramanujan's function  $\tau(n)$ ) 45.
- Peremans, W. (Finite binary projective groups) 261.
- Perfect, Hazel (Matrices with positive elements) 333.
- Permutti, Rodolfo (Equazioni a gruppo di Galois super-solubile) 254.
- Pernet, Roger (Groupe conforme) 358.
- Péter, Rózsa (Rekursive Funktionen) 248.
- Petermann, A. s. E. C. G. Stueckelberg 210.
- Petiau, Gérard (Paires électrons-positons) 212; (Sections efficaces des collisions corpusculaires) 219; (Émission du bremsstrahlung électromagnétique) 424.
- Pettis, B. J. (Theorem of McShane) 55; (Extension of measures) 279; (Parametric linear operations) 328.
- Phillips, Aris (Plastic bending) 188.
- H. B. (Differential equations) 307.
- R. S. (Semi-groups of linear transformations) 114; (Ergodic theory) 332.
- Picard, Sophie (Bases du groupe de Klein généralisé) 27; (Groupes imprimitifs) 27.
- Picht, Johannes (Optische Schallanalyse. II.) 417.
- Picone, Mauro (National Institute for Applied Calculus) 333.
- Pidduck, F. B. (Diffraction of light) 416.
- Piekara, A. (Molecular orientation. I. II.) 230.
- Pieruschka, E. (Wellen zäh-elastischer Medien) 395.
- Pihl, Mogens (Theodoros-Stelle) 1.
- Pikler, Andrew (Optimum selection and optimum registration) 350.
- Pillai, K. C. S. (Analogue of Student's  $t$ ) 138.
- Pines, David s. D. Bohm 437.
- Pinl, M. (Satz von L. Berwald und Minimalflächen) 157.
- Pinsker, A. G. s. L. V. Kantorovič 332.
- Pippard, A. B. (Liquid helium) 229.
- Piranian, G. s. P. Erdős 80.
- s. F. Herzog 81.
- s. A. J. Lohwater 82.
- Pirlet, J. (Rahmenartige Tragwerke) 378.
- Pisot, Ch. s. J. Dufresnoy 294.
- Pitts, Walter s. G. de Santilana 242.
- Piza, A. P. de Toledo s. Toledo
- Piza, A. P. de 131.
- Plesset, Milton S. s. G. H. Peebles 434.
- Ploke, M. (Elektronenstrahlerzeugung. I.) 206.
- Plotkin, B. I. (Lokal-nilpotente Gruppen) 22.
- Podolsky, Boris (Heat conduction) 197.
- Pöhllein, Hubert (Wolfgang Seidel) 2.
- Polachek, H. s. R. J. Seeger 194.
- Pollard, Harry (Closure of translations in  $L^p$ ) 329.
- Polubarinova-Kočina, P. Ja. (Instationäre Bewegungen) 190; (Grundwasser) 195.
- Pomerančuk, I. ( $\pi$ -Teilchen im Deuton) 222.
- Ja. s. V. B. Beresteckij 429.
- Pompili, Giuseppe (Teoria della persuasione) 131.
- Pontrjagin, L. S. (Abbildungen der Sphäre  $S^{n+k}$  auf die  $S^n$ ) 177.
- Popoff, Kyrille (Mouvement d'un projectile) 184.
- Popov, B. S. (Équation algébrique proposée par Pitoiset) 19.
- I. V. (Frage von V. N. Deputatov) 76.
- Poritsky, H. (Weyl's integral for harmonic spherical waves) 98.
- Possel, René de (Notion d'énergie) 181.
- Postnikov, A. (Trigonometrische Ungleichungen) 276.
- M. M. (Klassifikation der stetigen Abbildungen) 176.
- Potter, H. S. A. (Volume of a metric domain) 14.
- Potts, D. H. (Green's theorem) 283.
- Power, E. A. s. J. C. Gunn 215.
- G. (Potential due to a dielectric sphere) 104.
- Poznjak, E. G. (Verbiegungen von vieleckigen Rinnen) 160.
- Pozzati, Piero (Solai a fungo) 187.
- Pradillo, J. García s. García
- Pradillo, J. 76.
- Prasad, A. V. (Theorem of Khintchine) 276.
- Prasad, B. N. and R. Shukla (Aryabhata of Kusumpura) 243.
- Press, Frank and Maurice Ewing (Air-coupled flexural waves) 238.
- Preston, Melvin A. (Alpha-radioactivity) 222.
- Preuß, Heinzwerner ( $H_2$ -Molekül) 436.
- Prim, R. C. (Intrinsic semiconductors) 444.
- Prodi, Giovanni (Criteri di stabilità) 89.
- Pröll, Arthur (Grundlagen der Aeromechanik) 397.
- Protter, M. H. (Harmonic polynomials) 73.
- Pryce, M. H. L. s. A. Abragam 448.
- Putnam, C. R. (Commutation relations) 211.
- Pylarinos, O. (Courbes sphériques et courbes de Bertrand) 366; (Strahlensysteme) 368.
- Quade, W. (Numerische Integration) 335.
- Quenouille, M. H. (Variate-difference method) 341.
- Quine, W. V. (Consistency of „new foundations“) 9.
- Raaz, F. und H. Tertsch (Kristallographie) 205.
- Rabe, W. (Bahnverbesserung visueller Doppelsterne) 451.
- Radhakrishna Rao, C. s. Rao, C. Radhakrishna 139, 343.
- Rado, George T. (Inertia of domain walls) 447.
- Radó, Tibor (Singular homology theory) 169, 170; (Chain-homotopy) 170.
- s. E. J. Mickle 57.
- Rådström, Hans s. O. Hanner 162.
- Raffin, R. (Algèbres génétiques) 265.
- Ramabhadran, V. K. (Gamma-type distribution) 131.

- Ramachandran, G. N. (Optical activity of crystals. I.) 450.
- Ramanathan, K. G. (Units of quadratic and hermitian forms) 50.
- Ramaswami, V. (Number of integers in an assigned  $A$ ,  $P \geq x$  and prime to primes greater than  $x^c$ ) 47.
- Ramsayer, Karl (Funktions-rechenmaschinen) 129.
- Randall, Robert H. (Acoustics) 189.
- Rao, C. Radhakrishna (Classificatory problems) 139; (Least squares) 343.
- Rapoport, I. M. (Singuläres Randwertproblem) 91.
- Rauch, H. E. (Differential geometry in the large) 372.
- Rayski, Jerzy (Non-linear effects. I.) 215; (Non-local electrodynamics) 217; (Reciprocal field theory) 217; (Non-local quantum electrodynamics) 428.
- and J. Rzewuski (Fields free of divergences) 214.
- and Bronislaw Średniawa (Non-linear effects. II.) 215.
- Reade, Maxwell O. (Mass distribution) 104; (Characterization of minimal surfaces) 158.
- Rédei, L. und J. Szép (Endliche nilpotente Gruppen) 259.
- Redheffer, R. M. (Incompleteness of  $\{e^{i\lambda_n z}\}$ ) 50.
- and R. Steinberg (Laplacian and mean values) 284.
- Rees, P. K. and F. W. Sparks (Intermediate algebra) 11.
- Regenstreif, Édouard (Lentille électrostatique) 206.
- Reuter, G. E. H. (Differential equations with almost periodic solutions) 90.
- Rham, G. de (Homéomorphie différentiable) 176.
- Riabouchinsky, Dimitri (Résistance de frottement) 191; (Singularités du régime transsonique) 406.
- Ribaud, Gustave (Transport de gaz à grande distance) 193.
- Ricci, Giovanni (Scuola matematica pisana) 245.
- Rice, Stephen O. (Reflection of electromagnetic waves) 201.
- Richardson, A. R. (Compositions involving ternary cubics) 276.
- Richmond, D. E. s. R. Gomory 125.
- Ridder, J. (Zur Note von Schärf) 282.
- Rideau, Guys. Th. Kahan 420.
- Rider, Paul R. (Distribution of the range) 136; (Distribution of the quotient of ranges) 136.
- Rios, Sixto (Statistische Methoden. I.) 135; (Konvergenz von Verteilungen) 340.
- Ritchie, R. H. (Temperature function) 409.
- Ritt, J. F. (Subgroups of differential groups) 29.
- Rizza, Giovanni Battista (Funzioni analitiche nelle algebre ipercomplesse) 86.
- Robert, Paul s. A. Thybaut 368.
- Roberts, K. V. (Equivalence theorem) 215.
- Robinson, Abraham (Metamathematics of algebra) 247.
- G. de B. s. R. M. Thrall 260.
- Kenneth (Ellipsoidal inclusion in an infinite solid) 391.
- Robin (Absolute geometric constant) 277.
- Rochlin, V. A. (Abbildung der  $(n+3)$ -dimensionalen Sphäre in die  $n$ -dimensionale) 384.
- Rogers, C. A. (Lattice points in a star body) 51; (Transformation of sequences) 62.
- Rohde, K. (Statistische Methoden in der Fernsprechtechnik. II.) 341.
- Röhrl, Helmut (Differentialsysteme. I.) 299.
- Román, P. (Atomic nuclei) 221.
- Rose, Alan ( $C-O$  propositional calculus) 7; (Three-valued logic) 7; (Independence et noncontradiction) 8; (Propositional calculus) 8.
- Gene F. (Proof schema for a class of theorems) 278.
- M. E. (Dirac central field wave functions) 420.
- — —, G. H. Goertzel, B. I. Spinrad, J. Harr and P. Strong (Internal conversion coefficients. I.) 220.
- — — and R. R. Newton (Dirac wave functions in a central field) 420.
- — — s. G. B. Arfken 220.
- Rose, M. E. s. L. C. Biedenharn 431.
- — — s. A. Simon 430.
- Roseau, Maurice (Mouvements ondulatoires de la mer) 194; (Ondes liquides de gravité) 194, 195.
- Rosenfeld, L. (Nuclear structure) 220.
- Roth, K. F. (Gaps between squarefree numbers) 48; (Problem of Heilbronn) 163; (Waring's problem) 273.
- — — s. H. Halberstam 49.
- L. (Unirational varieties) 152.
- Leonard (Invarianti d'una varietà algebrica) 152.
- Roth-Desmeules, Ernst (Raketen) 185.
- Rothstein, Wolfgang (Fortsetzung vierdimensionaler analytischer Flächen) 85.
- Rott, N. (Unsteady motion of a wing) 406.
- Rotta, J. (Nichthomogene Turbulenz. II.) 402.
- Roubine, Élie (Champ électromagnétique des hélices) 200.
- Roux, Monique s. O. Chalvet 225.
- Roy, Sanat Kumar s. K. S. Krishnan 233.
- Royden, H. L. (Open Riemann surfaces) 84.
- Rozenthal', I. L. (Kern-Kaskadenprozeß) 224.
- Rozet, O. (Congruences non  $W$  de droites) 370.
- Rubašov, A. N. (Haupttragsachsen) 182.
- Rubinstein, L. I. (Wärmeausbreitung) 93.
- Ruddlesden, S. N. s. A. C. Clark 222.
- Ruderman, Harry D. (Nogramic instrument) 127.
- M. s. R. Finkelstein 216.
- Rudik, A. s. B. Ioffe 426.
- Rudin, Walter (Hermite series) 68; (Subharmonic functions) 104.
- Ruse, H. S. (Riemann complex in a four-dimensional space) 371.
- Rushbrooke, G. S. and H. I. Scoins (Born-Green theory) 229.
- Rushton, S. (Least squares fitting) 336.
- Ruston, A. F. (Direct products of Banach spaces) 110.
- Rutishauser, Heinz ( $\int e^{i(x+a\cos x)} dx$ ) 284.
- Ryser, H. J. (Latin rectangles) 12.



- Rzewuski, Jan (Self-energy of scalar mesons) 214.  
 — s. J. Rayski 214.
- Saban, Giacomo (Varietà quasi-asintotiche. III.) 370.
- Sachs, R. G. (*V*-particles) 433.
- Sadowsky, M. A. s. E. Sternberg 392.
- Sahut d'Izarn, André (Taux réel de rendement) 350.
- Sakata, Shoichi, Hiroomi Umezawa and Susumu Kamefuchi (Renormalization theory) 217.
- Sakellariou, Nilos (Geodesic lines) 156.
- Salecker, H. (Massenunterschied) 217.
- Saltykow, N. (Système d'équations différentielles ordinaires) 87.
- Salvetti, C. s. S. Gallone 221.
- San Juan, Ricardo (Asymptotische Entwicklungen) 66; (Transformations de Laplace) 321.
- Sandelius, Martin (Truncated inverse binomial sampling) 137; (Inverse hypergeometric sampling) 348; (Inverse sampling. I.) 349.
- Sanden, H. von (Praktische Mathematik) 121.
- Sándorfy, Camille s. O. Chalvet 225.
- Santaló, L. A. (Paare konvexer Körper) 376; (Ungleichung von H. Hornich) 377.
- Santillana, George de and Walter Pitts (Philolaos in Limbo) 242.
- Santos, Socrates de los s. Chi-Teh Wang 193.
- Sapogov, N. A. (Stabilitätsproblem) 132.
- Sasaki, M. s. M. Taketani 427.  
 — Yasuharu (Convexity of bounded functions) 79; (Bounded function) 298.
- Sassenfeld, H. (Summenverfahren für Rand- und Eigenwertaufgaben) 336.
- Šatašvili, S. Ch. (Stehende Schwingungen) 189.
- Sato, I. s. K. Nakahayasi 427.
- Sauer, Robert (Projektive Beziehungen in der Charakteristikentheorie) 94.
- Savin, S. A. (Dreidimensionale Laplacesche Gleichung) 315.
- Sawada, K. (Type of interaction) 425; (Cohesive field) 427.
- Schachenmeier, R. (Quantentheorie der Supraleitung) 446.
- Schafer, R. D. (Derivations of Jordan algebras) 38.
- Schäffke, Friedrich Wilhelm (Parameterabhängigkeit bei Differentialgleichungen) 308.
- Schärf, H. M. (Two types of Stieltjes integrals) 281.
- Schatzman, Evry (Modèles de planètes) 453.
- Scheidegger, A. E. and C. D. McKay (Quantum statistics of fields) 410.
- Schellkunoff, S. A. (Wave propagation in stratified media) 201.
- Schelling, Hermann von (Ordinal number of simultaneous events) 133.
- Scherrer, W. (Stützfunktion und Radius. I. II.) 156.
- Schiffer, M. s. S. Bergman 84, 316.
- Schlichting, H. (Grenzschichttheorie) 398.
- Schlomka, Teodor (Ohmsches Gesetz) 207.
- Schlüter, Arnulf s. L. Biermann 223.
- Schmeidler, F. (Stabile Schichtung im Sterninnern) 452.
- Schmetterer, Leopold (Multiplikation unendlicher Reihen) 286.
- Schoenberg, I. J. and Anne Whitney (Variation-diminishing linear transformations) 252.
- Schreier, O. and E. Sperner (Modern algebra and matrix theory) 12.
- Schrödinger, E. (Theory of gravitation. I.) 418.  
 — s. A. Papapetrou 208.
- Schubart, Hans (Ganze Funktionen) 77.
- Schuid, Marie-Jeanne s. R. Ballieu 38.
- Schultz, Walter (Vielfachstreuung) 442.
- Schultz-Piszachich, W. (Gewölbte Tragflügelprofile) 193; (Drehkörper im Unter- und Überschallbereich) 404.
- Schützenberger, M. P. (Incomplete block designs) 343.
- Schützer, Walter and J. Tiomno (Connection of the scattering with causality) 420.
- Schwank, F. (Randwertprobleme) 93.
- Schwartz, J. (Space  $L_p$ ) 119.  
 — Laurent (Analyse et synthèse harmoniques) 330.
- Schwarz, Ludwig (Zu der Note von Herglotz) 118.
- Schwarz-Bergkampff, Erich (Modellgesetze) 403.
- Schwarzl, F. (Viscoelastisches Verhalten. I.) 395; (II.) 396.
- Schweber, S. (Configuration space methods) 424.
- Schwinger, Julian (Gauge invariance) 422; (Quantized fields. I.) 422.  
 — s. H. Feshbach 219.
- Scoins, H. I. s. G. S. Rushbrooke 229.
- Scorza Dragoni, Giuseppe s. F. Severi 278.
- Scott, E. J. s. St. Banach 181.  
 — Elizabeth L. s. J. Neyman 139.  
 — W. R. (Algebraically closed groups) 23; (Multiplicity function) 282.  
 — T. (Electron cascades) 436.
- Scroggs, Schiller Joe (Lewis system *S* 5) 8.
- Seal, K. C. (Errors of estimates) 137.
- Sears, D. B. (Spectrum of a differential equation) 308.
- Seban, R. A. and R. Bond (Axial incompressible flow) 400.
- Seebeck jr., C. L. s. P. M. Hummel 64.
- Seeger, Alfred und Albert Kochendörfer (Versetzungen. II.) 235.  
 — R. J. and H. Polachek (Shock-wave phenomena) 194.
- Segal, I. E. (Operator algebras. I.) 115; (II.) 116.
- Segre, Beniamino (Involuzioni piane non birazionali) 149; (Coincidenze isolate) 149; (Inflexional curve of an algebraic surface) 151; (Rational solutions of cubic equations) 275; (Questioni algebrico-differenziali) 361.
- Seidel, W. P. s. B. Davison 432.
- Seifert, George (Boundary value problem) 91.
- Sekerž-Zenkovič, Ja. I. (Stehende Wellen) 195.
- Seleznjev, A. I. (Universelle Potenzreihen) 295.
- Semple, J. G. (Projected Segre varieties) 151.
- Sen, Bibhutibhusan (Thermoelastic strain) 187.  
 — D. K. (Newton's method) 334.  
 — H. K. s. J. Feinstein 200.  
 — N. R. (Heisenberg's spectrum of turbulence) 402.

- Sengupta, A. M. (Elastic plates containing circular holes. I.) 391.
- Šerman, D. I. (Ebenes schwere Medium) 188.
- Servranckx, R. s. J. Géhéniau 430.
- Seth, B. R. (Boundary conditions) 102.
- Ševčenko, K. N. (Axialsymmetrisches elasto-plastisches Problem) 394.
- Severi, Francesco (La donna e la matematica) 5.
- e Giuseppe Scorza Dragoni (Lezioni di analisi. III.) 278.
- Sext, Theodor (Bewegung eines Massenpunktes) 388.
- Shah, A. B. and Madhumalati Apte (Plane analytic geometry) 357.
- S. M. (Exceptional values of entire functions) 297.
- Shanks, E. B. (Binomial coefficients) 12.
- Sharma, A. s. S. C. Mitra 292.
- Shelly, Jose Mingot s. Mingot Shelly, Jose 12.
- Shepherdson, J. C. (Matrix rings) 17; (Inner models for set theory. I.) 53.
- Sheppard, C. W. and A. S. Householder (Interpretation of tracer experiments) 433.
- Shepperd, J. A. H. s. J. L. Britton 21.
- Sherman, Seymour (Games and sub-games) 135.
- Shield, R. T. s. A. E. Green 392.
- Shiffman, M. and D. C. Spence (Force on a cone) 190.
- Shrikhande, S. S. (Non-existence of difference sets for group designs) 136; (Affine resolvable balanced incomplete block designs) 136.
- Shukla, R. s. B. N. Prasad 243.
- s. R. K. P. Singh 249.
- Sibirani, Filippo (Rendita vitalizia) 145.
- Siddiqi, Jamil Ahmad (Théorème de Mandelbrojt) 59.
- Siegel, Carl Ludwig (Modulgruppe) 262; (Indefinite quadratische Formen. I.) 274; (Dreikörperproblem) 389.
- Siestrunck, Raymond s. J. Fabri 193.
- Silverman, Edward (Lebesgue area) 57.
- Sim, A. C. (Generalization of reversion formulae) 323.
- Simoda, Seturo et Mitio Nagumo (Solution bornée de l'équation du type elliptique) 97.
- Simon, A., M. E. Rose and J. M. Jauch (Alignment of nuclei) 430.
- F. E. (Nernst's theorem) 409.
- Simpson, Paul B. (Production indexes) 146.
- Singh, R. K. P. and R. Shukla (Götting's axiom system) 249.
- Sinha, Sri Rama (Bhaskara's Lilavati) 243.
- Sitnikov, K. (Homologieumgürtung) 383; (Dualitätssatz) 383.
- A. (Homologieumgürtung) 171.
- Skellam, J. G. (Random dispersal) 144.
- Škrebilin, Stjepan (Période d'une fraction) 272.
- Slater, J. C. (Electron theory of solids) 442.
- Ślebodziński, W. (Parallélisme absolu) 374.
- Slezkin, N. A. (Bewegung eines deformierbaren Mediums) 226; (Deformationsprozesse) 236.
- Slobodjanskij, M. G. (Ableitungen gesuchter Funktionen) 316.
- Sloovere, Henri de (Nombre d'invariants distincts) 312.
- Slotnick, M. (Neutron diffraction) 234.
- Smart, E. Howard (Advanced dynamics. I. II.) 180.
- Smiley, M. F. (Non-associative rings) 36; (Alternative rings) 37.
- Smirnov, A. A. s. S. V. Vonsovskij 444.
- D. M. (Lokal-nilpotente Gruppen) 22.
- Ju. M. (Systeme von offenen Mengen) 164; (Normal gelegene Mengen) 165.
- Smith, A. M. (Forbidden beta-ray spectra) 222.
- C. D. (Probability estimates) 136.
- Robert S. s. M. J. Klein 447.
- Smoluchowski, R. s. A. J. Opinsky 439.
- Šmuškevič, I. s. B. Ioffe 426.
- Šnejdmüller, V. I. (Zweidimensionale diophantische Approximationen) 52.
- Snyder, Hartland S. (Foldy-Wouthuysen transformation) 212; (Hartree approximation) 214; (Adiabatic theorem) 420.
- Sobolev, V. J. s. E. P. Voskresenskij 318.
- Sodnomov, B. S. (Arithmetische Summen von Mengen) 55.
- Sokolevskij, V. V. (Grenzgleichgewicht) 195.
- Sokolov, A. s. D. Ivanenko 198.
- V. und A. Z. Veksler (Thermoelektronenemission) 446.
- — s. S. V. Vonsovskij 444.
- D. Ju. (Grundwasser) 195.
- Sollfrey, W. and G. Goertzel (Quantum-mechanical divergences) 213.
- Sommerfeld, Arnold und Franz Krauss (O. Blumenthal) 245.
- Spanier, E. s. Shiing-shen Chern 384.
- Sparks, F. W. s. P. K. Rees 11.
- Specht, E. J. (Conformal mapping of nearly circular regions) 302.
- Spence, D. C. s. M. Shiffman 190.
- R. D. and C. P. Wells (Vector wave functions) 97.
- — s. S. Granger 221.
- Sperner, E. s. O. Schreier 12.
- Spiers, J. A. s. R. J. Blin-Stoyle 222.
- Spinrad, B. I. s. M. E. Rose 220.
- Spoerl, Charles A. (Actuarial science) 144.
- Spragens, W. H. (Series of Walsh eigenfunctions) 290.
- Springer, George (Pseudoconformal transformations) 304.
- T. A. (Symplektische Transformationen) 19.
- Squire, H. B. (Round laminar jet) 400.
- William (Turbulent flow) 192; (Motion of a particle) 240; (Heat conduction) 411.
- Średniawa, Bronisław s. J. Rayski 215.
- Šrejder, Ju. A. (Beispiel eines verallgemeinerten Charakters) 263.
- Srinivasan, M. S. (Squares of integers) 272.
- Stariček, Imrich (Lichtwelle in anisotropem Medium) 416.
- Staver, Tor B. (Scattering of slow electrons) 225.



- Stečkin, S. B. (Orthogonalreihen. I.) 288.
- Steel, Robert G. D. (Minimum generalized variance) 342.
- Stein, C. M. (Tests of composite hypotheses) 346.
- Karl s. H. Behnke 303.
- P. (Inequalities for the norm of a matrix) 252.
- Steinberg, R. s. R. M. Redheffer 284.
- Stephenson, J. M. (Secondary flow) 190.
- Sternberg, E., R. A. Eubanks and M. A. Sadowsky (Stress function approaches) 392.
- Sternheimer, R. (Nuclear quadrupole moments) 220.
- Stevens, W. L. (Contingency table) 136.
- Steward, G. C. (Plane kinematics) 154.
- Stewart, B. M. (Two-area covering problem) 162.
- R. W. and A. A. Townsend (Isotropic turbulence) 402.
- Stewartson, K. (Viscous fluid) 191.
- Steyn, H. S. (Multivariate probability functions) 339; (Wishart distribution) 339.
- Stipanitch, Ernest (Application géométrique des nombres complexes) 356.
- Stocker, P. M. (Expansion wave) 194.
- Stöhr, Alfred (Lineare homogene Differentialgleichungssysteme) 335.
- Stojakovitch, Mirko (Formule de Cauchy) 293.
- Stolov, Harold L. (Semi-diurnal tidal oscillation) 240.
- Stoner, E. C. (Collective electron ferromagnetism) 447.
- Storm, M. L. (Heat conduction) 197.
- Straus, Ernst G. (Polynomials whose derivatives have integral values at the integers) 42.
- E. G. s. S. P. Diliberto 68.
- Stroh, A. N. s. J. D. Eshelby 440.
- Strong, P. s. M. E. Rose 220.
- Stuart, J. T. s. D. Meksyn 400.
- Stueckelberg, E. C. G. and A. Petermann (Normalization group) 210.
- Stuloff, Nicolaus (Verallgemeinerte Dirichletsche Reihen) 286.
- Stümke, H. (Isotherme Atmosphäre) 240.
- Sturrock, Peter (Champs magnétiques de révolution) 206.
- Sturrock, P. A. (Magnetic electron lenses) 206.
- Suddaby, A. s. S. Levine 231.
- Suetuna, Zyoiti (Grundlagen der Mathematik) 245.
- Sugawara, Masao (Differential equations) 313.
- Šul'gin, M. F. (Poissonsches Theorem) 388.
- Sullivan, J. A. s. W. Gustin 354.
- Sunouchi, Haruo (Bilinear functionals) 120.
- Suter, Ernst (Festpunkte) 185.
- Suzuki, Jingoro (Metritzation and completion of a space) 165.
- Michio (Lattice of subgroups) 25; ( $L$ -homomorphisms of groups) 26.
- Sverdlov, L. M. (Frequenzen isotoper Moleküle) 224.
- Swiatecki, W. J. (Nuclear surface energy) 221.
- Swingle, Paul M. (Closure of connected sets) 169.
- Sykes, J. B. (Equation of transfer) 452.
- Synge, J. L. (Boundary-value problems) 102; (Viscous fluid in a fixed container) 191; (Electrical networks) 200.
- Sz.-Nagy, Gyula v. (Nichtkonstruierbare Aufgabe des Dreiecks) 355.
- Szablewski, W. (Turbulente Strömung längs der ebenen Platte) 401.
- Szász, Otto (Summability ( $R_1$ )) 286.
- Szegő, G. (Principal frequency) 188.
- Szele, T. (Direct sums of cyclic groups) 29.
- Széplál, I. (Ringerweiterungen) 267.
- Szép, J. (Endliche einfache Gruppen) 259; (Faktorisierebare Gruppen) 259.
- s. L. Rédei 259.
- Taconis, K. W. s. C. J. Gorter 229.
- Tagamlickij, Ja. A. (Abelsche Reihe) 67.
- Takahashi, Y. (Meson current) 427.
- s. H. Umezawa 425, 427.
- Taketani, Mituo, Seitara Nakamura and Muneco Sasaki (Theory of nuclear forces) 427.
- — —, Ken-ichi Ono and Minoru Umezawa (Beta decay) 432.
- s. M. Umezawa 432.
- Takeuchi, Kensuke (Maximal proper sublattices) 35.
- Taldykin, A. T. (Lineare Integralgleichungen) 106; (Systeme von Elementen des Hilbertschen Raumes) 118.
- Tal'janskij, I. I. s. A. E. Glauberman 443.
- Tallqvist, H. J. (Divisibilität der Polynome) 253; (Geometrische Örter) 359; (Reflexions- und Refraktionsprobleme) 359; (Ort konstanter Summe der Tangentenlängen) 359.
- Tamada, K. s. S. Tomotika 405.
- Tamagawa, T. s. S. Iyanaga 41.
- Tamura, J. s. S. Machida 426.
- Tani, Smio (Particle models and field theories. I.) 424.
- Tanner, J. C. (Delay to pedestrians) 340.
- Tate, John (Extremal points of convex sets) 114.
- — T. s. E. Artin 267.
- Tati, T. (Radiative corrections) 224.
- Taton, René (Desargues) 4; (Oeuvre de Desargues) 244; (Oeuvre de Monge) 245.
- Tatuzawa, Tikao and Kane-siroo Iseki (Prime-number theorem) 274.
- Taurel, L. et J. P. Chapelle (Diffusion Rayleigh) 450.
- Tausky, Olga s. A. M. Ostrowski 252.
- Taylor, R. (System  $H_4$ ) 224.
- Sir Geoffrey (Swimming of microscopic organisms) 403.
- Tchen-Yang, Vincent Ou (Valeurs déficientes d'une fonction algébrique) 298.
- Teghem, J. (Transformations de séries) 63.
- Teissier du Cros, François (Déplacements dans un prisme) 185; (Décomposition d'un état d'équilibre) 186; (Photoélasticimétrie) 186.
- Temperley, H. N. V. (Temperature-waves) 229.
- Tenca, Luigi (G. Grandi) 4.
- Teng, Lee C. (Nucleon-nucleon collisions) 426.
- Tengbergen, Ca. van Ebbenhorst s. Ebbenhorst Tengbergen, Ca. van 43.
- Tertsch, H. s. F. Raaz 265.
- Tewordt, L. s. W. Franz 214.
- Thaler, R. M. (Electron affinity) 224.
- Tharrats Vidal, Jésus Marie (Dilatation des corps) 196.



- Thébault, Victor (Carrés curieux) 43; (Carrés parfaits) 43; (Géométrie du triangle) 355.
- Thirring, Walter E. (Renormalisationskonstante) 213.
- Thiruvengatachar, V. R. and T. S. Nanjundiah (Inequalities concerning Bessel functions) 72.
- Thomas jr., George B. (Calculus and analytic geometry) 278.
- Thompson, H. R. and I. D. Dick (Factorial designs in small blocks) 343.
- W. B. (Thermal convection) 453.
- Thomson, Sir George and P. E. Hodgson (Cosmic ray stars) 435.
- Thosar, Y. V. (Legendre's functions) 72.
- Thrall, R. M. and G. de B. Robinson (Supplement) 260.
- Thüring, B. (Jupitergruppe) 237.
- Thybaud, Alexandre et Paul Robert (Congruence paratactique. I. II.) 368.
- Tibiletti, Cesarina (Grandezze poliedriche) 356.
- Tietz, Horst (Transformations-theorie) 181.
- Timan, A. F. (Resultate von Kolmogorov und Nikol'skij) 67.
- Tims, S. R. (Functions schlicht in convex domains) 80.
- Tiomno, J. s. W. Schützer 420.
- Tisza, Laszlo (Superconducting state) 445.
- Titchmarsh, E. C. (Eigenfunction expansions) 101.
- Titus, Charles J. (Topological characterization of affine transformations) 179.
- Tokuoka, Z. and Y. Katayama (Non-local field theory) 428.
- Toledo Piza, Alfonso P. de (Geometrisches Verteilungsgesetz) 131.
- Tolhoek, H. A. and S. R. de Groot (Mixed invariants in beta decay) 223; (Beta radioactivity. II. III.) 431; (IV.) 432.
- — — s. S. R. de Groot 231.
- Tolstov, G. P. (Kurven, die eine differenzierbare Parameterdarstellung zulassen) 282.
- Tomitch, Boško (Développement d'une puissance du monôme) 251.
- Tomotika, S. and T. Aoi (Drag on a circular cylinder) 191.
- — and K. Tamada (Two-dimensional transonic flows) III.) 405.
- Tonnellat, Marie-Antoinette (Champ unitaire) 208; (Théorie unitaire des champs) 208, 209; (Théorie unitaire affine) 209.
- Tordion, Georges V. (Forces d'inertie) 182.
- Toscano, L. (Triangle associé à un triangle) 355.
- Touchard, Jacques (Polynômes orthogonaux) 290.
- Touschek, B. F. s. J. C. Gunn 215.
- Townsend, A. A. (Structure of turbulence) 192; (Passage of turbulence) 192.
- — — s. R. W. Stewart 402.
- Tralli, N. and G. Goertzel (Internal conversion) 430.
- Treffitz, Eleonore (Wellenfunktionen des neutralen Calciumatoms) 224; (PrIV-Spektrum) 224.
- Tricomi, F. G. (Hilbert transformation) 107; (Somma di vettori casuali) 131; (Airfoil equation) 319.
- — — and A. Erdélyi (Asymptotic expansion of a ratio of gamma functions) 291.
- Trigg, George L. and Eugene Feenberg (Beta-decay) 222.
- Tropper, A. Mary (Reciprocals of infinite matrices) 111.
- Truesdell, C. (Bounding surface) 364; (New definition of a fluid. II.) 396.
- Tsien, H. S. (Flame front) 228.
- Tsuchikura, Tamotsu (Series with function terms) 61.
- Tsuji, Masatsugu (Conformal mapping) 82; (Regular function of constant absolute value on the boundary) 83; (Open Riemann surfaces) 300; (Meromorphic functions) 300.
- Turán, Paul (Fermat's conjecture) 44; (Approximative solution of algebraic equations) 124.
- Tureckij, A. Ch. (Quadraturformeln) 289.
- Turnbull, Herbert Westren (C. Maclaurin) 4; (Great mathematicians) 245.
- Turri, Tullio (Trasformazioni involutorie) 360; (Trasformazioni piane cicliche) 360; (Sistemi di cubiche) 361.
- Udgaonkar, B. M. (Tensor of rank 2) 364.
- Ufford, Dolores s. Y. L. Luke 334.
- Ullman, J. L. (Schlicht functions) 80; (Sections of a Taylor series. I.) 296.
- Ullrich, Egon (Betragflächen) 77; (F. Engel) 245; (Weltall und Leben) 245; (Wertvorrat gewisser Lückenreihen) 277.
- Umeda, Kwai (Thomas-Fermi function for a packed atom) 226.
- Umezawa, Hiroomi and Susumu Kamefuchi (Vacuum) 423.
- — Y. Takahashi and S. Kamefuchi (Multiple production of mesons) 425; (Meson cloud) 427.
- — s. S. Sakata 217.
- Minoru, Seitaro Nakamura, Yoshio Yamaguchi and Mituo Taketani ( $\beta$ -decay schemes. I.) 432.
- — s. M. Taketani 432.
- Ungar, Peter (Planar graphs) 386.
- Unsold, A. (Cosmic radiation) I.) 223.
- Urcelay, José Maria (Rhomboidale Nomogramme) 128.
- Ursell, F. (Surface waves) 407.
- H. D. and L. C. Young (Prime ends) 169.
- Usui, Tunemaru s. E. Ishiguro 449.
- Utiyama, R. s. K. Husimi 428.
- Utz, W. R. (Cantor discontinuum) 54; (Unrestricted regular transformations) 382.
- Vaccaro, Michelangelo (Funzionali analitici lineari) 324.
- Vachaspati s. W. Kohn 445.
- Vajnberg, D. V. (Zusammengesetzte Scheiben) 187; (Bi-harmonische Kontaktaufgabe) 188.
- Vajnštejn, B. K. (Kristallstrukturen) 232.
- Valatin, Jean G. (Seconde quantification. II.) 212; (Théorie du positron) 212; (Quantum electrodynamics) 422.
- Valcovic, V. (Fonctions de Bessel) 291; (Flambage des colonnes) 392.
- Vallander, S. V. and M. P. Elovskich (Wärmeleitungskoeffizienten) 229.
- Vallée, Robert (Relations d'„incertitude“) 211; (Théorie



- de l'information) 387; (Opérateurs d'observation) 413.
- Valentine, F. A. (Circle in Minkowski plane) 375.
- Varma, R. S. (Appell polynomials) 73.
- Vasil'eva, A. B. (Differentialgleichungen, die einen Parameter enthalten) 92; (Systeme von Differentialgleichungen, die einen Parameter enthalten) 92; (Differentiation der Lösungen von Differentialgleichungen nach dem Parameter) 92.
- Veen, S. C. van (Generalized Bernoulli numbers) 285; (Zirkelgeometrie) 354.
- Veksler, A. Z. s. A. V. Sokolov 446.
- Vekua, I. N. (Eindeutigkeitsätze der stehenden Schwingungen) 95.
- Venkatachalam Iyer, R. (Pāṭiganita and the Hindu abacus) 1; (Equal sums of like powers) 43.
- Venkataraman, C. S. (Zeros of a polynomial) 254; (Number of divisors) 273.
- Verriest, Gustave (Nombres et espaces) 11.
- Verschaffelt, J. E. (Phénomènes de transport) 228; (Écoulement fluidal) 409; (Phénomènes irréversibles. II.) 409; (Transport d'énergie) 411; (Effet thermique de la diffusion) 411.
- Vidal, J. M. Tharrats s. Tharrats Vidal, J. M. 196.
- Videnskij, V. S. (Abschätzung der Ableitungen eines Polynoms) 59.
- Vigier, Jean-Pierre (Théorie unitaire affine) 209; (Onde pilote en théorie unitaire affine) 418.
- Vijayaraghavan, T. (Problem in number theory) 46.
- Villa, Mario (Quasi-asintotiche) 370.
- Vil'ner, I. A. (Anamorphose) 124.
- Vinokurov, V. G. (Quasi-Komplemente) 119.
- Vinti, John P. (Series of products of Legendre polynomials) 71.
- Visconti, A. (Théorie de R. P. Feynman) 424.
- Višik, M. I. (Lineare Randwertprobleme) 95; (Randwertaufgaben) 95.
- Vlahavas, George N. (Three-phase circuit) 200.
- Vleck, J. H. van (Antiferromagnetism) 448; (Ferromagnetic resonance) 448.
- Vogelaere, René de (Problème de Störmer) 237.
- Volterra, Enrico (Elastic continua) 394.
- Volz, H. und H. Haken (Quantentheorie des Mehrelektronenproblems) 442.
- Vonsovskij, S. V., A. A. Smirnov und A. V. Sokolov (Metallegierungen) 444.
- Voronov, A. A. (Freie Schwingungen eines Oszillators) 388.
- Voskresenskij, E. P. und V. J. Sobolev (Nichtlineare Integralgleichungen) 318.
- Vrkljan, V. S. (Partikeln mit Spin  $3/2$ ) 216; (Beziehungen zwischen den Diracschen Matrizen) 421.
- Vroelant, Claude s. O. Chalvet 225.
- Vučkić, Milenko (Meilleure approximation) 69.
- Vulich, B. Z. s. L. Kantorovič 332.
- Wade, Thomas L. (Vectors and matrices) 13.
- Waerden, B. L. van der (Groupe avec deux générateurs) 21; (Astronomie der Pythagoreer) 242.
- s. W. Habicht 356.
- Wagner, E. H. (Elektroneninterferenzen. III.) 233.
- Wald, Abraham (Statistisches Rückschlußverfahren) 341; (Equations of economics) 350.
- Walsh, John E. (Equal-tail sign test) 142.
- Walter, Edward (Nichtparametrische Testverfahren. II.) 142.
- Walters, Stanley S. (Space  $H^p$ ) 113.
- Wang, Chi-Teh und Socrates de los Santos (Compressible flows) 193.
- Hao (Arithmetic translations of axiom systems) 9.
- Wannier, Gregory H. (Motion of gaseous ions) 438.
- Warhurst, E. (Ionic character of bonds) 225.
- Warschawski, S. E. (Conformal mapping) 82.
- Watson, G. S. and J. Durbin (Tests of serial correlation) 139.
- Watson, K. M. s. S. Fernbach 426.
- Wawilow, S. I. (I. Newton) 244.
- Webber, G. Cuthbert (Odd perfect numbers) 47.
- Weber, Maria (Degenerate equation of parabolic type) 99.
- Wegner, U. (Iterationsverfahren) 123.
- Weil, André (Arithmetic on algebraic varieties) 270.
- Herschel (Extrusion of a very viscous liquid) 399.
- Weinstein, Alexander (Tricomi's equation) 100.
- Weiβ, Herbert K. (Servomechanisms) 184.
- Weissinger, Johannes (Iterationsverfahren) 127.
- Weisskopf, V. F. (Transition probabilities) 220.
- Weizsäcker, Carl Friedrich v. (Kosmogonie) 238.
- Welch, B. L. (Comparison of mean values) 141.
- Welker, H. (Galvanomagnetische Effekte) 444.
- Wells, C. P. s. R. D. Spence 97.
- Wendel, J. G. (Isometric isomorphism of group algebras) 31.
- Wendt, Georg (Elektronenlinsen) 205.
- Wentzel, Gregor (Lattice vibrations) 445.
- Wenzl, F. (Wandströme im Plasma) 229.
- Werfel, A. und P. Wilker (Erhaltungssätze) 182.
- Weston, J. D. (Riemann-Stieltjes integrals) 56.
- Weyl, H. (Idee der Riemannschen Fläche) 76.
- Whaples, George (Local theory of residues) 42.
- Wheeler, David J. s. M. V. Wilkes 129.
- Whitehead, J. H. C. (Omotopia. II.) 177; (Theory of obstructions) 384.
- Whitlock jr., W. P. (Diophantine equation) 43.
- Whitney, Anne s. I. J. Schoenberg 252.
- Hassler (Totally differentiable functions) 58.
- Whittaker, Edmund (Aether and electricity) 245.
- Whyburn, G. T. (Hurwitz's theorem) 178.
- Widder, D. V. s. I. I. Hirschman jr. 109.
- Wielandt, Helmut (Produkt paarweise vertauschbarer nilpotenter Gruppen) 258



- Wild, E. (Boltzmann's equation) 437.
- Wilker, P. (Kanonischer Formalismus) 182; (Relativistische Invarianz) 207.
- s. A. Werfel 182.
- Wilkes, M. V. (Atmospheric oscillations) 239.
- Maurice V., David J. Wheeler and Stanley Gill (Programs for an electronic computer) 129.
- Williamson, Marjorie s. H. T. Flint 217.
- Wilson, K. B. s. G. E. P. Box 344.
- L. T. s. G. R. Clements 181.
- R. (Piranian's theorem) 294.
- Wills, C. H. s. R. H. MacNeal 188.
- Wing, G. Milton (Schlicht functions) 80.
- Winter, Rolf G. (Double beta-decay) 223.
- Wintner, Aurel (Nonexistence of conjugate points) 87. (Riemann metrics of constant curvature) 371.
- s. Ph. Hartman 87.
- Wold, Herman O. A. (Stationäre Zeitreihen) 349.
- Wolf, Frantisek s. W. R. Mann 100.
- Wolfowitz, J. (Decision functions) 348.
- s. A. Dvoretzky 339.
- Wolibner, W. (Polynôme d'interpolation) 19.
- Wolkowitsch, David (Pentaèdres conjugués à une quadrrique) 359.
- Woodward, P. M. (Waveform analysis) 419.
- Woolf, Barnet (Multiple regressions) 136.
- Wormleighton, R. s. D. A. S. Fraser 348.
- Wright, Georg H. von (Modal logic) 7.
- R. W. (Electrical properties of nonmetals) 444.
- Wrtilek, Franz (Krümmungskreiskonstruktionen) 378.
- Wu, Shi-Shu (Conventional perturbation theory) 212.
- Wunderlich, Walter (Dreiecksnetz aus Kegelschnitten) 147; (Statik der Strickleiter) 369.
- Wundt, H. (Sonnenfleckenperioden) 237.
- Wylar, Oswald (Rangbegriff in der Theorie der Ringe) 266.
- Yachter, M. (Rocket motor) 194.
- Yamabe, Hidehiko (Free abelian group) 29; (Locally compact groups) 32.
- Yamaguchi, Y. (Neutron-proton scattering) 429.
- s. M. Umezawa 432.
- Yang, L. M. (Product of Dirac's matrices) 212; (Nuclear shell structure) 221; (Harmonic oscillator) 419; ( $S$ -matrix) 423.
- Yano, Kentaro and Hitosi Hiramatu (System of hypersurfaces) 375.
- Yih, Chia-shun (Approximation by power series) 283.
- Yoffe, Elizabeth H. (Griffith crack) 235.
- Yood, Bertram (Semi-groups of linear operators) 32; (Linear transformations) 119.
- Yosida, Tokunosuke (Pseudanalytic functions) 82.
- Young, D. M. s. G. Birkhoff 125.
- L. C. s. D. H. Ursell 169.
- jr., Gail S. (Rutt-Roberts theorem) 382.
- Youngs, J. W. T. (Fréchet surfaces) 179.
- Yovanovitch, D. K. (Causalité de groupe) 387.
- Yovits, M. C. s. G. Breit 429.
- Yûjôbô, Zuiman (Theorem of Minkowski) 52.
- Yukawa, H. (Non-local fields) 428.
- Zacepin, G. T. (Photospaltung) 224.
- Zacharias, Max (Parallelenproblem) 351; (Projektive Geometrie) 357; (Ebene Konfigurationen (10<sub>3</sub>)) 358.
- Zadeh, Lotfi A. (Linear varying parameter systems) 183; (Heaviside operators) 320.
- Zajcev, L. P. und N. V. Zvolinskij (Axialsymmetrische Hauptwelle) 195.
- Zalgaller, V. A. (Variationen von Kurven) 161.
- Zappa, Guido (Emitropismo tra due gruppi) 25.
- Zarantonello, E. H. s. G. Birkhoff 125.
- Zaycoff, Raschko (Gravitation) 207.
- Zernov, N. V. (Randwertaufgaben der Elektrodynamik) 315.
- Ziegler, Hans (Stabilitätsprobleme bei geraden Stäben) 393.
- Zienau, S. s. E. Arnous 423.
- Ziman, J. M. (Bethe method) 448.
- Zimmerberg, H. J. (Normalizable transformations in Hilbert space) 326.
- Zinger, A. A. (Unabhängige Stichproben) 341.
- Zinniker, A. (Näherungskonstruktionen der Kreisquadratur) 355.
- Zuckerman, Herbert S. s. T. M. Apostol 272.
- s. R. A. Beaumont 29.
- Zvolinskij, N. V. s. L. P. Zajcev 195.